

《科学研究費補助金（総合研究A）研究集会報告集》

「第11回代数的組合せ論シンポジウム報告集」

1993年6月28日～6月30日

於 大阪教育大学

まえがき

この報告集は、1993年6月28日より6月30日までの3日間、大阪教育大学柏原キャンパスにおいておこなわれた「第11回 代数的組合せ論シンポジウム」の講演記録です。プログラムは代数的組合せ論とその関連分野の、第一線の研究者による講演を集めて作成しました。このようなプログラムを私の一存で作ることをお許しいただいた、研究代表者・坂内英一、吉田知行両氏に感謝いたします。講演者の旅費等について、科研費総合A（研究代表者：森田康夫・東北大教授）の援助をいただきましたことを御礼申し上げます。

報告集の出版が遅れたこと、にもかかわらずすべての講演の原稿が採録出来なかったことを深くお詫びいたします。

最後になりましたが、会場の世話をしていただいた伊藤達郎氏、講演者、参加していただいた方々に感謝いたします。

1994年1月
宗政昭弘
(プログラム責任者)

「代数的組合せ論」研究集会

科学研究費総合 (A) (研究代表者: 森田康夫 (東北大理)) の援助による上記研究集会を次のように開催いたします。

代 表 者 坂内 英一 (九大・理)
 吉田 知行 (熊大・理)
プログラム責任者 宗政 昭弘 (九大・理)

日時: 1993年6月28日 (月) 13:20~6月30日 (水) 15:50

場所: 大阪教育大学柏原キャンパス・A棟 A-303 (視聴覚室)

プログラム

6月28日 (月)

13:20~14:00 宮本 泉 (山梨大・工)
巡回群の efficient presentation の応用

14:10~14:50 吉荒 聡 (弘前大・理)
On flag transitive anomalous C_3 geometry

15:10~15:50 斎藤 恭司 (京大・数理研)
Coxeter exponent の乗法的 duality について

16:00~16:40 五味 靖 (上智大・理工)
ある可換 Hecke 環の指標表

16:50~17:30 宮本 雅彦 (愛媛大・理)
モンスター加群と deep hole isotropic elements

6月29日 (火)

9:40~10:20 野村 和正 (東京医歯大・養)
Twisted extensions of spin models

10:30~11:10 松本 眞 (京大・数理研)
Combinatorial Dehn twists

- 11:20~12:00 増田 哲也 (筑波大・数学)
 パラグループと有限次元半単純代数
- 13:30~14:10 林 孝宏 (名大・理)
 部分作用素環論と量子群
- 14:20~15:00 岡田 聡一 (名大・理)
 Differential poset と fusion algebra
- 15:20~16:00 吉田 知行 (熊大・理) 小田 文仁 (熊大・自然)
 大きな Hecke 環 (span 環) について 宗政 昭弘 (九大・理)
- 16:10~16:50 坂内 英一 (九大・理) 宗政 昭弘 (九大・理)
 Group association scheme の Terwilliger algebra
- 17:00~17:30 Problem session and short communications
 (責任者: 坂内 英一)
- 6月30日 (水)
- 9:40~10:20 鈴木 寛 (大阪教育大)
 Nearly imprimitive distance-regular graphs
- 10:30~11:10 横山 和弘 (富士通・国際研)
 Affine distance-transitive graph の局所的性質による分類について
- 11:20~12:00 平峰 豊 (阪大・養)
 Affine difference set について
- 13:30~14:10 小関 道夫 (山形大・理)
 二元符号の Jacobi 多項式について
- 14:20~15:00 木村 浩 (愛媛大・理)
 アダマール行列とコードについて
- 15:10~15:50 大山 豪 (大阪教育大)
 4重可移群の分類の顛末

目 次

1 .	巡回群の efficient presentation の応用-----	1
	山梨大・工	宮本 泉
2 .	On flag transitive anomalous C_3 geometries-----	8
	弘前大・理	吉荒 聡
3 .	ある可換 Hecke 環の指標表-----	1 7
	上智大・理工	五味 靖
4 .	ムーンシャイン加群上の21元生成コクスター群-----	3 2
	愛媛大・理	宮本 雅彦
5 .	Twisted extensions of spin models-----	3 9
	野村 和正 (東京医歯大・養)	
6 .	Combinatorial Dehn twists-----	4 8
	京大・数理研	松本 眞
7 .	Paragroups and finite dimensional semisimple algebras-----	5 7
	筑波大・数学	増田 哲也
8 .	ジョーンズ指数理論と量子群-----	7 1
	名大・理	林 孝宏
9 .	Differential poset と fusion algebra-----	8 0
	名大・理	岡田 聡一
1 0 .	大きな Hecke 環 (span 環) について-----	9 2
	熊大・理	吉田 知行
	熊大・自然	小田 文仁
	九大・理	宗政 昭弘

1 1	· Group association scheme の Terwilliger algebra-----	9 7
	九大・理	坂内 英一
	九大・理	宗政 昭弘
1 2	· On distance- i -graphs of distance-regular graphs-----	1 0 5
	大阪教育大	鈴木 寛
1 3	· Affine distance-transitive graph の局所的性質による分類について-----	1 1 4
	富士通・国際研	横山 和弘
1 4	· Affine difference set について-----	1 1 2
	阪大・養	平峰 豊
1 5	· 二元符号の Jacobi 多項式について-----	1 3 2
	山形大・理	小関 道夫
1 6	· Extremal doubly even (56,28,12) codes and Hadamard matrices of order 28	
	-----	1 4 9
	愛媛大・理	木村 浩
1 7	· 4重可移群の分類の顛末-----	1 5 4
	大阪教育大	大山 豪

巡回群の efficient presentation の応用

山梨大学 宮本 泉

群 G の presentation

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$$

x_1, x_2, \dots, x_m 群 G の生成元

r_1, r_2, \dots, r_n 群 G の基本関係

一つの群に対して様々な presentation が考えられるが、ここでは deficiency = 基本関係の個数 - 生成元の個数 と定義して、これができるべく小さくなる presentation を考える。群の最小の deficiency がいくつになるか直接に求める方法は知られていないが、一般に $\text{deficiency} \geq \text{Schur multiplier の rank}$ が成立するので、この等号が成立すれば deficiency は最小になる。このとき efficient という。またこれより perfect な群のときは、Schur multiplier で拡大した群の efficient な presentation が存在すれば、もとの群の efficient な presentation も存在することがわかる。したがって、なるべく拡大した群の efficient presentation を求める方向で研究を進めることになる。

[定理] (C.M.Campbell, E.F.Robertson) p が奇素数のとき

$$SL(2, p) \cong \langle x, y \mid x^2 = (xy)^3, (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2y^p x^{\frac{2(p-1)}{3}} = 1 \rangle$$

この定理から

$$PSL(2, p) \cong \langle x, y \mid x^2 = (xy)^3 = 1, (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2y^p = 1 \rangle$$

となることは容易に推測できる。これらの presentation は、いずれも efficient な例になっている。ここでは、この結果を利用して $SL(2, p)$ や $PSL(2, p)$ の直積などの群の efficient presentation について考える。なお、異なる奇素数 p_1, p_2, \dots, p_n の n 個の $SL(2, p_i)$ 直積の presentation は、上の定理で $p = p_1 p_2 \dots p_n$ とすることで与えられる。

直積の群の presentation

例えば、 $G_1 = \langle x, y \mid r_1, \dots, r_m \rangle$, $G_2 = \langle u, v \mid r'_1, \dots, r'_n \rangle$ のとき一般に、

$$G_1 \times G_2 = \langle x, y, u, v \mid r_1, \dots, r_m, r'_1, \dots, r'_n, [x, u] = [x, v] = [y, u] = [y, v] = 1 \rangle$$

で与えられるが、群 G の Schur multiplier を $M(G)$ で表すと、

$$M(G_1 \times G_2) = M(G_1) \times M(G_2) \times (G_1/G'_1 \otimes G_2/G'_2)$$

が成立するので、 G_1, G_2 が perfect なときは上の presentation では deficiency と Schur multiplier との差が 4 増えてしまう。以下で考えている G_1, G_2 が $SL(2, p)$ や $PSL(2, p)$ の場合も前に述べたように、 $SL(2, p) \times SL(2, p)$ の efficient な presentation が求められればその他の場合も解決されるが、知られているのは次の結果である。

[定理] (C.M.Campbell, E.F.Robertson, P.D.Williams)

$PSL(2, p) \times PSL(2, p), p \geq 5$, 素数, の efficient な presentation

生成元 a, b

基本関係 $p \equiv 1 \pmod{6}$ のとき

$$a^{3p} = (ba^{-1})^2$$

$$(ab^{\frac{p-1}{2}}a^{-1}b^{-4})^2 = b^p$$

$$(ba^{\frac{p-1}{2}}b^{-1}a^{-4})^2 = a^p$$

$$b^{p+1} = a^{p-1}ba^{p-1}$$

$p \equiv -1 \pmod{6}$ のとき . . . 略 . . .

巡回群の efficient な presentation

生成元 x_1, x_2, \dots, x_m の群に対して、最初、 $w_1 = x_1, w_2 = x_2, \dots, w_m = x_m$ から始めて、次の書き換えを繰り返し適用する。

- (1) 生成元の番号を付け換える。
- (2) 生成元をその逆元と取り換える。
- (3)

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_m \end{array} \right\} \text{ を } \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_i^k w_j w_i^l \\ \vdots \\ w_m \end{array} \right\} \text{ に書き換える。 } k, l \text{ は整数。}$$

これらの書き換えは可逆なので、 w_1, w_2, \dots, w_m も生成元となる。したがって、

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid w_1 = w_2 = \dots = w_{m-1} = 1, (w_m)^n = 1 \rangle$$

は、(位数 n の) 巡回群になる。また、

$$G = \langle w_m \rangle$$

である。

$$[\text{例}] \langle x, y | x^{-1}yx^{-2}yx^{-2}y = 1, (x^{-2}y)^{15} = 1 \rangle$$

$$= \langle x, y | x^5 = y^3, [x, y] = 1, (x^5 = 1) \rangle$$

[説明] 左辺第1式より、 $x^{-1} = (x^{-2}y)^3$ 、したがって、 $y = x^2x^{-2}y = (x^{-2}y)^{-5}$ 。これより、 $x^5 = y^3, [x, y] = 1$ を得る。(また、 $x^{-1} = (x^{-2}y)^3$ を左辺第2式へ代入すれば、 $x^5 = 1$ を得る。) 逆に、右辺の関係式から左辺の関係式を導くのは易しい。この場合の生成元の書き換えは

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \\ x^{-2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^{-2}y)^3 \\ x^{-2}y \end{cases}$$

になり、この群は $x^{-2}y$ で生成されている。

$$[\text{例}] G = \langle x, y, z | x^{-1} = (xy^{-1})^2, z = (z^2xy^{-1})^6 \rangle$$

[説明]

$$xy^{-1} = z^{-2}z^2xy^{-1} = (z^2xy^{-1})^{-11}$$

$$x^{-1} = (z^2xy^{-1})^{-22}$$

$$y^{-1} = x^{-1}xy^{-1} = (z^2xy^{-1})^{-33}$$

したがって、

$$G = \langle x, y, z | x^3 = y^2 = z^{11}, [x, y] = [x, z] = [y, z] = 1 \rangle = \langle z^2xy^{-1} \rangle$$

新しく得られた presentation

次に述べるいくつかの群の efficient または deficiency = 1 の presentation が得られた。ただし、以下の式中で土や干は $\frac{p \pm 1}{3}$ などが整数となるように選ぶことにする。

$G \cong SL(2, p) \times PSL(2, p)$ の efficient な presentation, $p \geq 5$, 素数。

生成元 x, y, u, v

基本関係

$$y^{\mp 1} (y^{\frac{p \pm 1}{3}} uv)^3 = 1$$

$$\begin{aligned}
uv(uvx)^2 &= 1 \\
v(v^{\frac{p-1}{2}}x)^2 &= 1 \\
xy(xy u)^2 &= 1 \\
(uv^4uv^{\frac{p+1}{2}})^2(xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2u^2 &= 1
\end{aligned}$$

[説明] 巡回群の presentation を応用すると、最初の4基本関係から

$$\begin{aligned}
[uv, y] &= 1, & (uv)^3y^p &= 1 \\
[uv, x] &= 1, & (uv)^3x^2 &= 1 \\
[v, x] &= 1, & v^px^2 &= 1 \\
[u, xy] &= 1, & u^2(xy)^3 &= 1
\end{aligned}$$

が導かれるので、 $G = \langle u, v \rangle * \langle x, y \rangle$ がわかる。ついでに $\langle u, v \rangle \cap \langle x, y \rangle$ に属す $(uv)^3, y^p, x^2, v^p, \dots$ などが、 G の center にはいることがわかる。

よって、

$$\begin{aligned}
G/Z(G) &= \langle x, y | x^2 = (xy)^3 = y^p = (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 = 1 \rangle \\
&\quad \times \langle u, v | u^2 = (uv)^3 = v^p = (uv^4uv^{\frac{p+1}{2}})^2 = 1 \rangle \\
&\cong PSL(2, p) \times PSL(2, p)
\end{aligned}$$

が成り立つ。上の基本関係が perfect な群を与えていることは容易にわかる。後は $Z(G)$ についての考察であるが、これは省略する。

この構成法は $PSL(2, p)$ において位数2の元 x, u と位数3の元 $(xy), (uv)$ と位数 p の元 y, v を、互に位数が素なものどうしを組み合わせる巡回群の presentation を使って可換になるように作っている。その様な組み合わせは他にもあって、組み合わせ方で少しずつ異なる群がでてくる。その様にして求められた4生成元5基本関係の群を後にまとめて述べることにする。

次に、巡回群は1つの元で生成されていることを使って、この presentation を2生成元3基本関係に帰着する。 $a = v^{\frac{p-1}{2}}x$ とおくと、第3式より

$$\begin{aligned}
v &= a^{-2} \\
x &= v^{-\frac{p-1}{2}}a = a^p
\end{aligned}$$

$b = y^{\frac{p+1}{3}}uv$ とおくと、第1式より

$$\begin{aligned}
y &= b^{\pm 3} \\
u &= (y^{-\frac{p+1}{3}}a)v^{-1} = b^{\mp p}a^2
\end{aligned}$$

これを代入することにより、 $SL(2, P) \times PSL(2, p)$ の efficient な 2 生成元による基本関係が得られる。

$$\begin{aligned} b^p(b^p a^p) &= 1 \\ b^{-3} a^p (b^{p-3} a^{p+2})^2 &= 1 \\ (a^{p-6} b^{p-12} a b^{-\frac{p+3}{2}})^2 (b^p a^2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

後にまとめてあげた 2 生成元 3 基本関係の presentation も同様にして得られている。

$SL(2, p) \times PSL(2, p)$

4 生成元 x, y, u, v , 5 基本関係

$$\begin{aligned} uv(uvx)^2 &= 1, & v(v^{\frac{p-1}{2}} x)^2 &= 1 \\ v^{\pm 1} (v^{\frac{p-1}{3}} xy)^3 &= 1, & y(y^{\frac{p-1}{2}} u)^2 &= 1 \\ (uv^4 uv^{\frac{p+1}{2}})^2 (xy^4 xy^{\frac{p+1}{2}})^2 u^{3+3} x^{7+\frac{2p+5}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) * SL(2, p)$

4 生成元 x, y, u, v , 5 基本関係

$$\begin{aligned} y(y^{\frac{p-1}{2}} u)^2 &= 1, & y^{\pm 1} (y^{\frac{p-1}{3}} uv)^3 &= 1 \\ uv(uvx)^2 &= 1, & v^{\pm 1} (v^{\frac{p-1}{3}} xy)^3 &= 1 \\ (uv^4 uv^{\frac{p+1}{2}})^2 (xy^4 xy^{\frac{p+1}{2}})^2 v^p &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) * SL(2, p)$

4 生成元 x, y, u, v , 5 基本関係

$$\begin{aligned} xy(xyu)^2 &= 1, & y(y^{\frac{p-1}{2}} u)^2 &= 1 \\ y^{\pm 1} (y^{\frac{p-1}{3}} uv)^3 &= 1, & uv(uvx)^2 &= 1 \\ (uv^4 uv^{\frac{p+1}{2}})^2 (xy^4 xy^{\frac{p+1}{2}})^2 &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) \times SL(2, p)$, deficiency = 1

4 生成元 x, y, u, v , 5 基本関係

$$\begin{aligned} y^{\pm 1} (y^{\frac{p-1}{3}} uv)^3 &= 1, & uv(uvx)^2 &= 1 \\ v(v^{\frac{p-1}{2}} x)^2 &= 1, & xy(xyu)^2 &= 1 \\ (uv^4 uv^{\frac{p+1}{2}})^2 (xy^4 xy^{\frac{p+1}{2}})^{-2} u^{-2} x^6 &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) \times SL(2, p)$, deficiency = 1

4 生成元 x, y, u, v , 5 基本関係

$$\begin{aligned} uv(uvx)^2 &= 1, & v(v^{\frac{p-1}{2}}x) &= 1 \\ v^{\pm 1}(v^{\frac{p-1}{3}}xy)^3 &= 1, & y(y^{\frac{p-1}{2}}u)^2 &= 1 \\ (uv^4uv^{\frac{p+1}{2}})^{\pm 2}(xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^{\mp 2}y^{-2p\mp 3p}x^{-\frac{2p\mp 3p}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) * SL(2, p)$

2 生成元 a, b , 3 基本関係

$$\begin{aligned} a^{-3}b^{\frac{p-3}{2}}a^{-3}b^{\frac{p+3}{2}} &= 1 \\ a^pb^{p+3}a^pb^{2p+3} &= 1 \\ (a^{\mp p\pm 9}b^{\mp p\pm 9}a^{\pm \frac{p-3}{2}})^{\pm 2}a^{3p} &= 1 \end{aligned}$$

$SL(2, p) \times SL(2, p)$, deficiency = 1

2 生成元 a, b , 3 基本関係

$$\begin{aligned} a^pb^pa^pb^{2p} &= 1 \\ b^{-3}a^{p+2}b^{p-3}a^{p+2}b^{p-3}a^p &= 1 \\ (a^{p+6}b^{-p-12}a^{2p+1}b^{-\frac{5p-3}{2}})^2(a^2b^p)^2a^{-6p} &= 1 \end{aligned}$$

$PSL(2, 5)$ は $a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1$ という巾乗ばかりの基本関係で与えられるので大変都合が良く、ここで考えている問題の最終的な目標になる $SL \times SL$ の形の presentation で次の様にパラメータの自由度のあるものが得られた。

$SL(2, 5) \times SL(2, 5)$ の efficient な presentation

生成元 u, v, x, y

基本関係

$$\begin{aligned} u(u^{1+2s}y^{-1})^5 &= 1, & u(u^{5+2r}xy^{-1})^3 &= 1 \\ u^{1+2t}v(u^{1+2t}vx)^2 &= 1, & v^{-1}(v^2xy)^3 &= 1 \end{aligned}$$

ただし、整数 r, s, t は $r = 15t - 8s, (8 + 3r, 3 + 5s) = 1$ を満たすとする。例えば、 $r = 0, s = 30k$ や $r = 1, s = 2 + 15k, (k = \text{整数})$ で成り立つ。

これを 2 生成元に変換すると次の presentation が得られる。

$$\langle a, b | a^{-5}(a^{10(2s-r)-13}b^{-5})^3 = 1, b^3a^{-5-10t}(b^{-2}a^{10(s-t)+1})^2 = 1 \rangle$$

また、巡回群を互に素な位数の3個の元で生成する efficient presentation の応用として、 $PSL(2, p)$ 3個の直積の efficient presentation も得られた。説明は前の場合と同様なので省略する。

$$PSL(2, p) \times PSL(2, p) \times PSL(2, p)$$

6生成元 x, y, u, v, w, z , 9基本関係

$$\begin{aligned} xy(xyw^{-1})^2 &= 1, & v^{\pm 1}(v^{\frac{p\mp 1}{6}}xyw^{-1})^6 &= 1 \\ uv(uvx^{-1})^2 &= 1, & z^{\pm 1}(z^{\frac{p\mp 1}{6}}uvx^{-1})^6 &= 1 \\ wz(wzu^{-1})^2 &= 1, & y^{\pm 1}(y^{\frac{p\mp 1}{6}}wzu^{-1})^6 &= 1 \\ xy(xy u^{-1})^2 &= 1, & z^{\pm 1}(z^{\frac{p\mp 1}{6}}xy u^{-1})^6 &= 1 \\ (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 &= 1, & (uv^4uv^{\frac{p+1}{2}})^2 &= 1, & (wz^4wz^{\frac{p+1}{2}})^{-2} &= 1 \end{aligned}$$

これを2生成元 a, b , 5基本関係に帰着すると次が得られる。

$$\begin{aligned} a^{\mp 3p}b^{\mp 6}(a^{\mp 3p}b^{\mp 6}a^{\mp 6}b^{\pm 2p})^2 &= 1 \\ a^{2p}(a^{2p+6}b^{-2p})^2 &= 1 \\ (b^{\pm 3p}a^{\mp 2p})^{\pm 1}(b^{\pm 3p}a^{\mp 2p})^{\frac{p\mp 1}{6}}a^{\mp 3p}b^{\mp 6}a^{\mp 6}b^{\pm 2p})^6 &= 1 \\ b^{-6}(b^{\pm p+1}a^{\mp 2p\mp 6})^6 &= 1 \\ (b^{\mp 2p\pm 24}a^{\pm 3p\mp 18}b^{\pm p\pm 3}a^{\pm 1})^2(a^{\mp 2p}(b^{\pm 3p}a^{\mp 2p})^3a^{\mp 2}(b^{\pm 3p}a^{\mp 2p})^{\frac{p+1}{2}})^2 &= 1 \end{aligned}$$

参考文献

- [1] C.M.Campbell and E.F.Robertson, "A deficiency zero presentation for $SL(2, p)$ ", Bull. London Math. Soc., 12(1980),17-20.
- [2] C.M.Campbell, E.F.Robertson and P.D.Williams, "Efficient presentations of the groups $PSL(2, p) \times PSL(2, p)$, p prime", J.London Math. Soc.,(2)41(1990),69-77.
- [3] J.Wiegold, "The Schur multiplier: an elementary approach", in Groups - St Andrews 1981,137-154, London Math. Soc. Lecture Note 71.

On flag-transitive anomalous C_3 -geometries

Satoshi Yoshiara
Division of Mathematical Sciences
Osaka Kyoiku University
Kashiwara, Osaka 582, JAPAN

August 26, 1993

Abstract

In this report, the proof of the following recent result by the author and Antonio Pasini [YP] is briefly described, as well as a short survey of results on C_3 -geometry: A locally finite, flag-transitive thick C_3 -geometry is either a building or the sporadic A_7 -geometry, unless its full automorphism group is non-solvable and is of order (x, y) with y odd.

1. Generalized Polygons.

1.1 Definition. An incidence structure $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}; *)$ is called a generalized n -gon if its incidence graph $\Gamma(\mathcal{G}) := (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, \{\{P, l\} | P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}, P * l\})$ is of diameter n and of girth $2n$. (The diameter means the maximal distance between two vertices, and the girth is the length of a shortest circuit.) Elements of \mathcal{P} (resp. \mathcal{L}) are called *points* (resp. *lines*). For a point $P \in \mathcal{P}$ (resp. a line $l \in \mathcal{L}$), we set $\mathcal{L}(P) := \{m \in \mathcal{L} | P * m\}$ ($\mathcal{P}(l) := \{Q \in \mathcal{P} | Q * l\}$). For (possibly infinite) cardinals s, t , we say that \mathcal{G} is of order (s, t) if $|\mathcal{P}(l)| = s + 1$ and $|\mathcal{L}(P)| = t + 1$ for all lines l and points P . It can be verified that if \mathcal{G} is thick (that is, $|\mathcal{L}(P)| \geq 3$ and $|\mathcal{P}(l)| \geq 3$ for every point P and line l) then the order of \mathcal{G} can be defined.

1.2 Geometric Interpretations. We frequently use the following interpretation of the notion of generalized n -gons. Let $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}; *)$ be an incidence structure.

- (1) \mathcal{G} is a generalized 2-gon if and only if $\Gamma(\mathcal{G})$ is a complete bipartite graph if and only if $P * l$ for every points P and every lines l .
- (2) \mathcal{G} is a generalized 3-gon if and only if \mathcal{G} is a (generalized) projective plane: that is, there is a unique point (resp. line) incident with given two distinct lines (resp. points).
- (3) \mathcal{G} is a generalized 4-gon if and only if there is at most one line (resp. point) incident with two distinct points (resp. lines) and for any point P and an line l not incident with P there exist a point Q incident with l and a line m incident with Q and P .

1.3 Examples. Most popular explicit examples of generalized 3-gons is the incidence structure of projective points and lines in the 2-dimensional Desarguesian projective space $\text{PG}(2, q)$ associated with the vector space $GF(q)^3$ over a finite field $GF(q)$. As for a generalized 4-gon, which we will call a *generalized quadrangle* and abbreviate to GQ, we now give the following two examples.

1.4 Example. The symplectic quadrangle $W(q)$. Let V be a vector space of dimension 4 over $GF(q)$ equipped with a non-degenerate alternating form f . We define $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}; *)$ by \mathcal{P} = the isotropic (with respect to f) 1-spaces of V , \mathcal{L} = the isotropic 2-spaces of V , and $*$ = (symmetrized) inclusion.

For a 1-dimensional isotropic space P not contained a 2-dimensional isotropic space l , the subspace P^\perp orthogonal to P is of dimension 3 and therefore intersects l in a 1-dimensional space Q . This shows that the above condition for a GQ is satisfied. The GQ \mathcal{G} is of order (q, q) .

Note that the symplectic group $Sp_4(q) = \{T \in GL(V) | f(x, y) = f(Tx, Ty)\}$ acts on \mathcal{G} by usual multiplication of matrices. It can be verified that $Sp_4(q)$ acts transitively on the set of maximal flags (that is, pairs (P, l) of points P and lines l with $P * l$).

1.5 Example. Sylvester quadrangle $S(6)$. This was found by J.J.Sylvester in 1844. We take a set Ω of letters $1, 2, \dots, 6$, and define $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}; *)$ by \mathcal{P} = the transpositions on Ω , \mathcal{L} = the 2^3 -partitions on Ω , and $*$: symmetrized inclusion. The symmetric group S_6 on Ω acts on \mathcal{G} , which is transitive on the set of maximal flags. We can verify that \mathcal{G} is a GQ of order $(2, 2)$. Drawing a picture, it is not so difficult to establish that there is a unique GQ of order $(2, 2)$ up to isomorphism. Thus we have $S(6) \cong W(2)$, which also implies that $Aut(S(6)) = S_6 \cong Sp_4(2) = Aut(W(2))$.

1.6 Generalized polygons as rank-2 buildings. The above examples are of rank 2 and belong to an important class of geometry, so called *buildings*. Since we only need the notion of buildings, we will omit its formal definition. See [Ti1] Chap. 1–3, [Ti2] or [Ro] Chap.3. Classical geometries such as projective spaces and polar spaces associated with sesquilinear forms are buildings. It is shown by Tits [Ti1] that thick buildings of rank $r \geq 3$ and of “spherical type” should be one of these classical geometries or those related to exceptional simple algebraic groups of type F_4, E_6, E_7 or E_8 .

One of the most useful property of buildings is that they are geometries in which every “local structures” are also buildings. In particular, generalized polygons. So the natural question arises: Is a geometry whose “local structures” are generalized polygons always a building? The study of diagram geometry was originated from an attempt to make precise the meaning of “local structures” and to consider the above question. In general, the answer was known to be “no”, because some interesting geometries belonging to diagrams of affine types were constructed. However, in 1982 Tits gave an answer to the question above, which makes an exceptional nature of C_3 -geometry clear. In the following sections, further details will be discussed. However, since we mainly discuss on geometry of rank 3,

we will not repeat the formal definitions of terminologies in incidence geometry of general rank. For them, see for example [Bu], [Pa3], [PY2].

2. C_3 -geometry.

2.1. Definition. Let $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2; *)$ be an incidence geometry of rank 3, which simply means that $*$ is a reflexive and symmetric relation on the disjoint union $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ of non-empty sets \mathcal{G}_i ($i = 0, 1, 2$) such that $x * y$ for $x, y \in \mathcal{G}_i$ is equivalent to $x = y$ for each $i = 0, 1, 2$. We set $\mathcal{G}_i(x) := \{y \in \mathcal{G}_i \mid y * x\}$ for $x \in \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ and $i = 0, 1, 2$. The elements of \mathcal{G}_0 (resp. \mathcal{G}_1 and \mathcal{G}_2) are called *points* (resp. *lines* and *planes*).

An incidence geometry $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2; *)$ is called a C_3 -geometry if the residues $Res(a) := (\mathcal{G}_1(a), \mathcal{G}_2(a); *)$ of points a are mutually isomorphic generalized quadrangles, $Res(l) := (\mathcal{G}_0(l), \mathcal{G}_2(l); *)$ of lines l are mutually isomorphic generalized 2-gons, and $Res(u) := (\mathcal{G}_0(u), \mathcal{G}_1(u); *)$ of planes u are mutually isomorphic generalized 3-gons.

We will give two examples of C_3 -geometry. One is a building, and the other is not.

2.2 Example. The symplectic polar space $W_3(q)$. Let V be a vector space of dimension 6 over $GF(q)$ with a non-degenerate alternating form f , and define $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2; *)$ by $\mathcal{G}_0 =$ the isotropic (w.r.t f) 1-spaces of V , $\mathcal{G}_1 =$ the isotropic 2-spaces of V , $\mathcal{G}_2 =$ the isotropic 3-spaces of V , and $*$: symmetrized inclusion.

For each 1-dimensional subspace P , we consider the 4-dimensional space P^\perp/P equipped with a non-degenerate alternating form \bar{f} inherited from f . The 2- and 3-dimensional isotropic subspaces containing P correspond to 1- and 2-dimensional isotropic subspaces (w.r.t. \bar{f}) of P^\perp/P . This implies that the residue $Res(P)$ at P is isomorphic to the GQ $W(q)$ in 1.5.

The structure of residues of other types are easy to observe, and we can convince that \mathcal{G} is a C_3 -geometry. Note that the symplectic group $Sp_6(q) = \{T \in GL(V) \mid f(x, y) = f(Tx, Ty)\}$ acts on \mathcal{G} and is transitive on the set of maximal flags (that is, the triples of mutually incident points, lines and planes). Further, $|\mathcal{G}_0(l)| = q + 1$, $|\mathcal{G}_1(P) \cap \mathcal{G}_1(u)| = q + 1$ and $|\mathcal{G}_2(l)| = q + 1$ for each maximal flag (P, l, u) of a point P , a line l and a plane u .

2.3 Example. The sporadic A_7 -geometry. (See [Ro] p.50.) This geometry $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2; *)$ is defined as follows: First we set, $\mathcal{G}_0 :=$ the 7 letters of $\Omega = \{1, 2, \dots, 7\}$ and $\mathcal{G}_1 :=$ the 35 (unordered) triples of Ω . We consider a projective plane having Ω as the set of points. Such plane should be of order 2 and can be determined by specifying its 7 lines. For example, $\Pi = (\Omega, \mathcal{L})$ is a projective plane, where \mathcal{L} consists of the lines 123, 145, 167, 246, 257, 347 and 356. Here we also denote a line by the triple of points on it. It can be verified that there are 30 such planes, which form two orbits of the same length 15 under the action of the alternating group A_7 on Ω . Two planes belong to the same A_7 -orbit if and only if they have exactly one line in common. Now we define \mathcal{G}_2 as one of these two A_7 -orbits, and determine $*$ by natural containment.

The resulting geometry is a C_3 -geometry, which called the sporadic A_7 -geometry: For the residues of lines and planes, it is immediate to see their structures. For a point, say 7,

the set of lines incident with 7 can be identified with the set of permutations on $\{1, \dots, 6\}$. A plane incident with 7 can be determined by its three lines through 7, which corresponds to a permutation of type 2^3 on $\{1, \dots, 6\}$. Thus the residue at 7 is isomorphic to the GQ $S(6)$ in 1.6.

The group A_7 acts transitively on the set of maximal flags of \mathcal{G} . We can prove that $\text{Aut}(\mathcal{G}) = A_7$. Furthermore, \mathcal{G} is flat (that is, $a * u$ for all points a and all planes u). This actually implies that \mathcal{G} is *not* a building (for another proof of this fact, see [Ro] p.50)

The following theorem due to Tits (and Brouwer and Cohen) characterizes buildings by its diagram (“local structure”). For the precise definitions of diagram and quotients, see [Bu] and [Ro].

2.4 Theorem. (Tits 1981 [Ti2] + Brouwer-Cohen 1983 [BC], see also [Ro] p.47 (4.9)) Assume that \mathcal{G} is an incidence geometry belonging to a diagram Δ which is a Coxeter diagram of type X_n . (This is almost equivalent to saying that every rank-2 residues are generalized polygons.) If Δ does not contain the C_3 -diagram, then \mathcal{G} can be obtained as a quotient of a building of type X_n .

2.5 Meaning of the study of C_3 -geometry. Since all thick buildings belonging to Coxeter diagrams of spherical type of rank ≥ 3 were classified by Tits in 1974 [Ti1], the above theorem 2.4 allows us to obtain quite explicit information on a geometry by simply analyzing its local structures. The above hypothesis on C_3 -diagram is essential, because the sporadic A_7 -geometry in 2.3 is a C_3 -geometry which is not a building. This is why characterization and classification of C_3 -geometry is recognized as one of the main problems in the study of diagram geometry.

3. Characterization of C_3 -geometry.

There are several results on characterizing C_3 -geometry. In this section, we introduce some of them. In the following, \mathcal{G} will denote a C_3 -geometry. I recommend to the readers the nice survey by Lunardon and Pasini [LP2] for more detailed information about the results on C_n -geometries up to 1990.

3.1 Theorem. (Tits 1981 [Ti2], For an elementary proof, see Pasini’s textbook [Pa3] Cor.7.39) If there is at most one line incident with two distinct points, then \mathcal{G} is a building.

Note that the sporadic A_7 -geometry does not satisfy the assumption of this theorem, because there are 5 lines $12i$ ($i = 3, \dots, 7$) through two points 1 and 2.

3.2 Locally finiteness. The geometry \mathcal{G} is locally finite if $x := |\mathcal{G}_0(l)| - 1$ and $y := |\mathcal{G}_2(l)| - 1$ are finite for each line l . The pair (x, y) is called the order of \mathcal{G} . If $x \geq 3$ and $y \geq 3$, \mathcal{G} is called thick. Non-thick C_3 -geometries are characterized by [Re] as quotients of Klein quadrics. Thus from now on we will assume that \mathcal{G} is thick.

It can be verified that the diameter of the collinearity graph of \mathcal{G} is at most 2 [Pa1] p.50 Cor.1. Thus, the locally finiteness implies the finiteness of \mathcal{G} . Furthermore, we can obtain exact formulas on the number of points, lines and planes, in terms of x, y and the following important constant.

3.3 Ott-Liebler number. First we can verify that two distinct planes u and v are incident with at most one line in common. If $\mathcal{G}_1(u) \cap \mathcal{G}_1(v) \neq \emptyset$, we say that u and v are cocollinear and denote by $u \cap v$ the unique line incident with u and v . Whenever we use the notation $u \cap v$, we assume that u is cocollinear with v ($\neq u$). Now for a point-plane flag (a, u) , we set

$$\alpha(a, u) := \{v \in \mathcal{G}_2(a) \mid a \not\star (u \cap v)\}.$$

We can prove that this number does not depend on the particular choice of a point-plane flag [Pa2] Theorem1. The constant $\alpha(a, u)$ will be called the Ott-Liebler number and denoted by α . Ott and Liebler independently tried to analyze the multiplicities of the irreducible representations of the Hecke algebra obtained from \mathcal{G} . They first noticed that these multiplicities are described in terms of x, y and α , but in their work, $\alpha = \alpha(P, u)$ is interpreted as the number of closed galleries of type 012012012 based at a maximal flag (P, l, u) . They derived many divisibility conditions among x, y, α together with the well-definedness of α . The more geometric definition above is due to Pasini, which enables us to verify some results of Ott and Liebler by elementary counting arguments.

Note that if \mathcal{G} is a building, then $\alpha = 0$. Conversely, we may verify that if $\alpha = 0$ then the hypothesis of Theorem 3.1 is satisfied, and therefore \mathcal{G} is a building. For the sporadic A_7 -geometry, we have $\alpha = \alpha(1, \pi) = \#(\text{lines } l \text{ of } \pi \text{ not through } 1) \#(\text{planes through } l \text{ distinct from } \pi) = 4 \cdot 2 = 8$.

3.4 Theorem. (Pasini 1986 [Pa2]4(1)(3)) If \mathcal{G} is locally finite of order (x, y) with the Ott-Liebler number α , \mathcal{G} has $|\mathcal{G}_0| = (x^2 + x + 1)(x^2y + 1)/(\alpha + 1)$ points, $|\mathcal{G}_1| = (x^2 + x + 1)(x^2y + 1)(xy + 1)/(\alpha + 1)$ lines and $|\mathcal{G}_2| = (x^2y + 1)(xy + 1)(y + 1)/(\alpha + 1)$ planes. Furthermore, x divides α .

3.5 Flag-transitivity. So far we do not assume anything on the full automorphism group of \mathcal{G} . If the full automorphism group $Aut(\mathcal{G})$ of \mathcal{G} is transitive on the set of maximal flags, \mathcal{G} is called flag-transitive. The examples in section 2 are both locally finite and flag-transitive. Motivated by exceptional behavior of small Lie type groups, Aschbacher and Steve Smith rediscovered the sporadic A_7 -geometry in 1980. Aschbacher also tried to characterize this geometry by its flag-transitivity:

3.6 Theorem. (Aschbacher 1984 [As]) Let \mathcal{G} be a locally finite, thick, flag-transitive C_3 -geometry. If $Res(u)$ for a plane u is a Desarguesian projective plane and $Res(a)$ for a point a is a thick classical GQ (that is, obtained from the sesquilinear forms on finite vector spaces), then \mathcal{G} is a building or the sporadic A_7 -geometry.

We will call a C_3 -geometry anomalous if it is not a building nor the sporadic A_7 -geometry. We are now in the position to state the following remarkable conjecture.

3.7 Conjecture. There is no locally finite, thick, flag-transitive anomalous C_3 -geometry.

Pasini and Lunardon proved some results generalizing Theorem 3.6, but the complete solution of the conjecture has not yet been obtained.

3.8 Theorem. If \mathcal{G} is a flag-transitive, locally finite, thick, anomalous C_3 -geometry, we have

- (1) (see [LP2] Prop.12) The residue of a plane is non-Desarguesian, and
- (2) (Lunardon and Pasini [LP1]) \mathcal{G} is not flat.

4. A result on C_3 -geometry.

In this section, we will describe a new contribution to the solution of the conjecture above and sketch the outline of the proof. The result, in a sense, solved the conjecture in over the three quarter of the possible cases.

4.1. Theorem. (Yoshiara and Pasini 1993 [YP]) If \mathcal{G} is locally finite, flag-transitive and anomalous, then $Aut(\mathcal{G})$ is non-solvable and y is odd. (x should be even).

It seems unlikely that there exists a generalized quadrangle of order (s, t) with $s - t$ odd. Thus this result forces very restrictive conditions on the structure of the point-residue of \mathcal{G} , which is a GQ of order (x, y) . The author and Antonio Pasini hope the remaining case will be eliminated in near future.

4.2 Relation to the classification of flag-transitive extended dual polar spaces. The author was involved in the study of C_3 -geometry during his classification program of flag-transitive $C_n c^*$ -geometries, so called, the extended dual polar spaces. As for this program and the related results, see the author's survey [Yo2], the paper [Yo1] and the note [PY2]. Here I simply mention the following:

4.3. Theorem. (Yoshiara and Pasini 1993 [YP]) There is no flag-transitive $C_3 c^*$ -geometry \mathcal{H} with C_3 -residues anomalous.

If such geometry exists, we can show that the stabilizer H_P of a point P in the full automorphism group H of \mathcal{H} is solvable. Thus we may apply Theorem 4.1.

4.4 Outline of the Proof of Theorem 4.1. The proof itself is rather short, because we can quote many results established by Lunardon and Pasini together with strong results in group theory. Assume that \mathcal{G} is a flag-transitive, locally finite, thick C_3 -geometry. We denote by $G = Aut(\mathcal{G})$, $G_t :=$ the stabilizer of t in G , and $K_t :=$ the kernel of the action of G_t on the residue $Res(t)$ of $t \in \cup_{i=0}^2 \mathcal{G}_i$.

Most important notion is the following number $n(a, b)$ for two distinct collinear (that is, $\mathcal{G}_1(a) \cap \mathcal{G}_1(b) \neq \emptyset$) points a, b .

$$n(a, b) := \# \text{ lines through } a \text{ and } b.$$

We fix a maximal flag (a, l, u) of \mathcal{G} . We will count the number of triples (v, m, b) in two different ways, where $v \in \mathcal{G}_2(a)$, $a \notin (v \cap u)$, $l \neq m \in \mathcal{G}_1(a)$, $b \in \mathcal{G}_0(l) - \{a\}$ with $b * m * v$. One can then establish the following relation between $n(a, b)$ and the Ott-Liebler number.

$$\alpha = \sum_{b \in \mathcal{G}_0(l) - \{a\}} (n(a, b) - 1).$$

In particular, if we choose a point b on l distinct from a such that $n(a, b)$ is minimum, we have

$$n(a, b) \leq (\alpha/x) + 1.$$

When the upper bound on $n(a, b)$ is attained, the numbers $n(a, c)$ are constant for the points c of $\mathcal{G}_0(l) - \{a\}$. By the flag-transitivity, this implies that the number $n(a, b)$ are constant for any pair of distinct collinear points a, b . Then we can apply the following theorem by Pasini and conclude that \mathcal{G} is not anomalous.

4.5 Theorem. (Pasini 1986 [Pa4] Theorem2) If $n(a, b)$ is constant, then locally finite \mathcal{G} is a building or flat.

4.6 An upper bound of $n(a, b)$. Since (α/x) is an integer by 3.4, we then have

$$n(a, b) \leq (\alpha/x).$$

4.7 Kantor's result on flag-transitive projective planes. Up to here we do not require so much on group theory. Now we need quite strong Kantor's result on flag-transitive projective planes (1987) [Ka], whose proof depends on the classification of finite simple groups to large extent. Since the residue of a plane u is not Desarguesian by Theorem 3.8, Kantor's result implies that $G_u/K_u \cong \text{Frob}_{x^2+x+1}^{x+1}$ acting primitively on $\mathcal{G}_0(u)$, and that $p = x^2 + x + 1$ is a prime with x even.

4.8 The case G is solvable. Using the above information and elementary group theory, we can determine the almost whole shape of G if it is solvable. For the detail, see [YP] Lemma 4.

4.9 Lemma. If G is solvable, there is a system Ω of imprimitivity blocks for G on \mathcal{G}_0 such that

- (1) Ω consists of p blocks of length $(x^2y + 1)/(\alpha + 1)$.
- (2) The kernel of the action of G on Ω is $N := O_{p'}(G)$.
- (3) $G_a N/N \cong (G_{a,u} N/N) \times (G_{a,l} N/N)$.
- (4) There is no pair of collinear points in each block B of Ω .

4.10 Elimination of the solvable G . Now we will derive a contradiction by observing the following objects:

- b : a point on l such that $n(a, b)$ minimum,
- \mathcal{O} : the $N \cap G_a$ -orbit on \mathcal{G}_0 through b ,
- \mathcal{L} : the $N \cap G_a$ -orbit on $\mathcal{G}_1(a)$ through l ,
- $\mathcal{L}(c)$: the lines of \mathcal{L} on a point c ($c \in \mathcal{O}$).

The orbit \mathcal{O} lies in the block B containing b by Lemma 4.9 (2). Calculation using Lemma 4.9 (3) implies $|\mathcal{L}| = xy + 1$. Further, it follows from Lemma 4.9 (4) that each line of \mathcal{L} is incident with a unique point of \mathcal{O} . Thus we have

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{L}(b)||\mathcal{O}|.$$

Since $\mathcal{L}(b)$ consists of lines through a and b , we may apply the upper bound obtained in 4.6. Then we have

$$\begin{aligned} xy + 1 = |\mathcal{L}| &= |\mathcal{L}(b)||\mathcal{O}| \\ &\leq (\alpha/x)((x^2y + 1)/(\alpha + 1)), \end{aligned}$$

a contradiction.

4.11 Elimination of the even y . For y even, we can show that each involution of G stabilizes a unique plane. Then G_u is a strongly embedded subgroup of G . Using the (classical) classification of such groups and the result in the solvable case, we can derive a contradiction.

References

- [As] M. Aschbacher, Finite geometries of type C_3 with flag-transitive automorphism groups, *Geom. Dedicata* **16** (1984) 195–200.
- [Bu] F. Buekenhout, The basic diagram of the geometry, pp.1–29, in *Geometries and Groups*, Lecture Notes in Math. **893**, Springer, 1981.
- [BC] A. Brouwer and A. Cohen, Some remarks on Tits’s geometries, *Indag. Math.* **45** (1983) 393–402.
- [Ka] W. Kantor, Primitive groups of odd degree and an application to finite projective planes, *J. Algebra* **106** (1987) 14–45.
- [LP1] G. Lunardon and A. Pasini, A result on C_3 -geometries, *European J. Combin.* **10** (1989) 265–271.
- [LP2] G. Lunardon and A. Pasini, Finite C_n geometries: a survey, *Note Math.* **10** (1990) 1–35.

- [Pa1] A. Pasini, On certain geometries of type C_n and F_4 , *Discrete Math.* **58** (1986) 45–61.
- [Pa2] A. Pasini, On geometries of type C_3 that are either buildings or flat, *Bull. Soc. Math. Belg. B* **38** (1986) 75–99.
- [Pa3] A. Pasini, to be published.
- [Pa4] A. Pasini, On finite geometries of type C_3 , *Note Math.* **6** (1986) 205–236.
- [PY1] A. Pasini and S. Yoshiara, Flag-transitive Buekenhout geometries, pp. 403–447 in “Combinatorics’90”, *Annals Disc. Math.*, North Holland, 1992.
- [PY2] A. Pasini and S. Yoshiara, Generalized towers of flag-transitive circular extensions of a non-classical C_3 -geometry, to appear in *J. Combin. Th. A*.
- [Re] S. Rees, A classification of a class of C_3 geometries, *J. Combin. Th. A* **44** (1987) 173–181.
- [Ro] M. Ronan, *Lectures on Buildings*, Perspectives in Math. **7**, Academic Press, London, 1989.
- [Ti1] J. Tits, *Buildings of Spherical type and Finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. **386**, Springer, 1974.
- [Ti2] J. Tits, A local approach to buildings, pp.519–547 in *The Geometric Vein*, Springer, 1981.
- [Yo1] S. Yoshiara, On some extended dual polar spaces I, to appear in *European J. Combin.* Vladimir Conference Volume (1993).
- [Yo2] S. Yoshiara, On flag-transitive $C_3.c^*$ -geometries, in the reports of “the conference on Association Schemes”, held at Kyoto University, March, 1993.
- [YP] S. Yoshiara and A. Pasini, On flag-transitive anomalous C_3 -geometries, submitted for publication.

ある可換 Hecke 環の指標表

五味 靖 上智大 理工

§ 0. 序

ここでは、有限 Chevalley 群 G と、その放物型部分群 P_I に関する Hecke 環 $\mathcal{H}(G, P_I)$ が可換環となる場合についてその指標表を計算する。

W を G に対応する Weyl 群とし、 W_I を P_I に対応する W の放物型部分群とする。 $\mathcal{H}(G, P_I)$ を考える上で $\mathcal{H}(W, W_I)$ は重要な役割をはたす。例えば、 $\mathcal{H}(G, P_I) \simeq \mathcal{H}(W, W_I)$ が成り立つことが [C. I. K] の中で示されている。これは $\mathcal{H}(G, B) \simeq \mathbb{C}W$ の一般化になっている。このことより特に、 $\mathcal{H}(G, P_I)$ の可換性については $\mathcal{H}(W, W_I)$ のそれと一致することがわかる。同じく [C. I. K] より、 $\mathcal{H}(G, P_I)$ の指標表に対し、パラメーターとして現れる q に 1 を代入することにより、 $\mathcal{H}(W, W_I)$ の指標表が得られることがわかっている。このようにある指標表と別の指標表とが関係しあっている例は、他にもいろいろとあってその中でも特徴的な

例としては、[B.K.S]の $\mathcal{M}(GL(2n, \mathbb{F}), Sp(2n, \mathbb{F}))$ と $GL(n, \mathbb{F})$ との関係などがある。

§1. で 基本的な準備をし、§2. では G が特に、例外型の場合について計算する。

§1. 準備

G と有限群、 H をその部分群とし、基礎体は複素数体 \mathbb{C} とする。 e を群環 $\mathbb{C}H$ の単位指標に対応する中央元とする。具体的に表わすと、

$$e = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h \in \mathbb{C}H \subset \mathbb{C}G,$$

である。このとき、 $e \mathbb{C}G e$ は、 e を単位元とする $\mathbb{C}G$ の部分環である。これを、 G と H に関する Hecke 環と呼び、 $\mathcal{M}(G, H)$ 又は単に \mathcal{M} と記すことにする。

$$G = \bigsqcup_{i=0}^d \Gamma_i, \quad \Gamma_i = H \mathfrak{f}_i H \quad (0 \leq i \leq d), \quad \mathfrak{f}_0 = 1,$$

と G の H に関する両側分解がされたとする。このとき $a_i := |H|^{-1} \sum_{g \in \Gamma_i} g$, $(0 \leq i \leq d)$, とおけば、 $\{a_0 = e, a_1, \dots, a_d\}$ は $\mathcal{M}(G, H)$ の基底になる。これらを \mathcal{M} の標準基底と呼ぶことにする。そしてこの基底における指標値を計算する。

$\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ が $\mathcal{A}(G, H)$ の基底であることから.

$$a_i a_j = \sum_{k=0}^d P_{ij}^k a_k, \quad P_{ij}^k \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq i, j \leq d,$$

と構造定数をおくことができる.

線型写像 $\zeta: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して.

ζ が \mathcal{A} の一次表現

$$\begin{aligned} \iff & \begin{cases} \zeta(a_0) = 1 \\ \zeta(a_i) \zeta(a_j) = \sum_{k=0}^d P_{ij}^k \zeta(a_k), \quad 0 \leq i, j \leq d. \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (\zeta(a_0), \zeta(a_1), \dots, \zeta(a_d)) \text{ が } B_i := (P_{ij}^k)_{(j,k)} \\ (0 \leq i \leq d), \text{ の固有値 } \zeta(a_i) \text{ に関する共通の固有} \\ \text{vector.} \end{cases} \end{aligned}$$

よって $\{P_{ij}^k\}$ が計算されれば \mathcal{A} の一次表現が計算できることがわかる.

命題 1. 上で現れた記号はそのまま用いる.

$\Omega_i := \Gamma_i / H \quad (0 \leq i \leq d)$ とおくと.

$$P_{ij}^k = |\Omega_i| |\Omega_k|^{-1} |g_i \Omega_j \cap \Omega_k|, \quad 0 \leq i, j, k \leq d.$$

証明) $\Omega_i = \bigsqcup_{e=1}^{|\Omega_i|} g_{ie} H$, $(0 \leq i \leq d)$ とおいたならば.

$$a_i = |\Omega_i| e g_i e = \sum_{e=1}^{|\Omega_i|} g_{ie} e \text{ となることに注意すればよい. //}$$

以下、 G を有限 Chevalley 群、 (W, S) を対応する Weyl 群とする。 $I \subset S$ に対して、 G, W 、それぞれの放物型部分群 P_I, W_I が決まる。 [C.I.K] より 次の二つの定理が成り立つ。
 定理 2. ([C.I.K]) 記号は上の通りとする。

$$\mathcal{H}(G, P_I) \cong \mathcal{H}(W, W_I)$$

定理 3. ([C.I.K]) 記号は上の通りとする。次は同値。

- i) $\mathcal{H}(G, P_I)$ が可換環。
- ii) $\mathcal{H}(W, W_I)$ が可換環。
- iii) D_{II} の各元が *involutive*。

ただし、 $I, J \subset S$ に対して

$$D_{IJ} := \{ w \in W : w \text{ は } W_I w W_J \text{ の中の最短元} \}.$$

共に証明は [C.I.K] を見てもらうことにして省略する。

定理 3 から直ちに次のことがわかる。

系 4. (W, S) が既約 Weyl 群ならば、 $\mathcal{H}(W, W_I)$ が可換環となるには、 W_I が極大放物型部分群でなければならぬ。すなわち、 $|I| = |S| - 1$ でなければならぬ。

証明) $|S-I| \geq 2$ であるならば 次のような列が取れる.

s_0, s_1, \dots, s_k s.t. $|s_i|$ は互いに異なり. $s_0, s_k \in S-I$,

$s_1, \dots, s_{k-1} \in I$, $s_i s_{i+1} \neq s_{i+1} s_i$, $0 \leq i \leq k-1$.

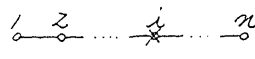
このとき $s_0 s_1 \dots s_k \in D_{II}$ であるが $(s_0 s_1 \dots s_k)^2 \neq 1$ である.


よって定理 3 より $\mathcal{A}(W, W_I)$ は可換環でない. //

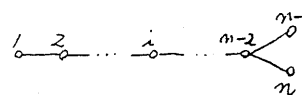
しかし W_I が極大放物型部分群であっても $\mathcal{A}(W, W_I)$ が可換環であるとは限らない. 定理 3 を用いてそれぞれの場合について調べてみると次のような結果を得る.

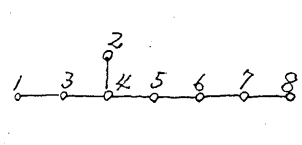
定理 5. 次の場合. 又. そのときの $\mathcal{A}(W, W_I)$ は可換環.

ただし, $I = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_m\} \subset S$ とする.

• A_n 型  $i = 1, 2, \dots, n.$

• $B_n - C_n$ 型  $i = 1, 2, \dots, n.$

• D_n 型  $i = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}], n-1, n.$

• E_n 型  $\begin{cases} i = 1, 2, 6 & n = 6 \\ i = 1, 2, 7 & n = 7 \\ i = 1, 8 & n = 8 \end{cases}$

• F_4 型  $i = 1, 4.$

• G_2 型  $i = 1, 2.$

次の性質はよく知られている。

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{ccccc} D_{IJ} & \xleftrightarrow{1:1} & W_I \backslash W / W_J & \xleftrightarrow{1:1} & P_I \backslash G / P_J \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ w & \longleftrightarrow & W_I w W_J & \longleftrightarrow & P_I w P_J \end{array}$$

さらに次が成り立つ。

$$\textcircled{2} \quad G = \bigsqcup_{w \in D_{\Phi_I}} U_{\bar{w}^{-1}} w P_I$$

右辺の分解は表示に関する一意性を持っている。

ただし、 $w \in W$ に対し、 $U_{\bar{w}} := U \cap U^{w_0 w}$ 、 U は Borel 部分群 B に含まれる極大 unipotent 部分群である。

これらのことから、

$$G/P_I = \bigsqcup_{w \in D_{II}} \Omega_w,$$

$$\Omega_w = P_I w P_I / P_I = \bigsqcup_{\substack{w' \in D_{\Phi_I} \\ w' \in W_I w W_I}} U_{\bar{w}'^{-1}} w' P_I, \quad w \in D_{II}$$

となることがわかる： $|U_{\bar{s}}| = \emptyset$ ($\forall s \in S$) とおけば、

$$|U_{\bar{w}}| = \#\ell(w) \quad \text{となることから} \quad |\Omega_w| = \sum_{\substack{w' \in D_{\Phi_I} \\ w' \in W_I w W_I}} \#\ell(w')$$

構造定数を計算する上で次の命題が有効である。

命題 6. 記号はそのままとする。 $s \in S$ 、 $w \in W$ に対して、

$$s U_{\bar{w}^{-1}} w P_I \subset U_{(s\bar{w})^{-1}} s w P_I \cup U_{\bar{w}^{-1}} w P_I \quad \text{となる。}$$

$\ell(s w) > \ell(w)$ のときは、 $s U_{\bar{w}^{-1}} w P_I \subset U_{(s\bar{w})^{-1}} s w P_I$ が成り立つ。

§ 2. $\mathcal{H}(G, P_I)$ の指標表

ここでは具体的に $\mathcal{H}(G, P_I)$ の指標表を計算してみる。
 G が F_4 型, P_I が C_3 型の場合を例に取ってみる。

E を 4次元 実 Euclid 空間とし, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ を
その正規直交基底とする。 E の中に F_4 型 root 系 Δ と
基本 root 系 Π は 次のように取れる。(c.f. [B])

$$\Delta = \Delta_e \cup \Delta_s,$$

$$\text{ただし, } \Delta_e = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j; 1 \leq i < j \leq 4\},$$

$$\Delta_s = \{\pm \varepsilon_i, \frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4); 1 \leq i \leq 4\}.$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \alpha_3 = \varepsilon_4,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)\}.$$

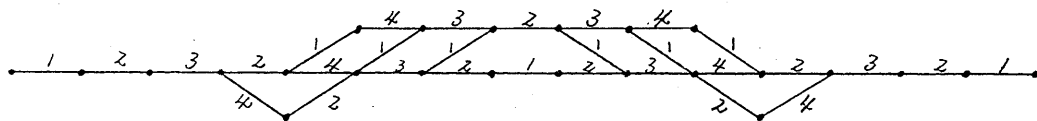
s_i ($1 \leq i \leq 4$) を $\langle \alpha_i \rangle^\perp$ に関する鏡映とし, $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
とおくと, $W = \langle S \rangle$ は F_4 型 Weyl 群である。 $I = \{s_2, s_3, s_4\}$
とおくと, $W_I = \langle I \rangle$ は C_3 型の放物型部分群である。
 Δ_e の元 $\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ を取ると, W が Δ_e に可移に作用
し, ω の固定部分群が W_I であることから $W/W_I \simeq \Delta_e$
であることがわかる。 Δ_e 上の W の作用をみるのに 次のよう

この graph が有効である。

$$\omega = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \xrightarrow{1} \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \xrightarrow{2} \varepsilon_1 + \varepsilon_4 \xrightarrow{3} \varepsilon_1 - \varepsilon_4 \xrightarrow{2} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \cdots$$

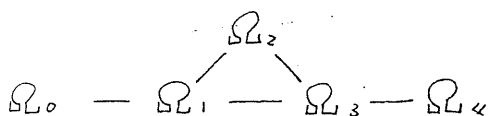
$\swarrow 4$
 $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \cdots$

上の graph で辺の上の添字は S のどの元で移り合っているかを意味している。 Δ_e の元を頂点として graph を完成させると次のようになる。



$W_I \backslash W / W_I$ を考えるとき、 Δ_e の W_I 軌道を見ればよい。

つまり上の graph で 1 以外の添字で結ばれていなければいから、 $|W_I \backslash W / W_I| = 5$ であることがわかる。



そこで G を F_4 型有限 Chevalley 群、 $P_I = BW_I B$ を放物型部分群とし、 $|U_S| = 8$ ($s \in S$) とする。

§1 の準備から各 Ω_i の元の数は上の graph を見て次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
|\Omega_0| &= 1 \\
|\Omega_1| &= 8 + 8^2 + 8^3 + 2 \cdot 8^4 + 8^5 + 8^6 + 8^7 = 8(1+8)(1+8^2)(1+8^3) \\
|\Omega_2| &= 8^5 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10} = 8^5(1+8+8^2)(1+8^3) \\
|\Omega_3| &= 8^8 + 8^9 + 8^{10} + 2 \cdot 8^{11} + 8^{12} + 8^{13} + 8^{14} = 8^8(1+8)(1+8^2)(1+8^3) \\
|\Omega_4| &= 8^{15}
\end{aligned}$$

又、命題 6 より $|\Omega_i \cap \Omega_k|$ は 次のようになる。

$$(|\Omega_i \cap \Omega_k|)_{(i,k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8(1+8)(1+8^2)-1 & 8^4(1+8+8^2) & 8^7 & 0 \\ 0 & 8^4(1+8+8^2) & 8^4(8^3-1) & 8^8(1+8+8^2) & 0 \\ 0 & 8^7 & 8^8(1+8+8^2) & 8^{11}(2+8+8^2)-8^7 & 8^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 8^{14} & 8^{14}(8-1) \end{pmatrix}$$

すると、命題 1 から $B_1 = (P_{i\bar{j}}^k)_{(i,k)}$ は 次の通りである。

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8(1+8)(1+8^2)(1+8^3) & 8(1+8)(1+8^2)-1 & (1+8)(1+8^2) & 1 & 0 \\ 0 & 8^4(1+8+8^2) & 8^4-1 & 8(1+8+8^2) & 0 \\ 0 & 8^7 & 8^4(1+8)(1+8^2) & 8^4(2+8+8^2)-1 & (1+8)(1+8^2)(1+8^3) \\ 0 & 0 & 0 & 8^7 & (8^4-1)(1+8^3) \end{pmatrix}$$

B_1 の固有値を計算すると $\{8(1+8)(1+8^2)(1+8^3), (1+8)(1+8^2)(-1+8+8^2), 8^4-1, -(8^3+1), -(1+8^2)(1+8^3)\}$ であり互いに相異なっていることがわかる。 $\mathcal{M}(G, P_I)$ の指標値は、 $\{B_i\}_{0 \leq i \leq 4}$ の共通の固有 vector を求めることで得られることがわかっていたが、この場合は実は B_1 の固有 vector を求めることのみでよい。

ことがわかる。よって $\mathcal{H}(G, P_1)$ の指標表 $(S_i(a_j))_{(i,j)}$ は次の通りである。

$$\begin{pmatrix} 1 & q(1+q)(1+q^2)(1+q^3) & q^5(1+q+q^2)(1+q^3) & q^{10}(1+q)(1+q^2)(1+q^3) & q^{15} \\ 1 & (1+q)(1+q^2)(1+q+q^2) & q^2(q-1)(1+q+q^2)^2 & q^4(1+q)(1+q^2)(-1-q+q^2) & -q^7 \\ 1 & (q-1)(1+q)(1+q^2) & -q^3(1+q) & q^3(q-1)(1+q)(1+q^2) & q^7 \\ 1 & -(1+q^3) & 0 & q^3(1+q^3) & -q^6 \\ 1 & -(1+q^2)(1+q^3) & q^2(1+q+q^2)(1+q^3) & -q^4(1+q^2)(1+q^3) & q^9 \end{pmatrix}$$

他の場合については結果のみ書くことにする。便宜上次の記号を用いる。

$\phi_d = d$ 次 の 円分多項式

$$[n] = \frac{(q)_n}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}}, \quad [n_1, n_2, \dots, n_r] = \frac{(q)_n}{(q)_{n_1}(q)_{n_2} \cdots (q)_{n_r}},$$

$$\text{ただし, } (q)_n = (1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n).$$

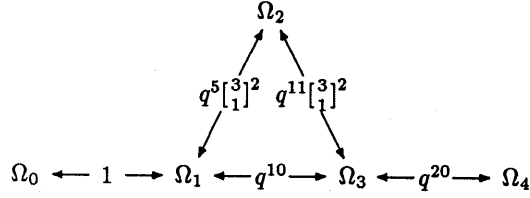
それぞれの場合についている graph の Ω_j は 両側類を意味するものとし、 $\Omega_j \leftarrow \alpha \rightarrow \Omega_k$ の α は

$$\alpha = |S_i \Omega_j \cap \Omega_k|, \quad \text{ただし } S_i \in S-1,$$

とする。

指標表の 1 行目は index 表現である。(7)。 $(|\Omega_1|, |\Omega_2|, \dots, |\Omega_d|)$ になっている。

(E₆/A₅)

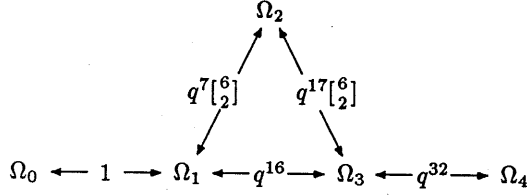


$$\begin{pmatrix}
 1 & q\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6 & q^6\phi_2\phi_3\phi_5\phi_6 & q^{11}\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6 & q^{21} \\
 1 & (q\phi_2 - 1)\phi_4\phi_5 & q^3\phi_1\phi_3^2\phi_5 & q^7(q^2 - \phi_2)\phi_4\phi_5 & -q^{15} \\
 1 & (q^4\phi_2 - 1)\phi_4 & q^2(\phi_9 - q\phi_5) & -q^5(q^5 - \phi_2)\phi_4 & q^{12} \\
 1 & q^3\phi_1\phi_2 - \phi_4 & -q^2\phi_1\phi_3^2 & q^4(q^3\phi_4 + \phi_1\phi_2) & -q^9 \\
 1 & -\phi_2\phi_4\phi_6 & q^2\phi_2\phi_3\phi_6 & -q^4\phi_2\phi_4\phi_6 & q^9
 \end{pmatrix}$$

(E₆/D₅) $\Omega_0 \longleftarrow 1 \longrightarrow \Omega_1 \xleftarrow{q^7 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}} \Omega_2$

$$\begin{pmatrix}
 1 & q\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & q^8\phi_5\phi_8 \\
 1 & (q\phi_8 - 1)\phi_2\phi_4 & -q^4\phi_5 \\
 1 & -\phi_2\phi_6 & q^3
 \end{pmatrix}$$

(E₇/D₆)

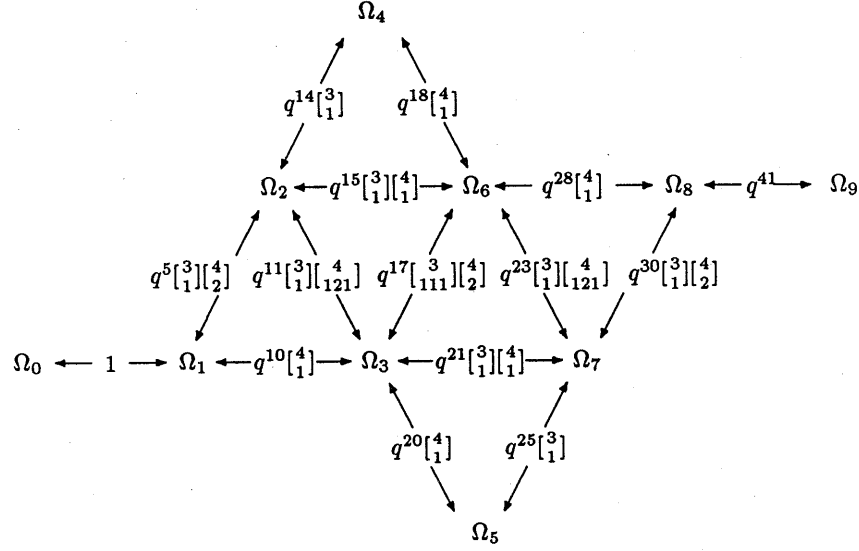


$$\begin{pmatrix}
 1 & q\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8\phi_{10} & q^8\phi_2\phi_3\phi_5\phi_6\phi_8\phi_{10} & q^{17}\phi_2^3\phi_4\phi_6\phi_8\phi_{10} & q^{33} \\
 1 & (q\phi_4 - 1)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & q^4\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6\phi_8 & q^{11}(q^3 - \phi_4)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & -q^{24} \\
 1 & (q^5\phi_4 - \phi_{10})\phi_2^2\phi_6 & q^3(\phi_1^2\phi_3^2\phi_6 - q\phi_{14})\phi_2\phi_5 & -q^8(q^3\phi_{10} - \phi_4)\phi_2^2\phi_6 & q^{19} \\
 1 & (q^2\phi_{12} - \phi_2\phi_6)\phi_4 & -q^3\phi_1\phi_3\phi_5\phi_6 & q^7(q^3\phi_2\phi_6 - \phi_{12})\phi_4 & -q^{15} \\
 1 & -\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^3\phi_2\phi_3\phi_6\phi_{10} & -q^7\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^{15}
 \end{pmatrix}$$

(E₇/E₆) $\Omega_0 \longleftarrow 1 \longrightarrow \Omega_1 \xleftarrow{q^9 \phi_8 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}} \Omega_2 \xleftarrow{q^{26}} \Omega_3$

$$\begin{pmatrix}
 1 & q\phi_3^2\phi_6^2\phi_9\phi_{12} & q^{10}\phi_3^2\phi_6^2\phi_9\phi_{12} & q^{27} \\
 1 & (q^2\phi_2 - 1)\phi_3\phi_6\phi_9 & q^5(q^3 - \phi_2)\phi_3\phi_6\phi_9 & -q^{18} \\
 1 & q^9 - \phi_8 & q^4(1 - q^5\phi_8) & q^{13} \\
 1 & -\phi_3\phi_6\phi_{12} & q^4\phi_3\phi_6\phi_{12} & -q^{12}
 \end{pmatrix}$$

(E₇/A₆)

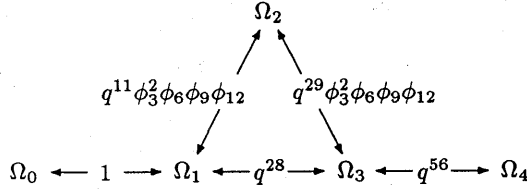


1	$q\phi_5\phi_6\phi_7$	$q^6\phi_3\phi_5\phi_6\phi_7$	$q^{11}\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7$
1	$(q^2\phi_2\phi_3 - 1)\phi_5\phi_6$	$q^3(q^3\phi_2 - 1)\phi_3^2\phi_5\phi_6$	$q^7(q^4 + \phi_1\phi_2^3\phi_4)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6$
1	$(q\phi_4 - 1)(q^2\phi_2 + 1)\phi_5$	$q^2(\phi_{18} - q\phi_4\phi_6 + 2q^7\phi_3)\phi_5$	$q^5(q^3 + \phi_1)(q^5 - \phi_2)\phi_2\phi_4\phi_5$
1	$q^5\phi_3^2 + q^3\phi_1\phi_2 - \phi_4$	$q^2(q^6\phi_4 - q^3\phi_3 - \phi_1)\phi_3^2$	$q^4(q^7\phi_3^2 - q^5\phi_2^3\phi_3 + q^2(q + 3)\phi_2 - 1)\phi_4$
1	$(q^3\phi_2 - 1)\phi_5\phi_6$	$q^2(\phi_2\phi_{10} - q\phi_3)\phi_3\phi_5\phi_6$	$q^5(\phi_{18} - q\phi_1\phi_3)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6$
1	$q^7\phi_2 + q^2\phi_1\phi_3^2 - 1$	$q^2(q^2\phi_2 - 1)(q\phi_6 - \phi_4)\phi_3^2$	$q^4(q^3 - \phi_2)(q^4\phi_1\phi_2 - \phi_1\phi_3 - q^2\phi_2\phi_4)\phi_4$
1	$(q^5\phi_3 - \phi_2\phi_4)\phi_6$	$q^2(q^8 - q^3\phi_2\phi_3 + \phi_2)\phi_3\phi_6$	$-q^4(q^2\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 - 1)\phi_2\phi_4\phi_6$
1	$\phi_1\phi_7 - q^2\phi_3$	$-q^2(q^6\phi_2 + q^3\phi_3 - \phi_5 - q^2)$	$-q^4(\phi_4\phi_{12} - q\phi_3)\phi_2\phi_4$
1	$-\phi_5\phi_6$	$q^2\phi_3^2\phi_6$	$q^4(q^3 - \phi_2)\phi_2\phi_4\phi_6$
1	$-\phi_6\phi_7$	$q^2\phi_3\phi_6\phi_7$	$-q^4\phi_2\phi_4\phi_6\phi_7$

$q^{15}\phi_7$	$q^{21}\phi_7$	$q^{16}\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7$
$q^{10}(q^5\phi_2\phi_4 - \phi_3)$	$q^{15}(q^6\phi_3 - \phi_2\phi_4)$	$q^{11}(\phi_1\phi_2^3\phi_4 - q^2)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6$
$q^7(q^9 + \phi_{16} - q^3\phi_2\phi_4)$	$q^{12}(q\phi_{16} - q^3\phi_2\phi_4 + 1)$	$q^8(q^2\phi_1 - 1)(q^4\phi_2 - 1)\phi_2\phi_4\phi_5$
$q^7(q^8 - \phi_1\phi_3^2)$	$-q^9(q^3\phi_1\phi_3^2 + 1)$	$q^7(q^{11} - q^7(3q + 1)\phi_2 + q\phi_2^2\phi_3 - \phi_3^2)\phi_4$
$-q^6(q^4\phi_2\phi_3\phi_6 + 1)$	$q^{12}(q^9 + \phi_2\phi_3\phi_6)$	$-q^7(\phi_{18} + q^2\phi_1\phi_3)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6$
$-q^6(q^2\phi_2 - 1)(q^2\phi_4 - 1)$	$-q^9(q^3 - \phi_2)(q^3 - \phi_4)$	$q^6(q^2\phi_2 - 1)(q\phi_2\phi_4 - q^3\phi_1\phi_3 + \phi_1\phi_2)\phi_4$
$q^7(q^8 + \phi_2\phi_3\phi_6)$	$q^9(q^3\phi_2\phi_3\phi_6 + 1)$	$-q^7(q^8 - \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4)\phi_2\phi_4\phi_6$
$q^6(q^2\phi_2 - 1)$	$q^{10}(q^3 - \phi_2)$	$q^6(\phi_4\phi_{12} - q\phi_3)\phi_2\phi_4$
$-q^6$	$-q^{12}$	$-q^6(q^2\phi_2 - 1)\phi_2\phi_4\phi_6$
$-q^6\phi_7$	$q^9\phi_7$	$q^6\phi_2\phi_4\phi_6\phi_7$

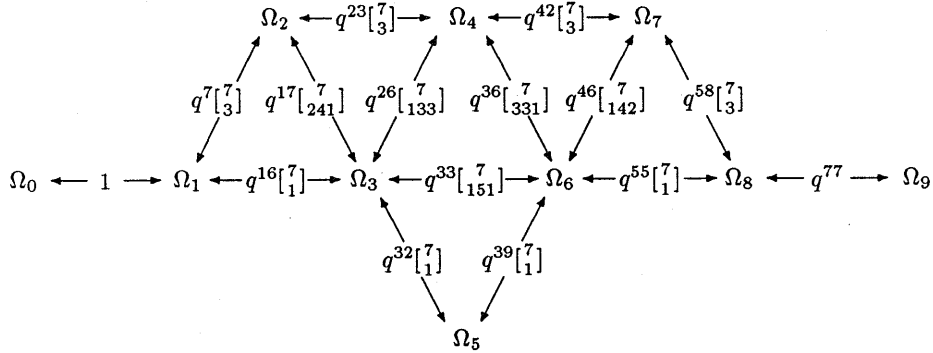
$$\begin{array}{lll}
q^{22}\phi_3\phi_5\phi_6\phi_7 & q^{29}\phi_5\phi_6\phi_7 & q^{42} \\
q^{16}(q^4 - \phi_2)\phi_3^2\phi_5\phi_6 & q^{22}(q^5 - \phi_2\phi_3)\phi_5\phi_6 & -q^{33} \\
q^{13}(q^3\phi_{18} - q^4\phi_4\phi_6 + 2\phi_3)\phi_5 & q^{18}(\phi_4 - q^3)(\phi_2 + q^3)\phi_5 & q^{28} \\
-q^{10}(q^7\phi_1 - q^3\phi_3 + \phi_4)\phi_3^2 & q^{15}(q^7\phi_4 + q^4\phi_1\phi_2 - \phi_3^2) & -q^{24} \\
q^{12}(q^2\phi_3 - \phi_2\phi_{10})\phi_3\phi_5\phi_6 & q^{17}(q^4 - \phi_2)\phi_5\phi_6 & -q^{27} \\
q^9(q^3 - \phi_2)(q\phi_4 - \phi_6)\phi_3^2 & -q^{13}(q^8 - q\phi_1\phi_3^2 - \phi_2) & q^{21} \\
q^{10}(q^7\phi_2 - q^2\phi_2\phi_3 + 1)\phi_3\phi_6 & -q^{15}(q^4\phi_2\phi_4 - \phi_3)\phi_6 & q^{24} \\
-q^{10}(q^3\phi_5 - \phi_2 - \phi_3 + q^5) & q^{12}(\phi_1\phi_7 + q^3\phi_3) & -q^{19} \\
q^{10}\phi_3^2\phi_6 & -q^{12}\phi_5\phi_6 & q^{18} \\
-q^9\phi_3\phi_6\phi_7 & q^{13}\phi_6\phi_7 & -q^{21}
\end{array}$$

(E_8/E_7)



$$\left(\begin{array}{llll}
1 & q\phi_2^3\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{14}\phi_{18} & q^{12}\phi_2\phi_3\phi_6\phi_7\phi_9\phi_{12}\phi_{14}\phi_{18} & q^{29}\phi_2^3\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{14}\phi_{18} & q^{57} \\
1 & (q^2\phi_2 - 1)\phi_2^2\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{14} & q^6\phi_1\phi_2\phi_3^2\phi_6\phi_7\phi_9\phi_{12}\phi_{14} & q^{19}(q^3 - \phi_2)\phi_2^2\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{14} & -q^{42} \\
1 & (q^9\phi_3 - \phi_{18})\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^5(\phi_6\phi_{18} - q^3\phi_4)\phi_2\phi_3\phi_6\phi_9\phi_{12} & -q^{14}(q^5\phi_{18} - \phi_3)\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^{33} \\
1 & q^9\phi_1\phi_5 - \phi_2\phi_{10} & -q^5\phi_1\phi_3^2\phi_6\phi_9\phi_{12} & q^{13}(q^9\phi_2\phi_{10} + \phi_1\phi_5) & -q^{27} \\
1 & -\phi_2^2\phi_6\phi_{10}\phi_{18} & q^5\phi_2\phi_3\phi_6^2\phi_{12}\phi_{18} & -q^{13}\phi_2^2\phi_6\phi_{10}\phi_{18} & q^{27}
\end{array} \right)$$

(E_8/D_7)



$$\left(\begin{array}{ll} 1 & q\phi_2^3\phi_4^2\phi_6\phi_8\phi_{10}\phi_{12} & q^8\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10}\phi_{12} \\ 1 & (q^2\phi_2\phi_4 - 1)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8\phi_{10} & q^4(q^4\phi_2 - 1)\phi_2\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10} \\ 1 & (q^6\phi_2 + \phi_1)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & q^3(q^9\phi_3 - \phi_1\phi_2^2\phi_{10} - q\phi_4)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_8 \\ 1 & (q^7\phi_2\phi_5\phi_6 + \phi_1\phi_2\phi_8 - q^3)\phi_4 & q^3(q^7(q^5 - \phi_1^2)\phi_2^2 - q^2(2q^2 + 1)\phi_2 + 1)\phi_4\phi_5\phi_6 \\ 1 & (\phi_1\phi_2\phi_4\phi_8 + q\phi_{18})\phi_2^2\phi_4\phi_6 & q^3(q^2\phi_2 - 1)(q\phi_{18} - \phi_4)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6 \\ 1 & (q^7\phi_2 - 1)\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^3(\phi_{22} - q^3\phi_8)\phi_2^2\phi_5\phi_6\phi_{10} \\ 1 & (q^4\phi_3 + 1)\phi_1\phi_2^2\phi_4\phi_6 & q^3(q^7\phi_1\phi_3 - q^7\phi_4 + \phi_{10})\phi_2\phi_5\phi_6 \\ 1 & (q^6\phi_1 - \phi_{10})\phi_2^2\phi_6 & -q^3(\phi_1\phi_3\phi_6\phi_7 + 2q^6)\phi_2\phi_6 \\ 1 & -(q^3\phi_4 + 1)\phi_4\phi_{12} & q^3\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{12} \\ 1 & -\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_{10}\phi_{12} & q^3\phi_2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{12} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} q^{17}\phi_2^3\phi_4^2\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10}\phi_{12} & q^{24}\phi_2^2\phi_4\phi_5\phi_6^2\phi_7\phi_8\phi_{10}\phi_{12} \\ q^{11}(q^4\phi_2\phi_4 - \phi_3)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10} & q^{17}\phi_1\phi_2^4\phi_4\phi_5\phi_6^2\phi_7\phi_8\phi_{10} \\ q^8(q^{12}\phi_5 + q^{14}\phi_2 - q^3\phi_4\phi_5 - 2q^8 + \phi_3)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & q^{13}(\phi_9\phi_{18} + q\phi_4\phi_{20} - q^3\phi_3\phi_8)\phi_2^2\phi_4\phi_5\phi_6^2\phi_8 \\ q^7(q^{22}\phi_2 + q^9(q^9 - \phi_5)\phi_2^3 - 2q^5(q^3 - \phi_2)\phi_2 + q\phi_3^2 - \phi_2)\phi_4 & q^{11}(\phi_2^2\phi_6\phi_{30} - q^4\phi_5^2 - q^3\phi_4\phi_{20})\phi_1\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6 \\ q^7(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_{22} - q^8\phi_2^3 + q^3\phi_5 + 2q^5)\phi_2^2\phi_4\phi_6 & q^{10}(q^3 - \phi_2)(q^2\phi_2 - 1)(\phi_3\phi_6 - 2q\phi_4)\phi_2^2\phi_4\phi_5\phi_6^2 \\ q^7(q^{16}\phi_2 - q^2(\phi_1\phi_7 - q)\phi_2\phi_3\phi_6 - 1)\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & -q^{11}(\phi_1^2\phi_2^2\phi_7 - q^5)\phi_2^2\phi_4\phi_5\phi_6^2\phi_{10} \\ -q^7(q^2\phi_2 - 1)(q^7 - \phi_3\phi_6)\phi_2^2\phi_4\phi_6 & -q^{10}(\phi_{18} - q^2\phi_3)\phi_1\phi_2^2\phi_4\phi_5\phi_6^2 \\ q^7(q^7\phi_2 + q^3\phi_{10} - \phi_4)\phi_2^2\phi_6 & q^{10}(q^2\phi_2 - 1)(q^3 - \phi_2)\phi_2^2\phi_4\phi_6^2 \\ -q^7\phi_4\phi_7\phi_{12} & -q^{10}\phi_1\phi_2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{12} \\ -q^7\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{12} & q^{10}\phi_2^2\phi_4\phi_6^2\phi_7\phi_{10}\phi_{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} q^{33}\phi_4\phi_7\phi_{12} & q^{34}\phi_2^3\phi_4^2\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10}\phi_{12} \\ q^{24}\phi_1\phi_3\phi_7\phi_9 & q^{25}(q^5\phi_3 - \phi_2\phi_4)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10} \\ q^{19}(\phi_2^2\phi_{26} - q^3\phi_{16} - q^6\phi_3)\phi_4 & q^{20}(q^{14}\phi_3 - q^7\phi_4\phi_5 - 2q^8 + q\phi_2 + \phi_5)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 \\ q^{15}(\phi_4\phi_{20} - q^2\phi_9)\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6 & q^{16}(q^{22}\phi_2 - 2q^{14}(q^2\phi_2 - 1)\phi_2 - q^{18}\phi_3^2 + q^2(q^5\phi_5 - 1)\phi_2^3 - \phi_2)\phi_4 \\ -q^{15}(\phi_2^2\phi_6\phi_{18} - q^4\phi_3)\phi_4 & -q^{15}(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_{22} - q^7\phi_5 + q^3\phi_2^3 - 2q^9)\phi_2^2\phi_4\phi_6 \\ q^{15}(\phi_4\phi_{28} + q^5\phi_5)\phi_8 & -q^{16}(q^{17} - q^3(\phi_1\phi_7 + q^6))\phi_2\phi_3\phi_6 - \phi_2)\phi_2^2\phi_6\phi_{10} \\ q^{16}\phi_1\phi_3\phi_5 & q^{16}(q^3 - \phi_2)(q^3\phi_3\phi_6 - 1)\phi_2^2\phi_4\phi_6 \\ -2q^{18} & -q^{17}(q^6\phi_4 + q\phi_{10} + \phi_2)\phi_2^2\phi_6 \\ 0 & q^{17}\phi_4\phi_7\phi_{12} \\ q^{15}\phi_4\phi_7\phi_{12} & -q^{15}\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} q^{43}\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10}\phi_{12} & q^{56}\phi_2^3\phi_4^2\phi_6\phi_8\phi_{10}\phi_{12} & q^{78} \\ q^{33}(q^5 - \phi_2)\phi_2\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8\phi_{10} & q^{44}(q^5 - \phi_2\phi_4)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8\phi_{10} & -q^{63} \\ q^{27}(q^4\phi_1\phi_2^2\phi_{10} - q^8\phi_4 + \phi_3)\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6\phi_8 & -q^{37}(q^6\phi_1 - \phi_2)\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_8 & q^{54} \\ -q^{23}(q^{14} - q^7(q^4 + 2)\phi_2 - (q^3\phi_1^2 - 1)\phi_2^2)\phi_4\phi_5\phi_6 & q^{32}(q^{11} + q^8\phi_1\phi_2\phi_8 - \phi_2\phi_5\phi_6)\phi_4 & -q^{48} \\ q^{20}(q^3 - \phi_2)(q^5\phi_4 - \phi_{18})\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6 & -q^{28}(\phi_1\phi_2\phi_4\phi_8 - q\phi_{18})\phi_2^2\phi_4\phi_6 & q^{42} \\ q^{23}(\phi_{22} - q^3\phi_8)\phi_2^2\phi_5\phi_6\phi_{10} & -q^{32}(q^8 - \phi_2)\phi_2^2\phi_6\phi_{10} & q^{48} \\ -q^{19}(q^6\phi_{10} + q\phi_4 + \phi_1\phi_3)\phi_2\phi_5\phi_6 & q^{26}(q^6 + \phi_3)\phi_1\phi_2^2\phi_4\phi_6 & -q^{39} \\ q^{19}(\phi_1\phi_3\phi_6\phi_7 + 2q^5)\phi_2\phi_6 & -q^{25}(q^3\phi_{10} + \phi_1)\phi_2^2\phi_6 & q^{36} \\ -q^{19}\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{12} & q^{25}(q^5 + \phi_4)\phi_4\phi_{12} & -q^{36} \\ q^{20}\phi_2\phi_4\phi_6\phi_7\phi_{10}\phi_{12} & -q^{28}\phi_2^2\phi_4\phi_6\phi_{10}\phi_{12} & q^{42} \end{array}$$

$$(G_2/A_1) \quad \Omega_0 \longleftarrow 1 \longrightarrow \Omega_1 \longleftarrow q^2 \longrightarrow \Omega_2 \longleftarrow q^4 \longrightarrow \Omega_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & q\phi_2 & q^3\phi_2 & q^5 \\ 1 & 2q-1 & q(q-2) & -q^2 \\ 1 & -1 & -q^2 & q^2 \\ 1 & -\phi_2 & q\phi_2 & -q^2 \end{pmatrix}$$

References

- [A] D.Alvis, Induced/Restrict matrices for exceptional Weyl groups, preprint M.I.T., (1981).
- [B] N.Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. 4,5,6, Paris, Hermann, 1968.
- [B.K.S] E.Bannai, N.Kawanaka and S.Y.Song, The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL(2n,q), Sp(2n,q))$, J. Algebra, 129 (1990), 320-366.
- [C.I.K] C.Curtis, N.Iwahori and R.Kilmoyer, Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B,N)-pairs, Publ. Math. I.H.E.S., 40 (1971), 81-116.
- [C.R.1] C.Curtis and I.Reiner, Methods of representation theory vol.I, Wiley Intersciences, 1981.
- [C.R.2] C.Curtis and I.Reiner, Methods of representation theory vol.II, Wiley Intersciences, 1987.
- [D.1] C.F.Dunkl, An addition theorem for Hahn polynomials: the spherical functions, SIAM J. Math. Anal., 9 (1978), 627-637.
- [D.2] C.F.Dunkl, An addition theorem for some q-Hahn polynomials, Monatshefte für Math., 85 (1977), 5-37.
- [D.3] C.F.Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath products of symmetric groups, Indiana Univ. Math. J., 25(1976), 335-358.
- [G.1] Y.Gomi, Character tables of commutative Hecke algebras associated with exceptional Weyl groups, to appear.
- [G.2] Y.Gomi, Character tables of commutative Hecke algebras associated with finite Chevalley groups of exceptional type, preprint.
- [S] D.Stanton, Some q-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups, Amer. J. Math., 102 (1980), 625-662.

ムーンシャイン加群上の 21 元生成コクスター群

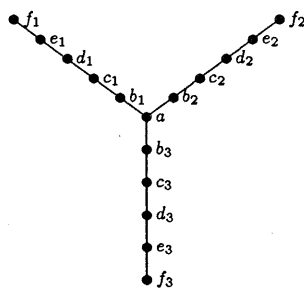
宮本雅彦 愛媛大学理学部

1993 年 6 月

1 序文

1973 年に Fischer と Griess によって独立に存在が予想され後に Griess によって存在が証明された最大位数の散在単純群 "モンスター M" は 196883 次元の最小の忠実な表現を持っている。この次元と古典的モジュラー関数 $j(z)$ をローレンチアン展開したときの $e^{2\pi iz}$ の係数が一つしか違わない (他の係数も関係している) という事に McKay が気づいたのが、その後のモンスター単純群とモジュラー関数との間の幾つもの神秘的な関係を示唆した Conway と Norton によるムーンシャイン予想の開幕であった。色々な候補の後に、Frenkel, Lepowsky, と Meurman の 3 人は、ムーンシャイン加群と呼ばれる 24 次元のツイストされた共形場理論を構成し、その自己同型がモンスター単純群となることを証明し、この神秘的な一致に対する解答を与えた。これにより、ムーンシャイン予想の問題は単純群とモジュラー関数の関係に留まらず、リー代数、素粒子理論、弦理論等をも含む大きな問題となった。

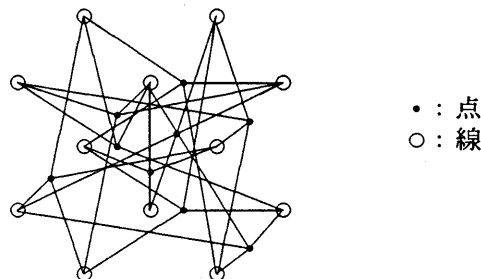
しかしながら、この構成において、モンスター単純群はある位数 2 (involution) θ の中心化群 $C_M(\theta)$ に トライアリティと呼ばれる位数 2 (または位数 3) の元を添加して構成されており、モンスター群の他の部分群の作用を見るのは難しくなっている。一方、モンスター単純群の巨大な位数 (ほぼ 10^{54}) にも関わらず、Conway が予想したように、Ivanov と Norton は $Y_{5,5,5}$ -diagram のコクスター関係



にもう一つの関係式 $(ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10}$ を加えるだけでパイモンスターと呼ばれるモンス

ター群 M のリース積 $M \setminus Z_2$ の表現になっていることを証明した。この問題に関連して、Conway, Norton, と Soicher はパイモンスターが 26 個の位数 3 の射影平面の 13 点と 13 線に対応している 26 個の involutions でこの隣接行列のコクスター関係を満足するものがパイモンスターを生成していることを証明した。しかも、パイモンスターはこの図の自己同型をすべて自分の自己同型として持っている。

26 個の involutions はすべてパイモンスターの中の 2 つのモンスター群を交換しているので、モンスター群を取り出すために、1 線の中心化群を求める。すなわち、1 線とそれと隣接している 4 点を除いて、9 点と 12 線からなる図を考える。これは丁度位数 3 のアファイン平面の点と線の関係になっている。これを 21 点システムと呼ぶことにする。この時、図の自己同型群はアファイン平面の同相写像全体と一致する。



モンスター単純群のいくつかの部分群がこれらの involutions によって表示されるので、Frenkel, Lepowsky, Meurman によって定義されたモンスター群よりも扱い易い方法である。これが我々の最初の動機であったが、ここで得たものはそれだけに留まっていない。21 個の involutions を我々は 26 次元の even unimodular Lorentzian lattice のいくつかの deep hole isotropic elements (d.h.i.) を同時に使って構成している。しかもムーンシャイン加群を構成するのにもっとも重要なリーチラティスの新しい基底 (実数上のベクトル空間に埋め込んで) を得ている。我々の構成は不思議なほど自然であり、モンスター単純群と Lorentzian lattice との間の別の神秘的関係を示唆しているように思われる。

ムーンシャイン加群に対する用語は全て [5] を、d.h.i. に関しては [8] を参照すること。

2 構成

2.1 d.h.i.

L で 26 次元の even unimodular Lorentzian lattice $\Pi_{25,1}$ を表わす。 L はリーチラティス Λ と 2 次元の even unimodular Lorentzian lattice U とによる直交分解 $\Lambda \oplus U$ を持つ。上の分解を使って L の座標を

$$(\alpha, m, n) \quad \alpha \in \Lambda, m, n \in \mathbb{Z}$$

と書く。内積は

$$(\alpha, m, n) \cdot (\beta, s, t) = \alpha \cdot \beta - mt - ns.$$

で与えられている。 z で元 $(0, 0, 1)$ を表し、この元を使って $x \cdot z < 0$ の時、 x を正 (の元) と呼ぶことにする。元 $\beta \in \Lambda$ に対して、写像

$$s(\beta) : (\alpha, m, n) \rightarrow (\alpha + m\beta, m, n + \alpha \cdot \beta - m \frac{\beta^2}{2})$$

は L の同相写像であり、これを translation と呼ぶことにする。

リーチラティス Λ の全ての元 α に対して、 $v_\alpha = (\alpha, 1, \frac{\alpha^2}{2} - 1)$ はルート (ノルム 2) であり、これをリーチルートと呼ぶ。リーチルートの集合は Lorentzian lattice の基本ルート系のような働きをしている。

最初の目標は後に述べる 21 個の involutions の構成の基礎となるべきダイアグラムをリーチルートを使って構成することである。このダイアグラムを構成するために [8] で導入した d.h.i. とリーチグルールートが必要となる。これからはダイアグラムの頂点はすべてリーチルートを表すものとし、隣接関係はすべてリーチルート同士の内積を表しているとする。

[8] に載っていない性質を一つ挙げる。

補題 1 w を \hat{T} 型の d.h.i.、 T をその正直デンキンダイアグラムとし、 n を T の隣接行列の行列式とする。この時、丁度 \sqrt{n} 個のリーチグルールートが存在する。

2.2 A_1 -ダイアグラムと直交基底

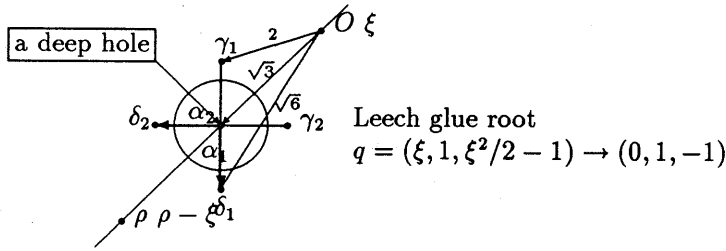
我々の構成において A_1 -ダイアグラムは重要な役割を果たす。各 point-involution を定義するのに [5] のトライアリティの定義を使うわけだが、その時リーチラティスの直交座標を使っている。それ故、ここでは 9 つの point-involutions を定義するので、9 つの異なる直交座標を必要とする。2 つのリーチラティスから成る A_1 -ダイアグラムがそれぞれ直交基底を定義することを示そう。

s, p を内積 $s \cdot p = -2$ を満たすリーチルートとする。この時、 $w = s + p$ は A_1^{24} 型の d.h.i. であり、故に w^\perp は互いに直交している 24 組のリーチルートの対 A_1 -ダイアグラム

$$\{x_i = (\delta_i, 1, \frac{\delta_i^2}{2} - 1), y_i = (\gamma_i, 1, \frac{\gamma_i^2}{2} - 1) : i = 1, \dots, 24\},$$

を含んでいる。ここで $i \neq j$ に対して $x_i \cdot y_i = -2$ 、 $x_i \cdot x_j = x_i \cdot y_j = y_i \cdot y_j = 0$ である。 $q \cdot p = -1$ を満足する、リーチグルールート $q = (\xi, 1, \xi^2/2 - 1)$ を一つ固定する。ここで、 $q \cdot x_i = -1$ 且つ $q \cdot y_i = 0$ と仮定して良い。 x_i に 0, -1 to y_i に -1 を対応させると全てのリーチグルールートは各連結成分の丁度 1 つの頂点と隣接しているので 24 次元の $\{0, 1\}$ -コードワードに対応する。このコードワード全体の集合はゴレイコード C_{24} に成っている。

重要なことは 集合 $\alpha_i = \delta_i - (\delta_i + \gamma_i)/2$ がノルム 2 の直交基底と成っている事である。



故にリーチラティス Λ は次の表示を持っている。

$$(1.1) \quad \Lambda = \sum_{C \in C_{24}} Z \frac{1}{2} \alpha_C + \sum_k Z \left(\frac{1}{4} \alpha_\Omega - \alpha_k \right),$$

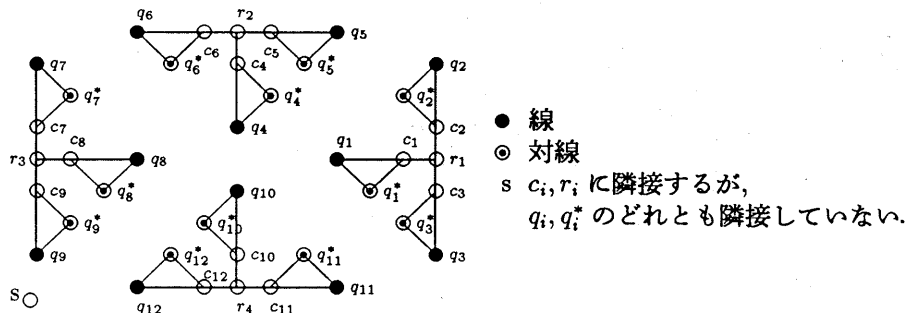
ここで $\Omega = \{1, \dots, 24\}$ で $\frac{1}{2} \alpha_\Omega = \rho$ とする。もし、 $q \cdot p = -1$ を満たす別のリーチグルールート q' を取ると、 p 以外の頂点のラベルを変えるが、それは単に座標の正負を変えるにすぎない。前に述べたように、各リーチグルールートはゴーレイコードの元に対応しているので $D \in C_{24}$ が存在して座標の $k \in D$ に対して α_k の座標を変える。

2.3 21 元システム

ここで 21 元システム、12 個の対線、と 1 つの特別な元 s からなるダイアグラムを構成する。 w を E_6^4 型の d.h.i. とする。即ち、 w^\perp は 4 つの E_6 -図を含んでいる。この時、この中には 12 個のレベル 1 (E_6 の先端) の頂点がある。また、 e_6^4 の行列式が 81 なので、 w は 9 個のリーチグルールートを持っている。この 21 個のリーチルートの隣接関係は位数 3 のアフィン平面の隣接関係と一致している。これを Lorentzian lattice $\Pi^{25,1}$ の 21 点システムと呼ぶ。次に E_6^4 型 d.h.i. w を A_1^{12} の d.h.i. から構成できることを示そう。 A_1^{12} のリーチグルールートは A_1^{24} の時と同様な方法でターナリゴーレイコード C_{12} に対応しており、それは次の 5 つの元を含んでいる

$$\begin{aligned} s &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ r_1 &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ r_2 &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ r_3 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \\ r_4 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

この時、 w^\perp 中のリーチルートと上の 5 元は次の図を与える。



ここで q_i ($i = 1, \dots, 24$) を線、 q_i^* ($i = 1, \dots, 24$) を対線と呼ぶ。

補題 2 w の全てのリーチグループ p_i に対して $p_i \cdot s = -2$ である。

即ち、各リーチグループ p_i に対して、 $\{p_i, s\}$ は A_1 -ダイアグラム $\{o \equiv o\}$ を得る。それによって (1.1) を満足する必要な直交基底を得る事ができる。

2.4 基底、順序、代表系

$\tilde{\Lambda}$ に対する Λ の完全代表系の集合 $\{b(\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ を線と対線を使って定義する。

$\{q_1, \dots, q_{12}\}$ と $\{q_1^*, \dots, q_{12}^*\}$ を線と対線の集合とする。translation によって $s = (0, 1, -1)$ と仮定して良い。 $q_i = (\xi_i, 1, 1)$ 、 $q_i^* = (\xi_i^*, 1, 1)$ と置ける。用語を乱用するが、 ξ_i を線、 ξ_i^* を対線と呼ぶ。

定義 1 (順序) 線を対線の前に常に出すように順序を定義する。

$\alpha \in \Lambda$ の代表 $b(\alpha) \in \tilde{\Lambda}$ を定義するために直接 $\tilde{\Lambda}$ を構成する。最初に ξ_i/t と ξ_i^*/t に対して、形式的元 $b(\xi_i)^{1/t}$ と $b(\xi_i^*)^{1/t}$ を定義する。 J で生成元 $\{b(\xi_i)^{1/t}, b(\xi_i^*)^{1/t} : i = 1, \dots, 24\}$ と関係式 $\iota(\xi_i)^{1/t} \iota(\xi_i^*)^{1/t} = k \iota(\xi_i^*)^{1/t} \iota(\xi_i)^{1/t}$ と他の元は互いに可換という関係によって生成された群を表す。 $\alpha \in \Lambda$ に対して上の順序を使って元 $b(\alpha)$ を定義する。即ち、

$$\alpha = \sum_{i=1}^{12} a_i(\xi_i/t) + \sum_{i=1}^{12} b_i(\xi_i^*/t) \in \Lambda,$$

に対して

$$b(\alpha) = \prod_{i=1}^{12} (b(\xi_i)^{1/t})^{a_i} \prod_{i=1}^{12} (b(\xi_i^*)^{1/t})^{b_i}.$$

と置く。この時、部分群 $\{k b(\alpha), b(\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ は $\tilde{\Lambda}$ と同型となる。この定義は [5] の中で使われている条件をすべて満足している。この基底を使うと次のことが容易に分かる。

定理 1 21 点システムの対称群はムーンシャイン加群の上に $C_M(\theta)$ の部分群として作用している。

2.5 12 個の line-involutions

ここで 12 個の line-involutions を [5](10.4) の中で定義されている写像

$$\mu : \hat{\Lambda} \rightarrow \text{Aut}(V^{\mathfrak{h}})$$

を使って定義する。

線 q_i に対して line-involution Q_{q_i} を次の様に定義する。translation によって元 s の座標を $(0, 1, -1)$ に取る。この時、各線 q_i ($i = 1, \dots, 12$) に対して q_i は座標 $(\xi_i, 1, 1)$ の形となっているので、line-involution Q_{q_i} を

$$Q_{q_i} = \mu(\iota(\xi_i))$$

と定義する。

2.6 9 個の点インボリューション

9 個の point-involutions P_p を定義する。ここで各点 p (w のリーチグループルート) に対してまず $w_p = p + s$ が A_1^{24} 型の d.h.i. なので、 w_p のリーチグループルート q で $q \cdot s = 0$ を満たすものをとる。この時、(1.1) を満足する直交基底 $\{\alpha_i : i = 1, \dots, 24\}$ が与えられ、 $\rho = \frac{1}{2}\alpha_{\Omega}$ がワイルベクトルとなる。この直交基底を使って [5] で定義されたトライアリティ σ は 3 次元リー代数

$$\mathcal{G}_k = \text{su}(2) = \text{Cl}(b(-\alpha_k)) \oplus \text{Cl}\alpha_k \otimes t^{-1} \oplus \text{Cl}(b(\alpha_k))$$

の回転によって定義されている。このトライアリティは明らかに座標に依存しているが、座標の取り方に依存しない別の回転があることがわかる。この別の回転を使って定義されるムーンシャイン加群上の involution は $\mu(b_1)^{-1}\sigma\mu(b_1)$ で与えられている、即ち、 σ の $\mu(b_1)$ による共役である。ここで b_1 は $b(\rho/2 - \alpha_1)$ を表わす。

定義 2

$$P_p = \mu(b_1)^{-1}\sigma\mu(b_1)$$

驚くべきことに、この point-involution は直交基底が (1.1) の条件を満足する限り基底の正負の取り方に依存していない。

定理 1 座標の正負の上に置換として働き更に α_1 を固定するようなモンスター単純群の元に対して P_p は不変である。特に P_p は p を固定する 21 点システムの対称群と可換である。

3 結論

これで合わせて 21 個の involutions が定義できたが、これらが 21 システムの隣接関係からなる コクスター関係を満足していることが証明できる。即ち、

- 定理 2
1. 全ての *point-involutions* は互いに可換である。
 2. 全ての *line-involutions* は互いに可換である。
 3. 点 p と線 q に対して (3.1) $p \in q$ の時, $P_p Q_q$ の位数は 3
(3.2) $p \notin q$ の時, $P_p Q_q$ の位数は 3

参考文献

- [1] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous moonshine, Bull. London Math. Soc. 11(1979), 308-339.
- [2] J. H. Conway, S. P. Norton and L. H. Soicher, The Bimonster, the group Y_{555} , and the projective plane of order 3, Proc. "Computers in Algebra" Conference, Chicago, 1985, to appear.
- [3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packing, Lattices and Groups*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] B. Fischer, D. Livingstone, and M. P. Thorne, The characters of the "Monster" simple group, Birmingham, 1978.
- [5] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex Operator Algebra and the Monster*, Academic Press, INC., 1988.
- [6] R. L. Griess, JR, The structure of the "Monster" simple group, in: *Proc. of the Conference on Finite Groups*, ed. by W. R. Scott and R. Gross, Academic Press, New York, 1976, 113-118.
- [7] R. L. Griess, JR, The friendly giant, Invent. Math. 69 (1982), 1-102.
- [8] K. Harada, M. L. Lang, and M. Miyamoto, Sequential construction of Niemeier lattices and uniqueness proof, J. of Number Theory, (to appear).
- [9] A. A. Ivanov, A geometric characterization of the Monster, in: *Proc. L. M. S. Durham Symp*, ed. by M. Liebeck and J. Saxl, L.M.S. Lecture Note Series 165, 1992, 46-61.
- [10] S. P. Norton, Constructiong the Monster, in: *Proc. L. M. S. Durham Symp*, ed. by M. Liebeck and J. Saxl, L. M. S. Lecture Note Series 165, 1992, 63-76.

Twisted Extensions of Spin Models

K. NOMURA

Tokyo Ikashika University
Kounodai, Ichikawa, 272 JAPAN

Abstract. A spin model is one of the statistical mechanical models which were introduced by V. F. R. Jones. In this paper, we give a new construction of spin models of size $4n$ from a given spin model of size n . The process is similar to taking tensor product with a spin model of size four, but we add some sign exchange. This construction also gives symmetric four-weight spin models which were introduced by E. Bannai and E. Bannai.

Keywords: spin models, star-triangle relation

1 Introduction

A spin model is one of the statistical mechanical models which were introduced by V. F. R. Jones in [Jo3]. The main importance of spin models comes from the fact that every spin model gives a link (knot) invariant through its partition function, see [Jo3].

A spin model is essentially a symmetric $n \times n$ -matrix W , whose entries $W_{\alpha,\beta}$ are non-zero complex numbers, such that (for $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$)

$$\sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0 \quad \text{if } \alpha \neq \beta, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}. \quad (2)$$

The second equation is known as the 'star-triangle relation'.

As easily shown, the tensor product $W_1 \otimes W_2$ of two spin models W_1 and W_2 becomes a spin model. So we can obtain a spin model of size $4n$ from an arbitrary spin model W by taking tensor product with a spin model of size four. In this paper, we show that we can add some 'twist' (sign exchange).

Let W be a spin model of size n . For an n -tuple $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ with $\epsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, n$), let W' be the matrix whose entries are given as

$$W'_{\alpha,\beta} = \epsilon_\alpha \epsilon_\beta W_{\alpha,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n).$$

Using W and W' , construct the following matrices U, V of size $4n$;

$$U = \begin{pmatrix} W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \\ W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \\ W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \end{pmatrix}.$$

Theorem 1 *Let W be a spin model, and let $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ with $\epsilon_i = \pm 1$ ($i = 1, \dots, n$). Then both U and V , defined above, become spin models.*

Remark. We can replace W' by $\omega W'$ in the matrix U of Theorem 1, where ω is one of the 4-th roots of unity.

When $\epsilon_i = +1$ ($i = 1, \dots, n$), these models split into the tensor product of W and the following spin models;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Otherwise, U and V will give new spin models.

2 Lemmas

Theorem 1 is easily obtained from the following two Lemmas.

Lemma 2 *Let W and W' be symmetric matrices of size n , and let U be the following matrix of size $4n$.*

$$U = \begin{pmatrix} W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \\ W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \end{pmatrix}.$$

Then U is a spin model if and only if the following conditions hold (for all $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$);

$$\sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0, \quad \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} = 0 \quad \text{if } \alpha \neq \beta, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}. \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}. \quad (7)$$

Lemma 3 *Let W and W' be symmetric matrices of size n , and let V be the following matrix of size $4n$.*

$$V = \begin{pmatrix} W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \\ W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \end{pmatrix}.$$

Then V is a spin model if and only if the following conditions hold (for all $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$);

$$\sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0, \quad \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} = 0 \quad \text{if } \alpha \neq \beta, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}. \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}. \quad (12)$$

3 Proof of Lemmas

We prove only Lemma 2. The proof of Lemma 3 is same except that we must exchange W and W' in the right-hand side of the star triangle relations.

The conditions (1), (2) for the matrix U become;

$$\text{OT}(\lambda, \mu): \quad \sum_{x=1}^{4n} \frac{U_{\lambda,x}}{U_{\mu,x}} = 0 \quad \text{if } \lambda \neq \mu,$$

$$\text{ST}(\lambda, \mu, \nu): \quad \frac{1}{\sqrt{4n}} \sum_{x=1}^{4n} \frac{U_{\lambda,x} U_{x,\mu}}{U_{\nu,x}} = \frac{U_{\lambda,\mu}}{U_{\nu,\lambda} U_{\nu,\mu}}.$$

We write down the above conditions in terms of W and W' for various values of λ, μ, ν . Let $X = \{1, \dots, n\}$ and choose arbitrary $\alpha, \beta, \gamma \in X$.

First we consider the equations $\text{OT}(\lambda, \mu)$. For $\alpha, \beta \in X$, $\text{OT}(\alpha, \beta)$ becomes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{-W'_{\alpha,x}}{-W'_{\beta,x}} &= 0, \\ \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

and $\text{OT}(\alpha, n + \beta)$ becomes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{-W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{-W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} &= 0, \\ \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} - \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Since $\text{OT}(\alpha, 2n + \beta)$ becomes

$$\sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{-W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{-W'_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0, \quad (15)$$

and $\text{OT}(\alpha, 3n + \beta)$ becomes

$$\sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{-W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} + \sum_{x \in X} \frac{-W'_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0. \quad (16)$$

Remark (13) and (14) always hold. We can see that $\text{OT}(n + \alpha, \mu)$, $\text{OT}(2n + \alpha, \mu)$ and $\text{OT}(3n + \alpha, \mu)$ ($\mu = \beta, n + \beta, 2n + \beta, 3n + \beta$) yield the same equations. If $\text{OT}(\lambda, \mu)$ holds for all λ, μ with $\lambda \neq \mu$, then (13) and (14) hold for all $\alpha, \beta \in X$ with $\alpha \neq \beta$, so we get (3). Conversely, if (13) hold for all $\alpha, \beta \in X$ with $\alpha \neq \beta$, then (13) and (14) hold for $\alpha \neq \beta$. Since (14) holds also for $\alpha = \beta$, we get $\text{OT}(\lambda, \mu)$ for all λ, μ with $\lambda \neq \mu$.

Next we consider $\text{ST}(\lambda, \mu, \nu)$. $\text{ST}(\alpha, \beta, \gamma)$ becomes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{(-W'_{\alpha,x})(-W'_{x,\beta})}{(-W'_{\gamma,x})} &= \frac{2\sqrt{n}W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha}W_{\gamma,\beta}}, \\ 2 \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} &= \frac{2\sqrt{n}W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha}W_{\gamma,\beta}}, \end{aligned}$$

this coincides with (4). $\text{ST}(\alpha, \beta, 2n + \gamma)$ becomes

$$\sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{(-W'_{\gamma,x})} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{(-W'_{\alpha,x})(-W'_{x,\beta})}{W_{\gamma,x}} = \frac{2\sqrt{n}W_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha}W'_{\gamma,\beta}},$$

$$2 \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{2\sqrt{n}W_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}},$$

this is (5). $\text{ST}(\alpha, 2n + \beta, \gamma)$ becomes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} (-W'_{x,\beta})}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{(-W'_{\alpha,x}) W_{x,\beta}}{(-W'_{\gamma,x})} &= \frac{2\sqrt{n}W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}, \\ 2 \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} &= \frac{2\sqrt{n}W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}, \end{aligned}$$

this is (6). $\text{ST}(\alpha, 2n + \beta, 2n + \gamma)$ becomes

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} (-W'_{x,\beta})}{(-W'_{\gamma,x})} + \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} + \sum_{x \in X} \frac{(-W'_{\alpha,x}) W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} &= \frac{2\sqrt{n}W'_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \\ 2 \sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} &= \frac{2\sqrt{n}W'_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \end{aligned}$$

this is (7). Thus, if $\text{ST}(\lambda, \mu, \nu)$ holds for all λ, μ, ν , then W and W' satisfy (4), (5), (6), (7). For the proof of converse, we must show $\text{ST}(jn + \alpha, kn + \beta, \ell n + \gamma)$ for each (j, k, ℓ) with $j, k, \ell = 0, 1, 2, 3$. We can show that the equation becomes one of (4), (5), (6), (7) for each case. We give a table of j, k, ℓ and the corresponding equation;

j	k	ℓ	equation
0, 1	0, 1	0, 1	(4)
0, 1	0, 1	2, 3	(5)
0, 1	2, 3	0, 1	(6)
0, 1	2, 3	2, 3	(7)
2, 3	0, 1	0, 1	(7)
2, 3	0, 1	2, 3	(6)
2, 3	2, 3	0, 1	(5)
2, 3	2, 3	2, 3	(4)

4 Spin models comming from Hadamard matrices

We have constructed new spin models from Hadamard matrices [N]. Let H be a Hadamard matrix of order $n = 4m$, i.e. an $n \times n$ -matrix with ± 1 entries such that $HH^t = nI$. Let A be the Potts model of size n ;

$$A = (a - b)I + bJ,$$

where J denotes the $n \times n$ -matrix with all entries 1, and a, b are suitable complex numbers. Using H and A , construct the following matrix;

$$\begin{pmatrix} A & A & \omega H & -\omega H \\ A & A & -\omega H & \omega H \\ \omega^t H & -\omega^t H & A & A \\ -\omega^t H & \omega^t H & A & A \end{pmatrix},$$

where ω denotes one of the 4-th roots of unity. As shown in [N], the above matrix becomes a spin model.

The partition function of the above model was obtained by F. Jaeger. At first he proved that the partition function does not depend on the choice of the Hadamard matrix H [Ja2], and secondly he obtained an explicit formula [Ja3]. In fact, the partition function for a link L can be written in terms of Jones polynomials [Jo1] of sublinks of L .

The link invariant of the above model is somewhat stronger than Jones polynomial. In fact, Jones [Jo6] construct a pair (L_1, L_2) of two links which can be detected by the above invariant but not by Jones polynomial. In the construction, he used his recent method by commuting transfer matrices [Jo5].

Jones informed us [Jo6] that the above invariant is similar to the invariant given by Rolfsen [R]. In fact, Rolfsen's invariant and our invariant are the same for links having at most two components, and so the examples of links given [JiR] also give examples of links which are detected by our invariant but not by Jones polynomial.

Here we give a generalization of Lemma 2 which covers the above spin models constructed from Hadamard matrices.

Lemma 4 *Let W and W' be matrices of size n with W symmetric, and let U be the following matrix of size $4n$.*

$$U = \begin{pmatrix} W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \\ {}^tW' & -{}^tW' & W & W \\ -{}^tW' & {}^tW' & W & W \end{pmatrix}.$$

Then U is a spin model if and only if the conditions (17) - (24) hold (for all $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$);

$$\sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = 0, \quad \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} = 0, \quad \sum_{x=1}^n \frac{W'_{x,\alpha}}{W'_{x,\beta}} = 0, \quad \text{if } \alpha \neq \beta, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W'_{\beta,x}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W'_{\alpha,\gamma} W'_{\beta,\gamma}}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{\alpha,x} W_{x,\beta}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{x,\gamma}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W'_{\alpha,\gamma} W_{\gamma,\beta}}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W_{\alpha,x} W'_{\beta,x}}{W'_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\beta,\alpha}}{W'_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{x,\alpha} W_{x,\beta}}{W'_{x,\gamma}} = \frac{W'_{\beta,\alpha}}{W_{\gamma,\alpha} W'_{\beta,\gamma}}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=1}^n \frac{W'_{x,\alpha} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W_{\alpha,\beta}}{W'_{\gamma,\alpha} W'_{\gamma,\beta}}. \quad (24)$$

5 Symmetric Four-Weight Spin Models

E. Bannai and E. Bannai [BB] introduced four-weight spin models, which generalize ordinary spin models given by Jones. In this section, we describe a relation between our construction and four-weight spin models.

A four-weight spin model is defined in [BB] as follows. Let X be a set of n elements, and w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) be functions on $X \times X$ to the complex numbers. Then (X, w_1, w_2, w_3, w_4) be a four-weight spin model if the following conditions are satisfied (for all $\alpha, \beta, \gamma \in X$):

- (i) $w_1(\alpha, \beta)w_3(\beta, \alpha) = 1$, $w_2(\alpha, \beta)w_4(\beta, \alpha) = 1$,
- (ii) $\sum_{x \in X} w_1(\alpha, x)w_3(x, \beta) = n\delta_{\alpha,\beta}$, $\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x)w_4(x, \beta) = n\delta_{\alpha,\beta}$,
- (iii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x)w_1(x, \beta)w_4(\gamma, x) = w_1(\alpha, \beta)w_4(\gamma, \alpha)w_4(\gamma, \beta)$,
- (iii') $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in X} w_1(x, \alpha)w_1(\beta, x)w_4(x, \gamma) = w_1(\beta, \alpha)w_4(\alpha, \gamma)w_4(\beta, \gamma)$.

Lemma 5 *Let W and W' be symmetric matrices of size n . Put $X = \{1, \dots, n\}$ and define w_i ($i = 1, 2, 3, 4$) as*

$$\begin{aligned} w_1(\alpha, \beta) &= W'_{\alpha,\beta}, & w_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{W_{\alpha,\beta}}, \\ w_2(\alpha, \beta) &= W_{\alpha,\beta}, & w_4(\alpha, \beta) &= \frac{1}{W'_{\alpha,\beta}}. \end{aligned}$$

Then (X, w_1, w_2, w_3, w_4) is a four-weight spin model if and only if the following matrix V is a spin model.

$$V = \begin{pmatrix} W' & -W' & W & W \\ -W' & W' & W & W \\ W & W & W' & -W' \\ W & W & -W' & W' \end{pmatrix}.$$

Proof. If V is a spin model, Lemma 3 implies

$$\sum_{x \in X} \frac{W_{\alpha,x}}{W_{\beta,x}} = n\delta_{\alpha,\beta}, \quad \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x}}{W'_{\beta,x}} = n\delta_{\alpha,\beta},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in X} \frac{W'_{\alpha,x} W'_{x,\beta}}{W_{\gamma,x}} = \frac{W'_{\alpha,\beta}}{W_{\gamma,\alpha} W_{\gamma,\beta}}.$$

Therefore (X, w_1, w_2, w_3, w_4) becomes a four-weight spin model.

Conversely, assume (X, w_1, w_2, w_3, w_4) is a four-weight spin model. Then conditions (8) and (10) in Lemma 3 hold. But the conditions (9), (10), (11) and (12) in Lemma 2 are equivalent to each other under the assumption (8) by [BB] Theorem 2. So V becomes a spin model. \square

Remark 1. Theorem 1 and Lemma 5 imply a construction of symmetric four-weight spin models from an ordinary spin model. Moreover we can conclude that every symmetric four-weight spin model comes from an ordinary spin model.

Remark 2. K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani [KMW] showed that the assumption ‘symmetric’ on W is not essential for spin models. Almost results given in this paper are valid also for non-symmetric case.

Problem. Give a formula for the partition function of the spin model U, V in Theorem 1, in terms of the partition function of W .

References

- [BB] E. Bannai and E. Bannai, “Four-weight spin models,” *Pac. J. Math.*, to appear.
- [H] P. de la Harpe, “Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger’s Higman-Sims model,” *Pac. J. Math.*, to appear.
- [HJ] P. de la Harpe and V. F. R. Jones, “Graph invariants related to statistical mechanical models : examples and problems,” *J. Combin. Theory Ser. B*, **57** (1993) 207–227.
- [Ja1] F. Jaeger, “Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial,” *Geom. Dedicata* **44** (1992), 23–52.
- [Ja2] F. Jaeger, “On spin models, triply regular association schemes, and duality,” preprint.
- [Ja3] F. Jaeger, “On Nomura’s Hadamard spin models and the Jones polynomial,” in preparation.
- [JiR] G. T. Jin and D. Rolfsen, “Some remarks on rotors in link theory,” *Can. Math. Bull.*, to appear.
- [Jo1] V. F. R. Jones, “A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras,” *Bull. Am. Math. Soc.* **12** (1985), 103–101.
- [Jo2] V. F. R. Jones, “Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials,” *Ann. of Math.* **126** (1987), 335–388.
- [Jo3] V. F. R. Jones, “On knot invariants related to some statistical mechanical models,” *Pac. J. Math.* **137** (1989), 311–336.
- [Jo4] V. F. R. Jones, “On a certain value of the Kauffman polynomial,” *Commun. Math. Phys.* **125** (1989), 459–467.
- [Jo5] V. F. R. Jones, “Commuting transfer matrices and link polynomials,” *International J. Math.* **3** (1992), 205–212.
- [Jo6] V. F. R. Jones, Private communication.
- [Ka] L. H. Kauffman, “An invariant of regular isotopy,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), 417–471.
- [KMW] K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, “Generalized spin models,” submitted.
- [N] K. Nomura, “Spin models constructed from Hadamard matrices,” *J. Combin. Theory Ser. A*, to appear.
- [R] D. Rolfsen, “PL link isotopy, essential knotting and quotients of polynomials,” *Can. Math. Bull.*, to appear.

Combinatorial Dehn Twists

京大数理解析研究所 松本 眞 (email: matumoto@kurims.kyoto-u.ac.jp)

Abstract

種数 g の閉リーマン面 R_g のタイヒミュラーモジュラー群 (すなわち写像類群) を $\Gamma_g := \text{Diff}^+(R_g)/\text{isotopy}$ とする。このとき、表現

$$\Gamma_g \rightarrow \text{Out}\pi_1(R_g, *)$$

を記述する組合せ論的道具、Edge Twist と Cycle Twists を紹介し、 Γ_g の induced filtration

$$\Gamma_g = \Gamma_g[0] \supset \Gamma_g[1] \supset \cdots \supset \Gamma_g[m] \supset \cdots; \quad \Gamma_g[m] := \text{Ker}\{\Gamma_g \rightarrow \pi_1(R_g, *)/\gamma_{m+1}\pi_1\}$$

への応用を論ずる。(群 G に対し、 $\text{Out}G := \text{Aut}G/\text{Inn}G$ は外部自己同型群、 $\gamma_{m+1}G$ は G の第 $m+1$ 次降中心列を表す。)

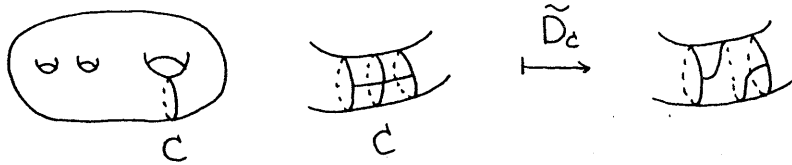
1 Introduction

R_g を種数 g のコンパクト向き付け可能 C^∞ 曲面とする。そのタイヒミュラーモジュラー群 (ないし写像類群) Γ_g は

$$\Gamma_g := \pi_0(\text{Diff}^+(R_g)) \cong \text{Diff}^+(R_g)/\text{isotopy}$$

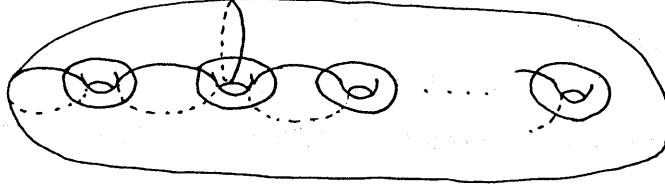
によって定義される。すなわち、 R_g の向きを保つ可微分自己同相写像のなす群 $\text{Diff}^+(R_g)$ にコンパクト開位相を入れた際の各連結成分を元とする群である。 R_g の向きを保つ可微分自己同相写像のなす群のホモトピー同値類と考えるのがわかりやすい。

Γ_g の簡単な元の例として、Dehn Twist があげられる。 C を R_g 上の単純閉曲線としたとき、可微分同相 $\tilde{D}_C : R_g \rightarrow R_g$ が以下の図のようにして得られる。すなわち、 C に沿ってパイプを切りだし、左ねじ方向に 360 度回転し、再び貼り合わせるのである。



\tilde{D}_C の $\Gamma_g := \text{Diff}^+(R_g)/\text{isotopy}$ への像を D_C で表し、 C に沿った Dehn Twist と呼ぶ。 $D_C \in \Gamma_g$ は C の free homotopy 類にのみ依存する。とくに、 C が R_g 上で可縮のときは、 $D_C = 1$ である。

実は、 Γ_g は有限個の Dehn Twists で生成され、その関係式も有限個で具体的に表示されている [15]。その生成元は次のようなものである [8][9][6]。



この発表の目標は、一つのパンツ分解を固定したとき、そのデュアルグラフから定まるあるクラスの Dehn Twists を完全に組合せ群論的に表示し、それを用いて Γ_g の induced filtration の構造を研究することである。

ここで述べる結果は、基本的に朝田 衛、織田 孝幸両氏との共同研究である [1][10][12]。

2 Induced Filtration on Γ_g

この章では Γ_g に induced filtration を定義する。以下にいくつか組合せ群論の言葉を定義しておく。群 G とその元 x, y に対しその交換子を $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ であらわし、 G の部分群 H, K に対して $[H, K]$ で $\{[h, k] | h \in H, k \in K\}$ で生成される G の部分群を表す。 G の降中心列

$$G = \gamma_1 G \supset \gamma_2 G \supset \cdots \supset \gamma_m G \supset \cdots$$

を

$$\gamma_1 G := G; \quad \gamma_2 G := [G, \gamma_1 G] = [G, G]; \quad \cdots \gamma_{m+1} G := [G, \gamma_m G]; \quad \cdots$$

で定義する。これらは G の任意の自己同型群で不変な部分群（すなわち特性部分群）である。

簡単のため、 $\Pi := \pi_1(R_g, *)$ とおく。ここに $\pi_1(R_g, *)$ は R_g のある点 $*$ を基点とした基本群をあらわす。

次に、表現

$$\rho : \Gamma_g \rightarrow \text{Out} \Pi$$

を定義しよう。任意に $\sigma \in \Gamma_g$ を与えられた時、その $\text{Diff}^+(R_g)$ への持ち上げを任意の一つとって $\tilde{\sigma}$ とする。すると任意の点 $b \in R_g$ に対して $\tilde{\sigma} : \pi_1(R_g, b) \rightarrow \pi_1(R_g, \tilde{\sigma}(b))$ が定まる。 b と $\tilde{\sigma}(b)$ を結ぶ道 α を一つ固定すると、 $\alpha \tilde{\sigma}(\cdot) \alpha^{-1} \in \text{Aut} \pi_1(R_g, b)$ が定まり、 α の取り換えは $\text{Inn} \pi_1(R_g, b)$ の作用を引き起こす。（道の合成は左から右へ行なう。）こうして、

$$\tilde{\rho} : \text{Diff}^+(R_g) \rightarrow \text{Out} \Pi$$

が定まるが、この表現が $\text{Diff}^+(R_g)$ でホモトピー同値な元を同じ元に写すことを見るのは容易であり、こうして

$$\rho : \Gamma_g \rightarrow \text{Out} \Pi$$

が得られた。

さて、 Γ_g の induced filtration は ρ を通じて次のように定義される。

$$\Gamma_g[m] := \text{Ker}\{\Gamma_g \rightarrow \text{Out}(\Pi/\gamma_{m+1}\Pi)\}.$$

定義より、filtration

$$\Gamma_g = \Gamma_g[0] \supset \Gamma_g[1] \supset \Gamma_g[2] \supset \dots$$

は正規部分群の列であるが、次を満たすことが証明できる。

1. $[\Gamma_g[m], \Gamma_g[n]] \subset \Gamma_g[m+n]$ 、
2. $\Gamma_g[m]/\Gamma_g[m+1]$ は Abel 群で自由 \mathbb{Z} 加群 ($m \geq 1$)、
3. $\bigoplus_{m \geq 1} \Gamma_g[m]/\Gamma_g[m+1]$ は交換子積の像によって自由 \mathbb{Z} 加群の構造をもつ次数つきリー代数となる (c.f.[3])。

$\Gamma_g[1]$ は Γ_g の元で $\Pi/[\Pi, \Pi] \cong H_1(R_g, \mathbb{Z})$ に自明に作用するもの、すなわち Torelli 群である。 Γ_g の induced filtration に関しては Johnson, Hain, 森田らによる多くの研究がある。

3 Pants 分解と Edge Twists

Definition 1 (Pants 分解)

R_g に $3g-3$ 個の互いに交わらない互いにホモトピー同値でない単純閉曲線 $C_1, C_2, \dots, C_{3g-3}$ をとる。すると $R_g - \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{3g-3}\}$ は $2g-2$ 個の pants (球面から 3 個の閉円盤を抜いたもの) に分かれる。これを pants 分解という。

通常、互いにホモトピックな閉曲線による pants 分解は同一のもののみならず、種数 2 の閉曲面の pants 分解は次の 2 通りである。



Definition 2 (dual graph) 与えられた pants 分解 $\{C_1, C_2, \dots, C_{3g-3}\}$ に対し、その dual graph を、頂点を各 pants とし、辺集合を $\{C_1, C_2, \dots, C_{3g-3}\}$ とし、各 C_i はその両側の連結成分を結ぶ辺として得られるグラフとして定義する。

例えば、上の二つの pants 分解に対応する dual graph は以下の通りである。



pants 分解の定義から、dual graph は 3 正則グラフ (各頂点から 3 本ずつ辺が出る) であることがわかり、辺の数、頂点の数はそれぞれ $2g-2$ 、 $3g-3$ であることもやさしい。

pants 分解のホモトピー類をきめるとその dual graph として 3 正則グラフが上の様に決まるが、逆に 3 正則グラフを決めるとそれを適当になめらかに 3 次元空間に埋め込んで管状近傍をと

りその境界をみることで、閉曲面と pants 分解が得られる。(pants 分解は各辺の重心をとおり辺と直交する面と境界との共通部分をとればよい。)

こうして、種数 g の閉曲面の pants 分解のホモトピー類と、頂点数 $2g-2$ の 3 正則グラフ (多重辺もループも許す) との間には一対一対応がつかうことがわかる。こうして、前者の性質はグラフ理論的言葉で記述できるはずであることになる。こういったタイプの定理として、次の Brylinski の結果がある。

Theorem 1 (Brylinski[4]) $\{C_1, \dots, C_{3g-3}\}$ を R_g の pants 分解、 Y をその dual graph とする。 $\{C_1, \dots, C_{3g-3}\}$ に沿った $3g-3$ 個の Dehn Twists (これらは互いに交わらないので定義より可換である) を $D_1, D_2, \dots, D_{3g-3} \in \Gamma_g$ とし、これらが生成する Γ_g の部分群を I とする。このとき、 I の

$$\Gamma_g \rightarrow H_1(R_g, \mathbb{Z}) = \Pi / [\Pi, \Pi]$$

による像は自由 \mathbb{Z} 加群でそのランクは $3g-3 - s_1(Y) - s_2(Y)$ である。ここに $s_1(Y), s_2(Y)$ は以下に定義されるグラフの不変量である。

Definition 3 (bridge)

連結グラフ Y の辺 e が bridge であるとは、 Y から e を除いて得られるグラフ $Y-e$ が非連結であること。 Y の bridge の数を $s_2(Y)$ で表す。

Definition 4 (cut pair)

連結グラフ Y の二つの辺 (e, f) が cut pair であるとは、それらが bridge でなく、かつ $Y-e-f$ が非連結であること。 $(e, f), (f, g)$ がそれぞれ cut pair であり、 $e \neq g$ であれば (e, g) は再び cut pair である。辺の部分集合 M が maximal cut system であるとは、 M のどの 2 辺も cut pair を成し、かつ M がこの性質を満たす極大な集合となっていること。 $s_1(Y)$ を

$$s_1(Y) := \sum_{M:\text{m.c.s.}} (\#(M) - 1)$$

で定義する。ここで上の和は M が全ての maximal cut system を走る和である。

(I は種数 g のモジュライ空間の stable curve によるコンパクト化の局所 monodromy として解釈される [5][4][1]。)

次の命題によって、この定理が正しい雰囲気がわかる。

Proposition 1

- もし C_i が dual graph で bridge なら、 $D_{C_i} \in \Gamma_g[2]$.
- もし C_i, C_j が dual graph で cut pair なら、 $D_{C_i}, D_{C_j}^{-1} \in \Gamma_g[1]$.

略証 C_i が bridge のとき: C_i のホモロジー類 $[C_i]$ は 0 である。よって、任意に base point* をとった時、 C_i の自由ホモトピー類に対応する $\pi_1(R_g, *)$ の共役類は $[\Pi, \Pi]$ に属する。 C_i に沿った Dehn Twist は Π の生成元を動かさないかまたはこの元による共役にうつすから、 $D_{C_i} \in \Gamma_g[2]$ 。 C_i, C_j が cut pair のとき: $D_{C_i}, D_{C_j}^{-1}$ の H_1 への作用が自明であることをみればよい。cut pair の定義から、 R_g 上の任意の閉路と C_i, C_j の交差数の和は 0 である。これと $H_1(R_g, \mathbb{Z})$ で成り立つ式 $[C_i] = [C_j]$ より $D_{C_i}, D_{C_j}^{-1}$ は H_1 上自明に作用する。

我々はこれを induced filtration に関する命題ととらえ直して、以下を証明した [1]。

Theorem 2 I を $D_1, D_2, \dots, D_{3g-3}$ で生成される Γ_g の (可換) 部分群とし、その induced filtration を

$$I[m] := I \cap \Gamma_g[m] \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義する。maximal cut system 全体の集合を \mathcal{M} とし、各 $M \in \mathcal{M}$ に対して一つ $C_M \in M$ を固定する。すると以下が成立する。

1. $I[2]/I[3] = \bigoplus_{C_i \in \text{bridge}} \mathbb{Z} D_i$ はランク $s_2(Y)$ の自由 \mathbb{Z} 加群。
2. $I[1]/I[2] = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \bigoplus_{C \in M - \{C_M\}} \mathbb{Z}(D_{C_M} D_C^{-1})$ はランク $s_1(Y)$ の自由 \mathbb{Z} 加群。
3. $I[0]/I[1]$ はランク $3g - 3 - s_1(Y) - s_2(Y)$ の自由 \mathbb{Z} 加群。
4. $I[m] = 0$ ($r \geq 3$)。

これは先の Brylinski の定理の別証を与えている。この証明に、Dehn Twists を記述する道具だとして Edge Twists が使われた。ここでは証明には触れずに定義だけを与えておく。

4 Edge Twists

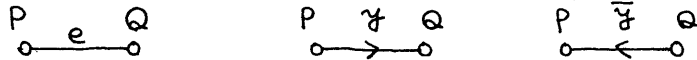
Y を 3 正則連結グラフとする (ある種数 g の閉曲面 R_g のある pants 分解の dual graph と考えて良い)。

4.1 Π の記述

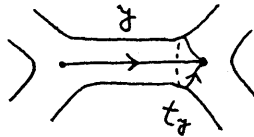
Definition 5 (基本 groupoid $\pi_1(G, Y; P, Q)$)

3 正則グラフ Y に対し、groupoid $\{\pi_1(G, Y; P, Q) \mid P, Q \text{ は } Y \text{ の頂点}\}$ を以下のように定義する (G は意味のない捨て字 [14])。

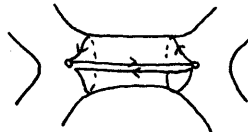
2 種の生成元: (1) 各辺 e に対し二つの元 $y_e \in \pi_1(G, Y; P, Q)$ 、 $\bar{y}_e \in \pi_1(G, Y; Q, P)$ 。ここで、 P, Q は e の両端点とする ($P = Q$ でも良い)。 $y = y_e$ を e に P から Q 向きの向き付けを行なった有効辺と同一視する。 \bar{y} で向き付けを反転して得られる辺を指す。こうして、 Y の無向辺一本ごとに有効辺が 2 本指定される。 $t(y)$ で y の終点の頂点をあらわす。



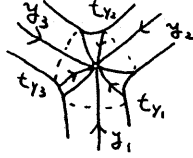
(2) 各有効辺 y に対して、 $t_y \in \pi_1(G, Y; t(y), t(y))$ 。 t_y は y の終点を反時計回りに一周して得られる元として解釈される。



2 種の関係式: (1) 各辺 y に対し $y t_y \bar{y} t_{\bar{y}} = 1$ 。



(2) 各頂点につき、入ってくる3本の有効辺に適当に順序を一つつけて y_1, y_2, y_3 とする。このとき $t_{y_1} t_{y_2} t_{y_3} = 1$ 。



$\{\pi_1(G, Y; P, Q)\}$ はこの2種の生成元で生成される自由 groupoid を2種の関係式で割って得られる groupoid とする。

Proposition 2 Y を R_g のある pants 分解の dual graph とし、各 pants P_i ごとに一つ base point を固定して再び P_i で表す。このとき、 $\pi_1(G, Y; *, *)$ は R_g の基本 groupoid を $\{P_i\}$ に制限して得られる groupoid に同型である。特に $\pi_1(G, Y; P, P) \cong \Pi$ 。

証明 これは定義からほぼ自明である。(Van Kampen の定理と Higman-Neumann-Neumann 構成から従う。)

4.2 Edge Twists の記述

Definition 6 (Edge Twists) C_i に対応する辺を e_i で表す。上の同型を通して $D_{C_i} \in \text{Out}\Pi$ に対応する $D_{e_i} \in \text{Out}\Pi(G, Y; P, P)$ は以下のように記述できる。生成元の対応のみ記述すればよい。 e_i に対応する有向辺を y, \bar{y} とするとき

$$\begin{aligned} D_{e_i} : y &\mapsto yt_y \\ &\bar{y} \mapsto \bar{y}t_{\bar{y}} \end{aligned}$$

と定義し、その他の生成元 $\{z \mid z \text{ は } y, \bar{y} \text{ と異なる辺}\}$ および $\{t_z \mid z \text{ は任意の有向辺}\}$ はそのまま不変に写す。

これが well-defined であることは容易に確かめられる。この記述を用いて帰納法により定理2は証明される。

5 Cycle Twists

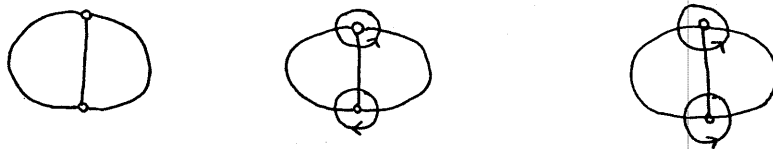
Edge Twists によって生成される部分群 $I := \bigoplus_{i=1}^{3g-3} \mathbb{Z} \cdot D_i$ は Γ_g の可換で小さな部分群である。実際、Theorem 2により、この部分群は Γ_g の filtration の深いところ (i.e. $\Gamma_g[3]$) には全く交わらない。

この章では、Edge Twists を補うものとして、Cycle Twists を定義する。その主な性質は、

- Edge Twists 同様、組合せ群論的に記述・計算ができる。
- dual graph が bridge を持たなければ Cycle Twists と Edge Twists で Γ_g 全体が生成される。
- dual graph が平面グラフであるとき、Cycle Twists の生成する部分群は pure braid group の簡単な central extension となり、 γ_g の filtration のそこへの制限は pure braid group の降中心列と一致する。

Definition 7 fat graph[13]とは、3正則グラフ Y であって、各頂点において、そこに接する3本の辺にある円順列が与えられているものをいう。

例えば、下左のグラフには2つの互いに同型でない fat graph の構造を与え得る。

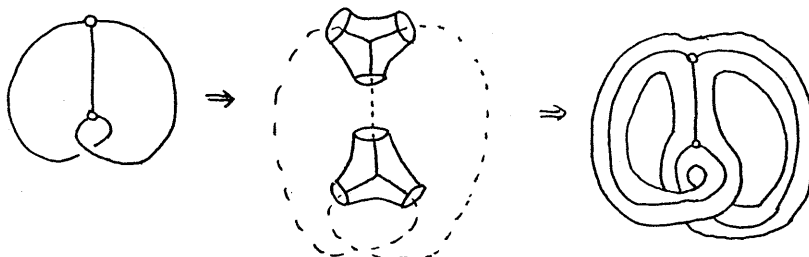


以後 fat graph を平面上に描き表す時は、各頂点の回りで辺が反時計回りになるようにする。



Definition 8 Y を fat graph とする。 Y の fattening とは以下のようにして得られる閉曲面 $R(Y)$ と埋め込み $Y \hookrightarrow R(Y)$ の組である。まず、 Y の各頂点毎に pants を一つ持ってきて、上に一つの基点と3本の辺を描く。次に、 Y の各頂点にあたえられた円順列に従ってこれらの pants を張り合わせる。

Cycle Twists は、うめこまれたグラフ Y のサイクルに沿っての $R(Y)$ の Dehn twists を記述する。



5.1 Π の記述

前章で行なった Π の記述において、曖昧な点が一箇所だけあった。それは、2種の関係式の(2)で、 y_1, y_2, y_3 の順序を一つとるところである。fat graph から出発する場合には、この順序を fat graph に与えられているものにとる。これにより、 P, Q を Y の任意の頂点とし、それを $R(Y)$ における対応した pants の基点と同一視した時、先の組合せ群論的に定義された groupoid と $R(Y)$ の fundamental groupoid との同型 $\pi_1(G, Y; P, Q) \cong \pi_1(R(Y); P, Q)$ が得られる。

Definition 9 (Cycle Twists) Y を fat graph とし、 $C = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ を Y の有向サイクルとする。すなわち、 y_i の終点と y_{i+1} の起点が一致し、このサイクルはそれ自身には交わらないものとする。このとき、 C は $Y \hookrightarrow R(Y)$ により $R(Y)$ の閉曲線と同一視できるが、これに沿った Dehn Twist は以下のように記述される。これを Cycle Twist という。

- y を Y の有向辺としたとき、

$$w_{y,C} := \begin{cases} y \text{ も } \bar{y} \text{ も } C \text{ に含まれない時 identity} \\ \text{さもなれば } t(y) \text{ を始終点とする } C \text{ に沿ったサイクルに向きを } y \text{ にそろえたもの} \end{cases}$$

$$e_{y,C} := \begin{cases} 1 & C \text{ に沿って歩く時、} y \text{ の終点で右に曲がる時} \\ 0 & C \text{ に沿って歩く時、} y \text{ の終点で左に曲がる時} \\ \text{未定義} & y, \bar{y} \text{ が } C \text{ に乗っていない時} \end{cases}$$

すると、 C にそっての Cycle Twist は

$$D_C : \pi_1(G, Y; P, Q) \rightarrow \pi_1(G, Y; P, Q)$$

$$\begin{aligned} t_y &\mapsto w_{y,C}^{e(y,C)-1} \cdot t_y \cdot w_{y,C}^{-e(y,C)} \\ y &\mapsto y \cdot w_{y,C}^{1-e(y,C)-e(\bar{y},C)} \end{aligned}$$


で記述される。

5.2 生成

Theorem 3 Y を fat graph とする。Edge Twists と Cycle Twists で Γ_g が生成される必要十分条件は、 Y が bridge をもたないことである。

証明の方針 2 種の変形



により Y を ladder graph  に変形する。この各 step で生成される群が不変であることをいう。すると Lickorish 生成元に帰着される。

5.3 平面グラフの場合

以下では、 Y が先に述べた反時計回りルールで平面に交わることなく描き込める場合、すなわち、 Y が平面 fat graph である場合を取り扱う。さらに、 Y が bridge を持たないことも仮定する。

Theorem 4 Y を bridge を持たない平面 fat graph とする。このときある $g+1$ 個の edge twists と g 個の cycle twists で Γ_g は生成できる。($2g+1$ は Dehn Twists をつかう限り最低必要な生成元の数である [6]。) また、edge twists、cycle twists で Γ_g を生成する時、どちらも最低 g 個ずつは必要。

Theorem 5 (Oda[12]) Y を bridge を持たない平面 fat graph とする。このとき、cycle twists の生成する Γ_g の部分群は Y によらず、 $\mathbb{Z}^{2g+1} \times P_g$ に同型である。ここに P_g は g 本の弦の Artin pure braid group である。さらに、次が成り立つ。

$$P_g \cap \Gamma_g[m] = \gamma_{m+1} P_g \quad (m \geq 0).$$

従って、 $\bigoplus_{m \geq 1} \Gamma_g[m] / \Gamma_g[m+1]$ への P_g の像は P_g の降中心列による graded Lie algebra と一致し、河野 [7] により後者の各 grade の rank は知られているので、朝田-金子 [2] による上限と合わせると次を得る。

Corollary 1

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)}g^{m+2}+O(g^{m+1}) \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}\Gamma_g[m]/\Gamma_g[m+1] \leq \frac{1}{(m+1)(m+2)}2^{m+2}g^{m+2}+O(g^{m+1}).$$

References

- [1] Asada, M., Matsumoto, M. and Oda, T. Local Monodromy on the Fundamental Groups of Algebraic Curves along a Degenerate Stable Curve. *RIMS preprints* 850 (1991), To appear in *Journal of Pure and Applied Algebra*.
- [2] Asada, M., Kaneko, M. On the automorphism groups of some pro- l fundamental groups, in “Galois representations and arithmetic algebraic geometry”. *Adv. Studies in Pure Math.*, 12, (1987), 137-159.
- [3] Bourbaki, N. “Groupes et algèbres de Lie Ch. 2 et 3” *Èlèments de Mathématique*, 1972.
- [4] Brylinski, Jean-Luc. Propriétés de ramification a l’infini du groupe modulaire de Teichmüller, *Ann. Scient.Éc.Norm.Sup. 4e série t.12.* (1979), pp. 295-333
- [5] Deligne, P. and Mumford, D. The irreducibility of the space of curves of given genus *Publ. Math. I.H.E.S.* 36 (1969) pp. 75–110
- [6] Humphries, S. P. Generators for the mapping class group, in “Topology of Low-dimensional Manifolds.” *Lecture Notes in Mathematics* 722 (1979), Springer, pp. 44–47.
- [7] Kohno, T. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures, *Inv. Math.* 82 (1985), 57-75.
- [8] Lickorish, W. B. R. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 60 (1964) 769–778.
- [9] Lickorish, W. B. R. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold (corrigendum). *Proc. Camb. Phil. Soc.* 62 (1966) 679–681.
- [10] Matsumoto, M. Combinatorial Dehn Twists. *RIMS preprints* 925 (1993)
- [11] Oda, T. A note on the ramification of the fundamental group of an algebraic curve II. To appear in *J. of Number Theory*.
- [12] Oda, T. A lower bound for the graded modules associated with the relative weight filtration on the Teichmüller group. a manuscript.
- [13] Penner, R. C. Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces. *J. Differential Geometry* 27 (1988) 35–53.
- [14] Serre, J.-P. “Arbres, amalgames, SL_2 ” *Astérisque* 46 (1977) Chap. I.
- [15] Wajnryb, B. A simple representation for the mapping class group of an orientable surface. *Israel J. Math.* 45 (1983) 157–174.

PARAGROUPS AND FINITE DIMENSIONAL SEMISIMPLE ALGEBRAS

NOBUO IIYORI, TOYOHARU ITOH, TAKUYA
KITAMOTO AND TETSUYA MASUDA

ABSTRACT. In this note, we try to present an algebraic framework for the paragroups of Ocneanu in terms of finite dimensional semisimple algebras in the case that the corresponding "Jones index" is integer. We then see that this notion is regarded to be an extended version of finite dimensional semisimple Hopf algebras with trace.

1. INTRODUCTION

The Ocneanu's paragroup has its origin in the classification of the subfactors of type II_1 -factors in operator algebra theory. This classification problem was first systematically studied by V. Jones [4] in terms of so called "Jones index". Then, one of the most important discovery of Jones is that for a given subfactor $M \supset N$, the set of all possible values of the index $[M : N]$ is quite restrictive. Namely, the set is given by the union of the set of distinguished values $\{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} : n = 3, 4, \dots\}$ and the closed interval $[4, \infty]$. Then these discrete distinguished values $\{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} : n = 3, 4, \dots\}$ are shown to be related to the Dynkin diagrams of type A, D and E. (See [1], for example.) These discoveries also lead us to the famous "Jones polynomials" for knots and links. (See [5] or [6], for example.)

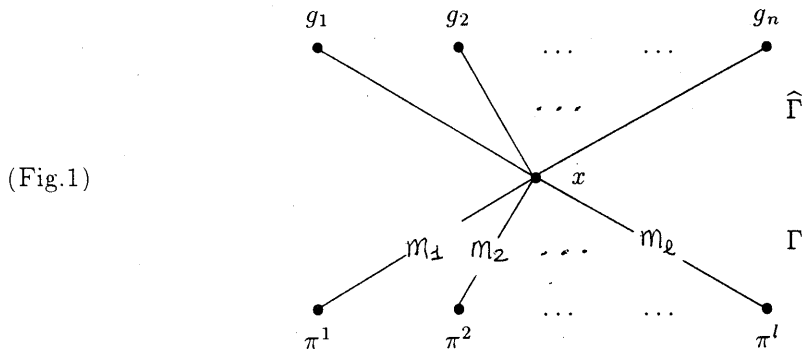
Then, inspired by the development of the classification problems of subfactors and the related subjects, A. Ocneanu introduced in 1987 the notion of paragroups in [8]. This aims to give a complete invariant for the subfactor of a reasonably good class in terms of finite combinatorics with some extra data defined on these objects. The notion of paragroup is now regarded to be closely related to the theory of rational conformal field theory, solvable lattice models and the representation of quantum groups at roots of unity.

The basic idea of the paragroup is to think of a virtual Galois group type object for a given subfactor $M \supset N$ regarded as a field with its subfield. In other words, the type II_1 -factor M can also be regarded as the "generalized crossed product of N by the paragroup". A typical example of obtaining a paragroup comes from the outer action α of a finite group G on the hyperfinite factor N of type II_1 . Then we obtain the crossed product von Neumann algebra $M := N \times_{\alpha} G$. In this particular situation, the combinatorial object which we obtain from this factor-subfactor inclusion $N \times_{\alpha} G =: M \supset N$ is the pair of the

Key words and phrases. paragroup, semisimple Hopf algebra, Bratteli diagrams, bipartite graphs, finite groups.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

bipartite graphs $\widehat{\Gamma}$ and Γ with their vertex sets given by $\{x, g_1, \dots, g_n\}$ and $\{x, \pi^1, \dots, \pi^l\}$, respectively. Then the diagram is described as:



where $n = |G|$ is the order of the finite group G and $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ is the list of G as a set. Furthermore, $\text{Rep}(G) = \{\pi^1, \dots, \pi^l\}$ is the set of all equivalence classes of irreducible representations and m_j is the dimension of the representation π^j for $j = 1, \dots, l$. These integers m_j correspond to the multiplicities of the edges connecting x and π^j . Here we remark that the equality $n = |G| = \sum_{j=1}^l m_j^2$ holds.

From the ring theoretical point of view, the bipartite graph $\widehat{\Gamma}$ is the Bratteli diagram associated with the trivial ring k into the algebra $\text{Func}(G, k)$ of all k -valued functions on G . (Here, we fixed some suitable field k of characteristic zero which is \mathbb{C} in the case of dealing with the problems directly related to operator algebras.) Then the bipartite graph Γ is the Bratteli diagram associated with the trivial ring k into the group algebra $k[G]$ of G . In this case, it is seen that the Perron-Frobenius eigenvalues of the two bipartite graphs Γ and $\widehat{\Gamma}$ coincide and given by $\sqrt{n} = \sqrt{|G|}$. Furthermore, the entries of the corresponding Perron-Frobenius eigenvectors determines the dimensions of the simple component of the Wedderburn decompositions of the semisimple algebras $\text{Func}(G, k)$ and $k[G]$.

In this particular situation, the "extra data" defined on these combinatorial objects is called the "connection" which is the set of all matrix elements, evaluated on the set G of all of the irreducible representations $\text{Rep}(G) = \{\pi^1, \dots, \pi^l\}$. The Ocneanu's framework requires us to deal with the "connection" which satisfies the "flatness condition". Then in this particular situation, the "flatness condition" corresponds to the second orthogonality condition for the above matrix elements $\{\pi_{ij}^p(g)\}_{i,j \in I_p, p=1, \dots, l, g \in G}$.

In this note, we do not intend to go into the detail of the definitions of Ocneanu's paragroup. (For example, see [9] for the details.) However, we note that the notion of paragroup is described completely in terms of finite combinatorial data and carries (almost) all of the informations contained in the subfactor to start with. Furthermore, the framework of paragroup provides us a new category which contains ordinary finite groups.

As we have already mentioned, finite groups give us a special type of paragroups. However, apart from the examples that we obtain from finite groups, we have very small numbers of explicitly known examples of paragroups. Here we list up the major classes of paragroups which are relatively known among the specialists of paragroups (mainly from

the point of view of operator algebras).

- (i) The paragroups obtained by finite groups. (The above typical examples.)
- (ii) The paragroups obtained by the Dynkin diagrams of type A, D and E.
- (iii) The paragroups obtained by the extended Dynkin diagrams. (For example, see [1] or [2].)
- (iv) Three (two) examples in the book [1].
- (v) Recent example by Haagerup.
- (vi) The paragroups obtained by inclusions of finite groups $H \subset G$.

In the above listed examples of paragroups, the cases (i) are mathematically equivalent to that of finite groups and the corresponding "Jones index" is given by the order $|G|$ of the finite group G . Then the cases (ii) correspond to the cases when we have their "Jones index" in the discrete distinguished values $\{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} : n = 3, 4, \dots\}$ as we have already mentioned. The cases (iii) are the cases when we have their "Jones index" always equal to 4. Then it is seen that the cases of having their "Jones index" greater than 4 have not yet been very carefully studied. From the point of view of operator algebras, we have no special reason to stick to the cases of having integer "Jones index". Indeed, the people in operator algebras seem to be interested in the case of subfactors with its "Jones index" closest to 4 from above with some certain analytical conditions. (The case (v).) However, if we turn to the cases (vi), the corresponding "Jones index" is given by $\frac{|G|}{|H|} = |G/H|$ and then we are able to understand these cases from the point of view of a generalization of Hopf algebras with traces satisfying some certain conditions. This is one of the main point of this note.

It is said that the notion of paragroups has several different aspects. Ocneanu claims that the paragroups are regarded to be a sort of "quantization" of finite groups. He also claims that this notion corresponds to a generalization of Hopf algebras. However, nothing seems to have claimed explicitly in this direction. In the remaining part of this note, we put a special focus on the examples of the class (vi) to discuss about a generalization of Hopf algebras with traces satisfying some certain conditions. We first discuss about some combinatorics and related subjects in section 2. Then in section 3, we try to explain some essence of "Tannaka algebra" by making use of the situation obtained by a finite group G with its subgroup H . Then in the last section, we pass to the picture of bimodules and their intertwiners following the original formulation of Ocneanu to clarify the relation between our framework and the framework developed from the point of view of operator algebras. Our main point is that when we restrict to the case of having integer "Jones index", we are able to stay all the time in the category of finite dimensional semisimple algebras. This is contrast to the case that in general (having non-integer "Jones index"), we are obliged to deal with the transcendental infinite dimensional algebras (type II_1 -factor).

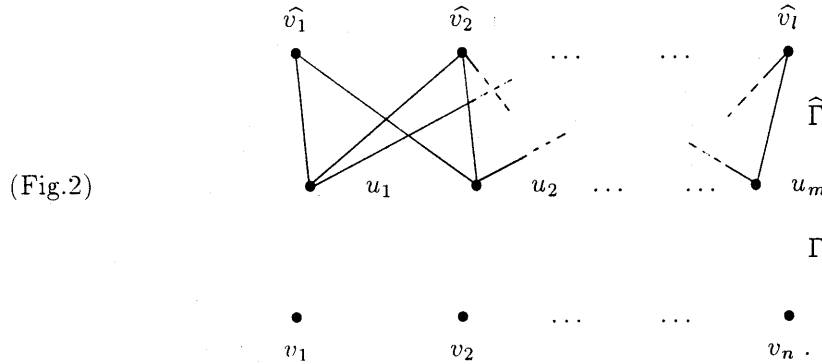
We remark that this note is a research announcement of our paper [3] which is now in preparation.

2. SOME COMBINATORICS AND THE ASSOCIATED SEMISIMPLE ALGEBRAS

The first half of this section is devoted to the discussions on some combinatorics which are regarded to be the underlying structure for the paragroups. By making use of this

combinatorial arguments, we classify our "underlying structures" into "integral type" and "non-integral type". In the following discussions, we concentrate our attention to the "paragroups of integral type". We then pass to some discussions concerning Bratteli diagrams and the towers of algebras in the case that the given bipartite graph is of "integral type".

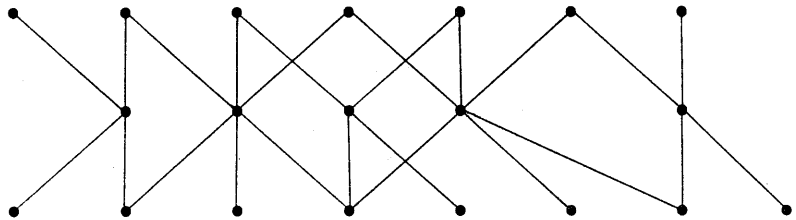
As a generalized situation of the pairs of bipartite graphs as in Fig.1, we introduce a notion of 2-skeleton as follows. We first consider the pairs of bipartite graphs $\widehat{\Gamma}$ and Γ with their vertex sets given by $\widehat{V} \sqcup U$ and $U \sqcup V$, respectively. Here we suppose that these vertex sets \widehat{V} , U and V are given by $\widehat{V} = \{\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_l\}$, $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ and $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, respectively. Then the diagram is described as:



In this diagram, we remark that the multi-edges in the graphs $\widehat{\Gamma}$ and Γ are allowed as in the case of Fig.1. Then the diagram Fig.2 is called the **2-skeleton** if the condition:

$$\# \left\{ \begin{array}{c} \widehat{v} \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ x \quad y \end{array} : \widehat{v} \in \widehat{V} \right\} = \# \left\{ \begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \quad \bullet \\ \backslash \quad / \\ \bullet \\ v \end{array} : v \in V \right\}$$

is satisfied for any $x, y \in U$. For example, a non-trivial 2-skeleton due to Ocneanu (see [9]) is given as follows:



Then the two incident matrices $I(\widehat{\Gamma})$ and $I(\Gamma)$ given by

$$\begin{aligned} I(\widehat{\Gamma}) &: \text{Vect}(\widehat{V}) \oplus \text{Vect}(U) \longrightarrow \text{Vect}(\widehat{V}) \oplus \text{Vect}(U) \\ I(\Gamma) &: \text{Vect}(U) \oplus \text{Vect}(V) \longrightarrow \text{Vect}(U) \oplus \text{Vect}(V) \end{aligned}$$

satisfies the equality

$$T(\Gamma)T(\widehat{\Gamma})T(\Gamma) = T(\widehat{\Gamma})T(\Gamma)T(\widehat{\Gamma})$$

on $\text{Vect}(\widehat{V}) \oplus \text{Vect}(U) \oplus \text{Vect}(V)$ if and only if the two bipartite graphs $(\widehat{\Gamma}, \Gamma)$ is a 2-skeleton. Under these conditions we have:

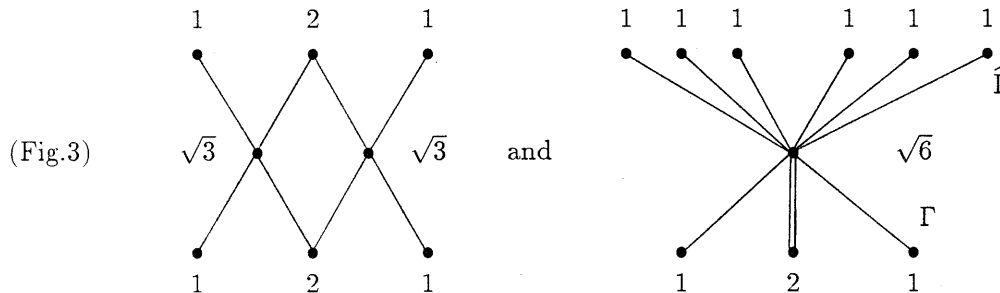
- (1) The non-zero spectrum set $\text{Spec}(T(\widehat{\Gamma})) \setminus \{0\}$ coincides with the non-zero spectrum set $\text{Spec}(T(\Gamma)) \setminus \{0\}$ including the multiplicities. We denote by $\text{Spec}(\widehat{\Gamma}, \Gamma)^\times$ the above common non-zero spectrum set.
- (2) For any $\beta \in \text{Spec}(\widehat{\Gamma}, \Gamma)^\times$, the eigenvectors of the incident matrices $T(\Gamma)$ and $T(\widehat{\Gamma})$ fit well to define the weight function $\mu : \widehat{V} \sqcup U \sqcup V \rightarrow k$. We remark that the choice of the weight function μ is unique up to scalar multiple if the eigenvalue β is multiplicity free. In the case that the eigenvalue β is with multiplicity, we have lots more choice of the corresponding weight functions.

In our framework, this eigenvalue β corresponds to the square root of the "Jones index" associated with the paragroup.

Now, our classification of the 2-skeletons $(\widehat{\Gamma}, \Gamma)$ combined with the choice of the eigenvalue $\beta \in \text{Spec}(\widehat{\Gamma}, \Gamma)^\times$ is given as follows. The combination $(\widehat{\Gamma}, \Gamma, \beta)$ is called the **weighted 2-skeleton**. A weighted 2-skeleton $(\widehat{\Gamma}, \Gamma, \beta)$ is said to be of "integral type" if β^2 is an integer. In this case, the corresponding weight function μ is chosen to satisfy the conditions:

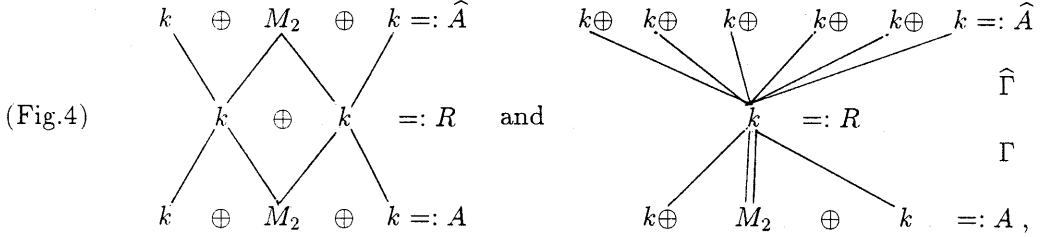
$$(2.1) \quad \mu|_{\widehat{V} \sqcup V} \in \mathbb{N}, \quad \mu|_U \in \beta\mathbb{N}.$$

On the other hand, the weighted 2-skeleton $(\widehat{\Gamma}, \Gamma, \beta)$ is called "non-integral type" if β^2 is not an integer. In this case, the corresponding weight function μ cannot be normalized to satisfy the above conditions. The examples of "integral type" weighted 2-skeletons are given by:



The left diagram of Fig.3 is an example coming from the Dynkin diagram of type A_5 ($\widehat{\Gamma} = \Gamma$) with its choice of the eigenvalue $\beta = \sqrt{3}$ which is the Perron-Frobenius eigenvalue of the graph A_5 . (As far as the Perron-Frobenius eigenvalues are concerned among those graphs obtained by the Dynkin diagrams, the cases A_5 and D_4 are the only cases when we have the weighted 2-skeleton of "integral type".) Then the right diagram of Fig.3 is an example coming from the symmetric group S_3 of order 6. In this case, the choice of the eigenvalue is $\beta = \sqrt{6}$ which is the Perron-Frobenius eigenvalue of the graph $\widehat{\Gamma}$ and Γ at the same time.

In the "integral type" weighted 2-skeleton, the weight function μ normalized so as to satisfy the condition (2.1) determines the algebras on the corresponding diagram. For example, in the case of the diagrams described in Fig.3, the algebras are determined as follows:



respectively, where k is the coefficient field and $M_n = M_n(k)$ is the algebra of $n \times n$ -matrices over the field k . Namely, the (absolute values of the) integers $\mu|_{\widehat{V}}$, $\beta^{-1} \mu|_U$ and $\mu|_V$ determines the size of the matrix algebras located at the vertex sets \widehat{V} , U and V , respectively.

Furthermore, this normalized integers determined by the weight function μ also determines the traces on these algebras. For example, in the case of the algebras \widehat{A} and A described in the right diagram of Fig.4, the normalized traces $\widehat{\tau} : \widehat{A} \rightarrow k$, $\tau_0 : R \rightarrow k$ and $\tau : A \rightarrow k$ are determined by $\widehat{A} = k \oplus M_2 \oplus k \ni \widehat{x} \oplus \widehat{y} \oplus \widehat{z} \mapsto \frac{1}{6}(\widehat{x} + 2 \text{Tr}(\widehat{y}) + \widehat{z}) \in k$, $R = k \oplus k \ni u \oplus v \mapsto \frac{1}{2}(u + v) \in k$ and $A = k \oplus M_2 \oplus k \ni x \oplus y \oplus z \mapsto \frac{1}{6}(x + 2 \text{Tr}(y) + z) \in k$, respectively, where Tr is the ordinary trace on the matrix algebra obtained by the diagonal sum.

Conversely, if we have an unital inclusion $i : R \rightarrow A$ of a semisimple algebra R into another semisimple algebra A , we are able to think of the Bratteli diagram $B(R, A)$ associated with the inclusion $i : R \rightarrow A$. Thus we obtain the bipartite graph Γ with its vertex set given by the disjoint union of the semisimple components of A and R .

Under these notations, we introduce the notion of **basic triangle** which is given by the commutative diagram:

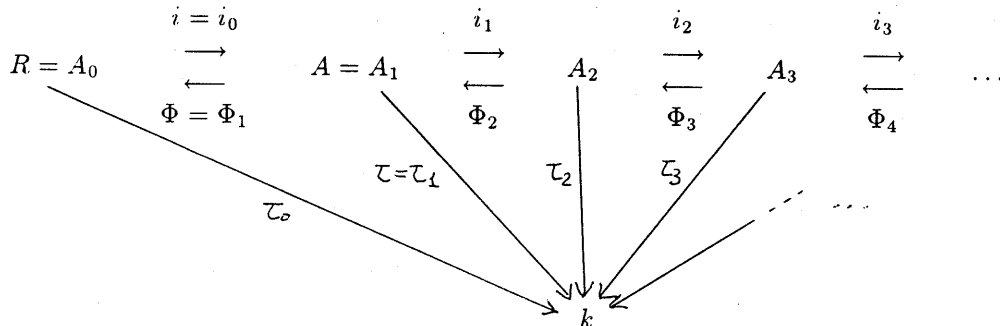
$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\tau_0} & k \\
 \downarrow i & \nearrow \tau & \\
 A & &
 \end{array}$$

with an extra mapping $\Phi : A \rightarrow R$ satisfying

- (1) $i(1_R) = 1_A$,
- (2) $\Phi \circ i = id_R$,
- (3) $\tau = \tau_0 \circ \Phi$,
- (4) τ and τ_0 are normalized non-degenerate traces,
- (5) $\Phi(i(r_0)ai(r_1)) = r_0\Phi(a)r_1$ holds for $a \in A$ and $r_0, r_1 \in R$.

Conversely, the mappings i and Φ are determined by the Bratteli diagram $B(R, A)$ associated with the inclusion $i : R \rightarrow A$.

Then the above basic triangle gives us the following tower of basic triangles:



with the isomorphisms

$$\begin{aligned}
 A_{i+1} &\simeq \text{End}_{A_{i-1}}(A_i) := \{x \in \text{End}(A_i) : x(\xi y) = x(\xi)y, \xi \in A_i, y \in A_{i-1}\} \\
 &\simeq \langle A_i, i_{i-1} \circ \Phi_i \rangle \\
 &\simeq M_{\beta^2}(k) \otimes A_{i-1} \quad (i \geq 1)
 \end{aligned}$$

hold, where $\langle A_i, i_{i-1} \circ \Phi_i \rangle$ is the subalgebra of $\text{End}(A_i)$ generated by the left multiplications of $\xi \in A_i$ and the linear transformation $i_{i-1} \circ \Phi_i$ of A_i .

3. THE TANNAKA ALGEBRA OBTAINED BY $H \subset G$

In the Ocneanu's framework of paragroups, the bipartite graphs and the flat connections defined on these combinatorial objects are well understood in terms of (infinite dimensional) bimodules. As we have already pointed out, if we restrict our attention to the case of having integer "Jones index", we are able to build up our framework of understanding the paragroups only in terms of finite dimensional semisimple algebras. This enables us to formulate a new notion which generalizes the Hopf algebras with traces satisfying some suitable conditions. We call this new notion by the name "**Tannaka algebras**". In view of this new notion, the flat connections are well understood in terms of the linear mappings which we call the **Fourier mappings**.

In the following discussions, we intend to explain the notion of "Tannaka algebra" in the case that we have an inclusion of a finite group H into another finite group G . This seems to be quite a restrictive situation. However, this class of examples had not yet been studied very much even from the point of view of operator algebras. (For the operator algebraic research in this direction, we refer to [7].) Then, as in the case of ordinary Hopf algebras, this example coming from the inclusion $H \subset G$ of a finite group H inside a finite group G is a typical example and rich enough to be able to see some basic and important structures of our "Tannaka algebras".

Instead of dealing with a general theory of "Tannaka algebras", we intend to give the explicit formulas for the case arising from a finite group G with its subgroup H .

Let G be a finite group with a subgroup H . We then consider the following three semisimple algebras $\hat{A} := \text{Func}(G/H, k) \times_r H$, $R := k[H]$ and $A := k[G]$. We remark that

the algebra $\text{Funct}(G/H, k) \times_r H$ is the crossed product algebra of the algebra $\text{Funct}(G/H, k)$ of k -valued functions on the quotient set G/H by the action of the group H determined by the left action of H on G/H . In other words, the algebra $\text{Funct}(G/H, k) \times_r H$ is the algebra generated by the characteristic functions $[gH]^* \in \text{Funct}(G/H, k)$ for $gH \in G/H$ and $h \in H$ with the relations $h[gH]^* h^{-1} = [hgH]^*$. We further remark that the characteristic function $[gH]^*$ for $gH \in G/H$ is determined by

$$[gH]^*(\tilde{g}H) := \delta_{gH, \tilde{g}H} = \begin{cases} 1 & \text{if } gH = \tilde{g}H \\ 0 & \text{if } gH \neq \tilde{g}H \end{cases}$$

Now, it is seen that the mappings $\hat{\tau} : \hat{A} \rightarrow k$, $\tau_0 : R \rightarrow k$ and $\tau : A \rightarrow k$ determined on the generators by

$$\begin{aligned} \hat{\tau}([gH]^* h) &:= \frac{1}{\beta^2} \delta_{h, e}, \\ \tau_0(h) &:= \delta_{h, e}, \\ \tau(g) &:= \delta_{g, e} \end{aligned}$$

give us the normalized traces on the algebras \hat{A} , R and A , respectively, where $e \in H \subset G$ is the unit of the groups H and G .

Then by the natural inclusion $\hat{i} : R \rightarrow \hat{A}$ and the linear mapping $\hat{\Phi} : \hat{A} \rightarrow R$ determined on the generators by

$$\hat{\Phi}([gH]^* h) := \frac{1}{\beta^2} h,$$

the pair of algebras (R, \hat{A}) forms a basic triangle. Similarly, by the natural inclusion $i : R \rightarrow A$ and the mapping $\Phi : A \rightarrow R$ determined on the generators by

$$\Phi(g) := \begin{cases} g & \text{for } g \in H \\ 0 & \text{for } g \notin H, \end{cases}$$

the pair of algebras (R, A) also forms a basic triangle. It is also remarked that the Bratteli diagrams $B(R, \hat{A})$ and $B(R, A)$ form a 2-skeleton. In this case, the common Perron-Frobenius eigenvalue β is given by $\sqrt{\frac{|G|}{|H|}} = \sqrt{|G/H|}$. This is to say that the corresponding "Jones index" is equal to $\frac{|G|}{|H|} = |G/H|$.

Next we pass to the description of the important bijective mappings which we call the **Fourier mappings** of this system. The two linear mappings $F : A \rightarrow \hat{A}$ and $\hat{F} : \hat{A} \rightarrow A$ are determined on the generators by

$$\begin{aligned} F : A \ni g &\mapsto \beta [gH]^* \sigma(g) \in \hat{A} \\ \hat{F} : \hat{A} \ni h [gH]^* &\mapsto \frac{1}{\beta} h \rho([gH])^{-1} \in A \end{aligned}$$

where the mappings F and \hat{F} depend on the choice of the section $\rho : G/H \rightarrow G$ of the canonical projection $\pi : G \rightarrow G/H$ satisfying $\rho([H]) = e$ and the mapping $\sigma : G \rightarrow H$

determined by $g = \rho([gH])\sigma(g)$ for any $g \in G$. Then it is seen by the definition that the mapping F is right R -linear and the mapping \widehat{F} is left R -linear. Now, the equality:

$$\widehat{\Phi}(\xi F(a)) = \Phi(\widehat{F}(\xi)a) \text{ for } \xi \in \widehat{A} \text{ and } a \in A$$

plays an important role in the whole framework of our "Tannaka algebra". This equality allows us to define the non-degenerate bilinear forms B and \widehat{B} defined by

$$B : A \otimes \widehat{A} \ni a \otimes \xi \mapsto \widehat{\tau}(F(a)\xi) = \beta\tau_0 \circ \widehat{\Phi}(\xi F(a)) = \beta\tau_0 \circ \Phi(\widehat{F}(\xi)a) = \tau(a\widehat{F}(\xi)) \in k$$

and

$$\widehat{B} : \widehat{A} \otimes A \ni \xi \otimes a \mapsto \widehat{\tau}(\xi\widehat{F}^{-1}(a)) = \beta\tau_0 \circ \widehat{\Phi}(\widehat{F}^{-1}(a)\xi) = \beta\tau_0 \circ \Phi(aF^{-1}(\xi)) = \tau(F^{-1}(\xi)a) \in k$$

satisfy $B(ar, \xi) = B(a, r\xi)$ and $\widehat{B}(\xi r, a) = \widehat{B}(\xi, ra)$ for $a \in A$, $r \in R$ and $\xi \in \widehat{A}$.

In fact, when we turn to our explicit situation, these non-degenerate bilinear forms B and \widehat{B} are given on the generators by

$$\begin{aligned} B(\tilde{g}, h[gH]^*) &= \delta_{\tilde{g}H, gH} \delta_{\sigma(\tilde{g})h, e}, \\ \widehat{B}([gH]^*, \tilde{g}) &= \delta_{gH, \tilde{g}^{-1}H} \delta_{h, \sigma(\tilde{g}^{-1})}. \end{aligned}$$

Then by defining the "antipode" mappings by $S := \widehat{F} \circ F$ and $\widehat{S} := F \circ \widehat{F}$, these two linear mappings are isomorphisms and we have

$$\begin{aligned} \widehat{B}(\xi, S(a)) &= \widehat{B}(\widehat{S}(\xi), a), \\ B(S^{-1}(a), \xi) &= \widehat{B}(\xi, a) = B(a, \widehat{S}^{-1}(\xi)). \end{aligned}$$

In our explicit situation, these two "antipode" mappings are given on the generators by

$$\begin{aligned} \widehat{S}(g) &= \sigma(g)\rho([\sigma(g)^{-1}gH])^{-1}, \\ S(h[gH]^*) &= [h\rho([gH])^{-1}H]^*\sigma(h\rho([gH])^{-1}). \end{aligned}$$

Now, the left coproduct $\square_l : A \rightarrow A \otimes A$ is defined by $(\widehat{B} \otimes \widehat{B})(\xi \otimes \eta, \square_l(a)) = \widehat{B}(\xi\eta, a)$ for $\xi, \eta \in \widehat{A}$ and $a \in A$. Then this left coproduct \square_l satisfies $\square_l(ra) = (1 \otimes r)\square_l(a)$ for $r \in R$ and $a \in A$. We also define the left counit $\varepsilon_l : A \rightarrow R$ by $\varepsilon_l := \beta\widehat{\Phi} \circ \widehat{F}^{-1}$. It is seen that the mapping ε_l is left R -linear.

In our explicit situation, these two mappings \square_l and ε_l are given on the generators by

$$\begin{aligned} \square_l(g) &= \sum_{h \in H} h\rho([g^{-1}H])^{-1} \otimes \sigma(g^{-1})^{-1}h^{-1}\rho([hg^{-1}H])^{-1}, \\ \varepsilon_l(g) &= \sigma(g^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Then we have the following commutative diagrams of left R -linear mappings:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\square_l} & A \otimes A & \xrightarrow{S^{-1} \otimes I_A} & A \otimes A & \xrightarrow{\text{flip}} & A \otimes A \xrightarrow{m} A \\
 & \searrow \varepsilon_l & & & & & \nearrow \\
 & & & & R & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\square_l} & A \otimes A & \xrightarrow{I_A \otimes \varepsilon_l} & A \otimes R & \xrightarrow{\text{flip}} & R \otimes A \xrightarrow{m} A \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|) .
 \end{array}$$

Similarly, the right coproduct $\square_r : A \rightarrow A \otimes A$ is also defined by $(B \otimes B)(\square_r(a), \xi \otimes \eta) = B(a, \eta\xi)$ for $a \in A$ and $\xi, \eta \in \widehat{A}$. Then this right coproduct \square_r satisfies $\square_r(ar) = \square_r(a)(1 \otimes r)$ for $a \in A$ and $r \in R$. We also define the right counit $\varepsilon_r : A \rightarrow R$ by $\varepsilon_r := \beta\widehat{\Phi} \circ F$. It is seen that the mapping ε_r is right R -linear.

In our explicit situation, these two mappings \square_r and ε_r are given on the generators by

$$\begin{aligned}
 \square_r(g) &= \sum_{h \in H} \rho([gH])h \otimes \rho(h^{-1}g)h^{-1}\sigma(g), \\
 \varepsilon_r(g) &= \sigma(g).
 \end{aligned}$$

Then we also have the following commutative diagrams of right R -linear mappings:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\square_r} & A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes I_A} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\
 & \searrow \varepsilon_r & & & & & \nearrow \\
 & & & & R & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{\square_r} & A \otimes A & \xrightarrow{I_A \otimes \varepsilon_r} & A \otimes R & \xrightarrow{m} & A \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|) .
 \end{array}$$

These two families of diagrams are equivalent due to the diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\square_r} & A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes S} & A \otimes A \\
 s \downarrow & & & & \nearrow \neq \omega_\rho \\
 A & \xrightarrow{\square_l} & A \otimes A & &
 \end{array}$$

and the equality $\varepsilon_l \circ S = \varepsilon_r$.

We also have the similar structures on \hat{A} . Namely, the right coproduct $\hat{\square}_r : \hat{A} \rightarrow \hat{A} \otimes \hat{A}$ is defined by $(\hat{B} \otimes \hat{B})(\hat{\square}_r(\xi), a \otimes b) = \hat{B}(\xi, ab)$ for $\xi \in \hat{A}$ and $a, b \in A$. Then this right coproduct $\hat{\square}_r$ satisfies $\hat{\square}_r(\xi r) = \hat{\square}_r(a)(r \otimes 1)$ for $\xi \in \hat{A}$ and $r \in R$. We also define the right counit $\hat{\varepsilon}_r : \hat{A} \rightarrow R$ by $\hat{\varepsilon}_r := \beta \Phi \circ F^{-1}$. It is seen that the mapping $\hat{\varepsilon}_r$ is right R -linear.

In our explicit situation, these two mappings $\hat{\square}_r$ and $\hat{\varepsilon}_r$ are given on the generators by

$$\begin{aligned}
 \hat{\square}_r([gH]^*h) &= \sum_{g_1 g_2 = \rho([gH])h} [g_2 H]^* \sigma(g_2) \otimes [g_1 H]^* \sigma(g_1), \\
 \hat{\varepsilon}_r([gH]^*h) &= \begin{cases} h & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Then we have the following commutative diagrams of right R -linear mappings:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\square}_r} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{I_{\hat{A}} \otimes \hat{S}^{-1}} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\text{flip}} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{m} & \hat{A} \\
 & & & & & & & & \times \dim R (= |H|) \\
 & & & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & & & R \\
 & & & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & & & \hat{A}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\square}_r} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}_r \otimes I_{\hat{A}}} & R \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\text{flip}} & \hat{A} \otimes R & \xrightarrow{m} & \hat{A} \\
 & & & & & & & & \times \dim R (= |H|) \\
 & & & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & & & R \\
 & & & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & & & \hat{A}
 \end{array}$$

In the same manner as in the case of A , the left coproduct $\hat{\square}_l : \hat{A} \rightarrow \hat{A} \otimes \hat{A}$ is also defined by $(B \otimes B)(a \otimes b, \hat{\square}_l(\xi)) = B(ba, \xi)$ for $a, b \in A$ and $\xi \in \hat{A}$. Then this left coproduct $\hat{\square}_l$ satisfies $\hat{\square}_l(r\xi) = (r \otimes 1)\hat{\square}_l(\xi)$ for $r \in R$ and $\xi \in \hat{A}$. We also define the left counit $\hat{\varepsilon}_l : \hat{A} \rightarrow R$ by $\hat{\varepsilon}_l := \beta \Phi \circ \hat{F}$. It is seen that the mapping $\hat{\varepsilon}_l$ is left R -linear.

In our explicit situation, these two mappings $\hat{\square}_l$ and $\hat{\varepsilon}_l$ are given on the generators by

$$\begin{aligned}
 \hat{\square}_l(h[gH]^*) &= \sum_{g_2 g_1 = \rho([gH])h^{-1}} \sigma(g_1)^{-1} [g_1 H]^* \otimes \sigma(g_2)^{-1} [g_2 H]^*, \\
 \hat{\varepsilon}_l(h[gH]^*) &= \begin{cases} h & \text{if } g \in H \\ 0 & \text{if } g \notin H. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Then we also have the following commutative diagrams of left R -linear mappings:

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}_l} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{I_{\hat{A}} \otimes \hat{S}} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{m} & \hat{A} \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 & & R & & & & \\
 & \widehat{\varepsilon}_l & & & & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}_l} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\varepsilon}_l \otimes I_{\hat{A}}} & R \otimes \hat{A} & \xrightarrow{m} & \hat{A} \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 & & & & R \otimes \hat{A} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \times \dim R (= |H|) .
 \end{array}$$

These two families of diagrams are again equivalent due to the diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}_l} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\hat{S} \otimes \hat{S}} & \hat{A} \otimes \hat{A} \\
 \hat{S} \downarrow & & & & \nearrow \\
 \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\sigma}_r} & \hat{A} \otimes \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\mu}_p} & \hat{A} \otimes \hat{A}
 \end{array}$$

and the equality $\hat{\varepsilon}_r \circ \hat{S} = \hat{\varepsilon}_l$.

This is a rough sketch of the description of the axioms which define "Tannaka algebra" with a special emphasis on the case that we are given a finite group G with its subgroup H . Then it is seen that this notion is a generalization of finite dimensional semisimple Hopf algebras with a trace satisfying suitable conditions. Here we remark that the commutative diagrams involving our "antipodes" are essential to have a nice category. From the point of view of Ocneanu's paragroup, the Fourier mappings correspond to think of the "connection" and the conditions given by the commutative diagrams correspond to the "flatness" of the "connection". Roughly speaking, the "flatness" condition also corresponds to the condition that the algebra generated by the algebras A and \hat{A} is isomorphic to the tensor product of R with the matrix algebra of its size β^2 . More precisely, by making use of the Fourier mappings F or \hat{F} , we are able to identify A and \hat{A} as k -vector spaces so that we have the isomorphism $\text{End}(A) \simeq \text{End}(\hat{A})$. On the other hand, by using the (left or right) regular representation π , the k -algebra A is regarded as a subalgebra of $\text{End}(A)$ and the same thing holds for \hat{A} by $\hat{\pi}$. Therefore we can think of the algebra generated by A and \hat{A} through these regular representations π and $\hat{\pi}$. Then we have

$$\langle \pi(A), \hat{\pi}(\hat{A}) \rangle \simeq \text{Mat}(\beta^2, k) \otimes R .$$

This isomorphism is quite explicitly observed in the case of A and \hat{A} obtained by a finite group G with its subgroup H described in this section.

This isomorphism explains very well the reason why we are interested in the "paragroups of integral type". Indeed, if we have no integrality assumption on a given "paragroup", we are not able to deal only with the finite dimensional algebras. (We are obliged to use the matrix algebra of "fractional size".) However, we still have some hope of formulating these general paragroups in an algebraic context. This will be our future problem.

4. RELATION TO OCNEANU'S FRAMEWORK

In this section, we briefly describe the relation between our framework and the framework given by Ocneanu. The key point is the relation between our Fourier mappings and the (flat) connection which is well understood in terms of the bimodule picture. (For the bimodule picture in the operator algebraic context, we refer to [10].)

We keep the notations of the previous section. Let $\text{Irr}^l(R)$ (resp. $\text{Irr}^r(R)$) be the set of all left (resp. right) irreducible representations of R and $\text{IB}_R(A)$ (resp. $\text{IB}_R(\widehat{A})$) be the irreducible components of A (resp. \widehat{A}) viewed as a R -bimodule. Since we consider the case that the algebras A and \widehat{A} are semisimple over k , we are able to associate a projection Pr_M in the corresponding algebra for each $M \in \text{IB}_R(A) \sqcup \text{IB}_R(\widehat{A})$.

Let $\varphi_r, \widehat{\varphi}_r, \varphi_l$ and $\widehat{\varphi}_l$ be the elements of the spaces $\text{Hom}({}_A A, {}_A A \otimes_R N)$, $\text{Hom}({}_{\widehat{A}} \widehat{A}, {}_{\widehat{A}} \widehat{A} \otimes_R N)$, $\text{Hom}(A_A, L \otimes_R A_A)$ and $\text{Hom}(\widehat{A}_{\widehat{A}}, L \otimes_R \widehat{A}_{\widehat{A}})$, respectively for $N \in \text{Irr}^l(R)$ and $L \in \text{Irr}^r(R)$. Then, for $M \in \text{IB}_R(A)$ and $\widehat{M} \in \text{IB}_R(\widehat{A})$, we have the following diagram of intertwiners:

$$\begin{array}{ccc} N & \xleftarrow{c := (\text{Pr}_M \circ \varphi_r)^*} & M \\ d := \text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_r \downarrow & & \uparrow b := \text{Pr}_M \circ \varphi_l \\ \widehat{M} & \xrightarrow{a := (\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_l)^*} & L \end{array}$$

where $(\text{Pr}_M \circ \varphi_r)^*$ (resp. $(\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_l)^*$) is the dual of $\text{Pr}_M \circ \varphi_r$ (resp. $\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_l$) as a linear mapping. Then by the irreducibility of $\widehat{M} \in \text{IB}_R(\widehat{A})$, there exists a scalar

$$\left(\begin{array}{ccc} N & \xleftarrow{c} & M \\ d \downarrow & & \uparrow b \\ \widehat{M} & \xrightarrow{a} & L \end{array} \right) \in k$$

such that

$$\left(\begin{array}{ccc} N & \xleftarrow{c} & M \\ d \downarrow & & \uparrow b \\ \widehat{A} & \xrightarrow{a} & L \end{array} \right) \text{id}_{\widehat{M}} = (\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_r) \circ (\text{Pr}_M \circ \varphi_r)^* \circ (\text{Pr}_M \circ \varphi_l) \circ (\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_l)^*$$

and we have an expression of the inverse of the Fourier mapping \widehat{F} as

$$\widehat{F}^{-1} = \sum_{N,L,M,\widehat{M}} \begin{pmatrix} N & \xleftarrow{c} & M \\ d \downarrow & & \uparrow b \\ \widehat{M} & \xrightarrow{a} & L \end{pmatrix} (\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_l) \circ (\text{Pr}_M \circ \varphi_l)^* .$$

The similar argument applied to the dualized diagram gives us an expression of the inverse of the Fourier mapping F as

$$F^{-1} = \sum_{N,L,M,\widehat{M}} \begin{pmatrix} N & \xleftarrow{d^*} & \widehat{M} \\ c^* \downarrow & & \uparrow a^* \\ M & \xrightarrow{b^*} & L \end{pmatrix} (\text{Pr}_M \circ \varphi_r) \circ (\text{Pr}_{\widehat{M}} \circ \widehat{\varphi}_r)^* .$$

The details of the discussions presented in this note will be published in our forthcoming paper [3].

REFERENCES

1. F. Goodman, P. de la Harpe and V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, vol. 14, MSRI publications, Springer, 1989.
2. M. Izumi and Y. Kawahigashi, *Classification of subfactors with the principal graph $D_n^{(1)}$* , Journal of Funct. Anal. **112** (1993), 257–286.
3. N. Iiyori, T. Itoh, T. Kitamoto and T. Masuda, *An algebraic framework of paragroups I*, in preparation.
4. V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.
5. V. F. R. Jones, *A polynomial invariants for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 103–111.
6. V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335–388.
7. H. Kosaki and S. Yamagami, *Irreducible bimodules associated with crossed product algebras*, preprint.
8. A. Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol.2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series **136** (1988), Cambridge University Press, 119–172.
9. A. Ocneanu, *Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors*, University of Tokyo Seminary Notes **45** (1991), (Notes recorded by Y. Kawahigashi).
10. S. Yamagami, *A report on Ocneanu's lecture*, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OHIO STATE UNIVERSITY, COLUMBUS, OH 43210, USA (ON LEAVE FROM UNIVERSITY OF TSUKUBA)

E-mail address: iiyori@math.ohio-state.edu

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, KASHIWARA, OSAKA, JAPAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA, TSUKUBA, 305 JAPAN

E-mail address: kita@math.tsukuba.ac.jp

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA, TSUKUBA, 305 JAPAN

E-mail address: tetsuya@math.tsukuba.ac.jp

§ 0 序

共形場理論と並んで量子群論の今後の応用が期待されている分野に、ジョーンズ指数理論がある。大ざっぱに言うと、これは古典的なガロア理論に於ける「体」を「 II_1 -型因子環」と呼ばれる無限次元の環におきかえたものである。ガロア理論に於けるガロア群に相当するような量子群を捜そうというわけである。このノートでは、ジョーンズ指数理論についての簡単な解説をすると共に「ガロア量子群」へ向けての筆者の最近の試みを紹介したい。

§ 1 ジョーンズ指数理論

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素よりなる環 M は $*$ -演算（共役作用素をとる操作）について閉じており、さらに弱位相について閉じているときフォン・ノイマン環と呼ばれる。さらに M が無限次元でつぎの三つの条件を満たすような線型汎関数 tr をちょうどひとつ持つとき M は II_1 -型因子環と呼ばれる。

- (1) $\text{tr}(1) = 1$
- (2) $\text{tr}(xy) = \text{tr}(yx) \quad (x, y \in M)$
- (3) $\text{tr}(x^*x) \geq 0 \quad (x \in M)$

II_1 -型因子環 M の部分環 N でそれ自体 II_1 -型因子環であるようなものを II_1 -型部分因子環と呼ぶ。ジョーンズ指数理論とは II_1 -型

部分因子環 $N \subset M$ を研究する作用素環論の一分野で、ジョーンズによる次の結果をその出発点としている。

定理 (ジョーンズ [J]) II_1 -型部分作用素環 $N \subset M$ に対し、その指数と呼ばれる実数値不変量 $[M:N]$ が定義される。そのとりうる値の全体は次の集合に一致する。

$$\{4\cos^2(\pi/h) \mid h=3,4,\dots\} \cup [4,\infty]$$

指数 $[M:N]$ が自然数 n のときには M は右 N -加群として階数 n の自由加群になる。例えば M が N と有限群 G との接合積 (半直積) であるときには $[M:N] = \#(G)$ となる。より一般に $[M:N] = n + n'$ ($n \in \mathbb{Z}$, $0 < n' < 1$) と小数部分がオマケについているときには、 M は「階数 n の自由 N -加群」 $\oplus eN$ と表される。ここで e は M の射影元 (自己共役なべき等元) で $\text{tr}(e) = n'$ となるようなものである。

§ 2 部分因子環の主グラフ

ジョーンズの指数は部分因子環の研究に於てきわめて基本的なものではあるが一般にはそれだけでは部分因子環の構造を決定することはできない。本節ではより強力な不変量である主グラフについて説明したい。

指数有限な II_1 -型部分因子環 $N \subset M$ に対し $M_2 = \text{End}_N(M)$ (M を右 N -加群と見なしたときの自己準同型全体) は再び II_1 -型因子環の構造を持っている。 $N \subset M$ から新しい II_1 -型部分因子環 $M \subset M_2$ を構成することをジョーンズの basic construction と呼

ぶ。指数 $[M_2:M]$ はもとのそれ $[M:N]$ に一致しており、特に有限である。そこでこの構成をさらに繰り返していくことにより Π_1 -型因子環の増大列 $N \subset M \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$ が得られる。

$$Y_k = \{x \in M_k \mid xn = nx \ (n \in N)\}$$

とおく。これは有限次元のフォン・ノイマン環、すなわち行列環の有限個の直和になる。つぎに $V_0 \cup V_1 = \{Y_k \text{ の既約表現}\} \cup \{Y_{k-1} \text{ の既約表現}\}$ を頂点の全体とする二部グラフ Γ_k を表現の分岐則

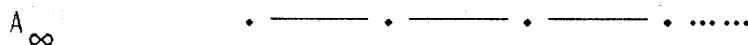
$$K = \bigoplus_{L \in V_1} \# \text{edge}(K, L)L \quad (K \in V_0)$$

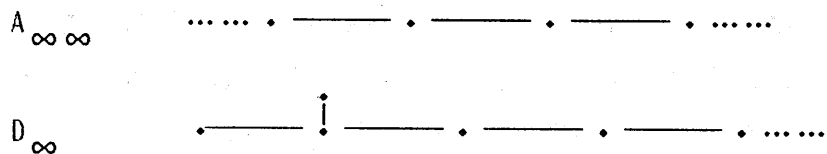
により定義する。すると Γ_k は自然に Γ_{k+1} の部分グラフになるので二部グラフ $\Gamma = \Gamma(N \subset M)$ が $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$ により定まる。これを $N \subset M$ の主グラフと呼ぶ。 Γ が有限グラフのときには Γ の隣接行列のペロン-フロベニウス固有値の自乗が指数 $[M:N]$ になる。このことをペロン-フロベニウス理論と合わせることにより、直ちに次の興味深い事実が導かれる。

定理 (1) 指数が 4 未満の Π_1 -型部分因子環の主グラフは A, D, E いずれかの型のディンキン図形になる。

(2) 指数 4 の Π_1 -型部分因子環の主グラフは $A^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}$

いずれかの型のディンキン図形か、つぎの三つのグラフのいずれかに一致する。





前節で述べたジョーンズの定理のうち、4以下の指数が $4\cos(\pi/h)^2$ という形であるという主張はこの定理から直ちに従う。

注意 実は D_{2n+1} 型及び E_7 型のディンキン図形は Π_1 -型部分因子環の主グラフとしては現れ得ない事が知られている。

§3 指数4の Π_1 -型部分因子環と $SU(2)$ の有限部分群

我々は主グラフの表現論的な意味を考えたいのであるが、これについて大きな示唆を与えるものとしてジョーンズらによる指数4の Π_1 -型部分因子環の構成がある。それについて説明するためにまず $SU(2)$ の有限部分群に関する McKay's observation について復習したい。

G を有限群とし、 L をその複素既約加群とする。 $\{L(i) \mid i \in V\}$ を G の複素既約加群の完全代表系とし、テンソル積加群 $L \otimes L(j)$ の既約分解を

$$(3.1) \quad L \otimes L(j) = \bigoplus_i m_{ij} L(i)$$

とする。 V を頂点の全体とし、 $i, j \in V$ がそれぞれ始点、終点であるような辺の数が m_{ij} 本であるような有向グラフを $\Gamma(G, L)$ で表し (G, L) の表現グラフという。

G が $SU(2)$ の有限部分群、 L がその自然な二次元表現である時には表現グラフ $\Gamma(G, L)$ は拡大ディンキン図形 $A^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}$ のいずれかになる。これにより $SU(2)$ の有限部分群はこれらの図形と一対一に対応する。そしてこの対応は次の定理によって前節の定理と結びついている。

定理 ([GH0]) G を拡大ディンキン図形 Γ に対応する $SU(2)$ の有限部分群とし、 L をその自然な二次元表現とする。と、有限次元フォン-ノイマン環の組

$$\text{End}_G(L^{\otimes r}) \subset \text{End}_G(L^{\otimes r+1})$$

の $k \rightarrow \infty$ での「極限」は Γ を主グラフにもつ指数 4 の II_1 -型部分因子環になる。

§ 4 面代数と II_1 -型部分因子環

前節で述べたような有限群による II_1 -部分因子環の構成は指数が整数の平方数でないときには存在しない。というのは L が有限群 G の忠実な表現なら、その表現グラフに対応する行列のペロン-フロベニウス固有値は $\dim L$ に一致する事がわかるからである。そこで我々は次のような量子群のクラスを導入することにする。

定義 体上の代数 H が余積 Δ と余単位元 ε により余代数にもなっているとす。また V を有限集合とし $\{X_{ij} \mid i, j \in V\}$ を H の元より成る集合とする。組

$(H, \{X_{ij}\})$ が次の条件を満たすときこれを V-面代数 と呼ぶ。

$$\Delta(a)\Delta(b) = \Delta(ab)$$

$$X_{ij}X_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}X_{ij}, \quad 1 = \sum_i X_{ii}$$

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{ijk} \varepsilon(aX_{ik}) \varepsilon(X_{kj}b) = \varepsilon(ab)$$

集合 V がただ一つの元よりなるときには V -面代数は双代数と等価な概念になる。面代数は見かけ上かなり複雑な代数系なのであるが、幸いにしてその例を簡単につくる方法がある。

例 $\Gamma = (V, E)$ を有向グラフとし、 $\text{Path}_{i,j}^m$ を $i \in V$ を始点 $j \in V$ を終点とするような長さ m のパスの全体とし、 $\text{Path}^m = \bigcup_{i,j} \text{Path}_{i,j}^m$ とする。 $H(\Gamma)$ を記号 $\{X_{pq} \mid p, q \in \text{Path}^m, m \geq 0\}$ を基底とする線型空間とする。と、 $H(\Gamma)$ は次の演算により V -面代数になる。

$$X_{pq}X_{p'q'} = \delta_{R(p)S(p')} \delta_{R(q)S(q')} X_{p \cdot p', q \cdot q'},$$

$$\Delta(X_{pq}) = \sum_r X_{pr} \otimes X_{rq}, \quad \varepsilon(X_{pq}) = \delta_{pq}$$

但し、 $S(p)$, $R(p)$ はそれぞれパス p の始点、終点とし、 $p \cdot q$ は p と q をつないでできるパスを表すものとする。また \sum_r は p, q と同じ長さのパス r 全体についての和であるとする。

上の例で、 $H(\Gamma)$ のイデアル I が同時に余イデアルでもあれば $H(\Gamma)/I$ もまた V -面代数になる。任意の (代数として) 有限生成な V -面代数はすべてこのようにして得られることがわかっている。

群やホップ代数の表現論に於ける表現のテンソル積の類似として、面代数の加群たちに対し次のような演算が定義される。

命題 面代数 H 上の加群 L, M に対し、 $L \bar{\otimes} M := \bigoplus_{i,j,k} X_{ik} L \otimes X_{kj} M$ は

$$a(\sum_m u_m \otimes v_m) = \sum_k \sum_m b_k u_m \otimes c_k v_m$$

$$(a \in H, \sum_m u_m \otimes v_m \in L \bar{\otimes} M)$$

により H -加群になる。但し、 $\Delta(a) = \sum_k b_k \otimes c_k$ とおいた。

これにより、面代数の加群に対してもその表現グラフが前節と同様にして定義される。次が我々の主結果である。

定理 Γ を A_n, D_{2n}, E_6, E_8 いずれかの型のディンキン図形とする。すると面代数 $G(\Gamma)$ とその既約加群 L が存在して $(G(\Gamma), L)$ の表現グラフは Γ に一致する。また Γ を主グラフとする指数 4 未満の Π_1 -型部分因子環が $(G(\Gamma), L)$ を用いて前節の定理と同様の方法により構成される。

面代数 $G(\Gamma)$ の構成法を述べるには Ocneanu による主グラフ上の平坦接続の理論を説明することが必要なのであるが、これは少々面倒なのでここでは省略させて頂き、 $\Gamma = A_n$ の場合の $G(\Gamma)$ の具体的表示式で許して頂くことにする。

命題 面代数 $G(A_n)$ は、前例で $\Gamma = (V, E) = A_n$ として得られる

面代数 $H(\Gamma)$ をさらに次の二つの関係式で割ったものとして得られる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_s \mu(R(s))^{1/2} X_{p \cdot q \cdot s \cdot s^-} \\
 &= \delta_{p, q^-} (\mu(j) \mu(R(p)) / \mu(S(p)))^{1/2} X_{S(p)j} \\
 & \sum_s \mu(R(s))^{1/2} X_{s \cdot s^-, p \cdot q} \\
 &= \delta_{p, q^-} (\mu(j) \mu(R(p)) / \mu(S(p)))^{1/2} X_{jS(p)} \\
 & \hspace{15em} (p, q \in E, j \in V)
 \end{aligned}$$

但し \sum_s は j を始点とする有向辺 s 全体についての和とする。また s^- は有向辺 s の向きを逆にしたものを意味するものとする。また $\mu(i) = \sin(\pi i / n+1)$ ($1 \leq i \leq n$) とする。すなわち $[\mu(i)]_i$ はディンキン図形 A_n の隣接行列のペロン-フロベニウス固有ベクトルである。

参考文献

- [GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe and V. Jones, Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, (1989)
- [H1] T. Hayashi, Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones' index theory, to appear in Commun. Math. Phys.
- [H2] T. Hayashi, Golois quantum group of Π_1 -subfactor, in preparation
- [1] 岩堀長慶、Mckay Observation について、群論六甲シンポジウ

△報告集、1980

[J] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 1-15
(1983)

[01] A. Ocneanu, Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras. In: Operator algebras and applications 2, Warwick 1987. London Math. Soc. Lecture note series 136, 119-172. Cambridge University Press 1988

[02] A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary notes, (Recorded by Y. Kawahigashi) 1990

Differential poset と fusion algebra

名大・理 岡田 聡 一 (Soichi Okada)

R. Stanley は, differential poset と呼ばれる半順序集合のクラスを導入した. その典型的な例は分割全体のなす Young 束であるが, Young 束は対称群, 対称関数環などの代数系と密接に関係している. ここでは, differential poset に付随した代数系を考え, Wagner による differential poset の構成法に対応した fusion algebra の reflection-extension と, 別の興味深い例である Young-Fibonacci 束に対する対称群 (の群環) の対応物の構成について述べる.

§1. Differential poset.

R. Stanley [S1] は, differential poset と呼ばれる半順序集合のクラスを定義したが, このクラスの半順序集合はその chain の個数などに関して多くの興味深い性質を持っている.

まず, 半順序集合に関する用語の定義から始める. P を半順序集合 (poset = partially ordered set) とする. $x, y \in P$ に対して, $x > y$ であり $x > z > y$ となる元 z が存在しないとき, x は y を覆う (cover) といい, $x \triangleright y$ と表わす. そして,

$$C^+(x) = \{y \in P : y \triangleright x\}, \quad C^-(x) = \{y \in P : y \triangleleft x\}$$

とおく. 半順序集合 P が $P = \coprod_{n \geq 0} P_n$ と部分集合 P_n の disjoint union に分割され,

$$x \in P_n, x \triangleright y \implies y \in P_{n-1}$$

が成り立つとき, P は graded poset であるという. また, P の任意の区間 $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ が有限集合であるとき, P は locally finite であるという.

定義 1.1. [S1] r を正整数とする. 半順序集合 P は次の条件を満たすとき, r -differential poset であるという.

- (D1) P は locally finite な graded poset であり, 最小元 $\hat{0}$ を持つ.
- (D2) $x, y \in P$ に対して, $x \neq y$ ならば, $\#(C^-(x) \cap C^-(y)) = \#(C^+(x) \cap C^+(y))$.
- (D3) $x \in P$ に対して, $\#C^+(x) = r + \#C^-(x)$.

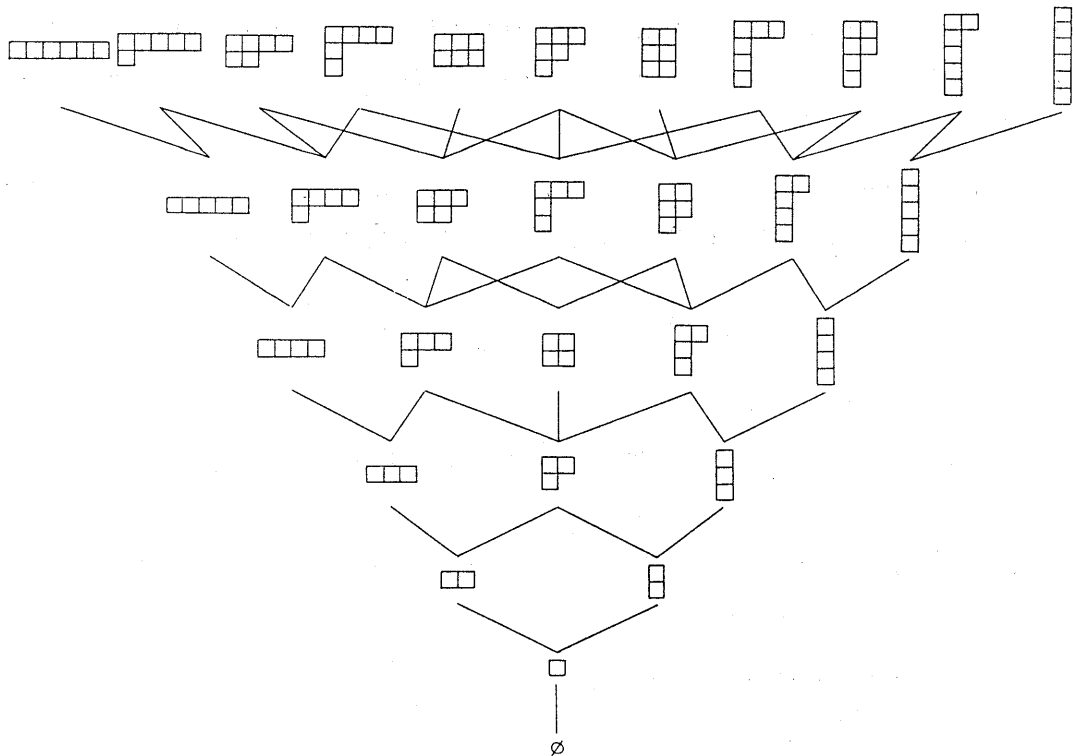


図 1. Young 束 \mathbf{Y}

例 1.2. (Young 束) n の分割とは, 非負整数の単調非減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$) で $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$ となるもののことである。(このとき, $\lambda \vdash n$ と表わす。) n の分割全体のなす集合を \mathbf{Y}_n とし, $\mathbf{Y} = \coprod_{n \geq 0} \mathbf{Y}_n$ とおく. \mathbf{Y} は

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda_i \geq \mu_i \quad (\forall i)$$

$$\iff (\lambda \text{ の Young 図形}) \supset (\mu \text{ の Young 図形})$$

と定義することによって半順序集合となり, その Hasse 図式は図 1 のようになる. この半順序集合は束となり, **Young 束** と呼ばれる. Young 束 \mathbf{Y} は 1-differential poset である. 実際, 定義の条件 (D3) は, $\lambda \in \mathbf{Y}$ に対して,

$$C^+(\lambda) = (\lambda \text{ の Young 図形の隅の個数}), \quad C^-(\lambda) = (\lambda \text{ の Young 図形の角の個数})$$

となっていることからわかる。また、 \mathbf{Y} の r 個の直積 \mathbf{Y}^r は、半順序を $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \geq (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)}) \iff \lambda^{(i)} \geq \mu^{(i)} (i = 1, \dots, r)$ と定義することによって、 r -differential poset となる。

P を locally finite poset とし、各 $x \in P$ に対して $C^+(x)$ が有限集合であるとする。 $\mathbb{C}P$ を P の元を基底とする \mathbb{C} 線型空間とする。 $\mathbb{C}P$ 上の線型変換 U, D を

$$Ux = \sum_{y \triangleright x} y, \quad Dx = \sum_{y \triangleleft x} y, \quad (x \in P)$$

によって定義する。このとき、 r -differential poset の定義は次のように言い替えることができる。

命題 1.3. P が r -differential poset の条件 (D1) を満たし、各 P_n が有限集合であるとする。このとき、次は同値である。

- (1) P は r -differential poset である。
- (2) $DU - UD = r \text{Id}$.

この命題から、 $f(U) \in \mathbb{C}[[U]]$ に対して、

$$Df(U) = rf'(U) + f(U)D$$

となることがわかる。これによって、differential poset の組合せ論的性質の多く（例えば命題 1.4）は、偏微分方程式を解くことによって得られる。そこで “differential” poset という名前がある。

P を最小元 $\hat{0}$ をもつ graded poset とする。 $x \in P_n$ に対して、

$$\Omega^x = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(0)} = \hat{0}, x^{(n)} = x, x^{(i)} \triangleleft x^{(i+1)} (i = 0, \dots, n-1)\}$$

を $\hat{0}$ から x にいたる P の saturated chain 全体の集合とし、 $e(x) = \#\Omega^x$ とおく。differential poset の性質のうちで注目すべきものは、次の命題である。

命題 1.4. P が r -differential poset ならば、

- (1) $\sum_{x \in P_n} e(x)^2 = r^n n!$.
- (2) $\sum_{n \geq 0} (\sum_{x \in P_n} e(x)) t^n / n! = \exp(rt + rt^2/2)$.

$P = \mathbf{Y}$ のとき, この命題は

$$\# \left(\coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda) \right) = \# S_n,$$

$$\# \left(\coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda) \right) = \#\{\sigma \in S_n : \sigma^2 = 1\}$$

(ここで, $\text{STab}(\lambda)$ は shape λ の standard tableau 全体の集合である) となることを主張している. よって, Robinson-Schensted 対応が命題 1.2 の別証を与えていることになる. (\mathbf{Y} に対する Robinson-Schensted 対応については [O1], 一般の differential poset に対する Robinson-Schensted 対応 (とその variation) については [F1], [F3], [R1], [R2] を参照されたい.)

また, $P = \mathbf{Y}$ のときの命題 1.4 は, 対称群の表現論からの帰結でもある. よく知られているように, n 次対称群 S_n の \mathbb{C} 上の既約表現は n の分割によってパラメトライズされ, $\lambda \in \mathbf{Y}_n$ に対応する S_n の既約表現を V^λ とすると, その S_{n-1} への制限は

$$V^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{\mu \triangleleft \lambda} V^\mu$$

と分解する. よって, $\dim V^\lambda = \#\text{STab}(\lambda) = e(\lambda)$ となる. 従って, 命題 1.4 は次の一般論から従う. つまり, 一般に有限群 G の複素既約指標全体の集合を \hat{G} と表わすとき,

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(1)^2 = \#G$$

であり, G の既約表現がすべて実数体上で実現できるならば,

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(1) = \#\{g \in G : g^2 = 1\}.$$

このような対称群と Young 束との関係を考えて, 次の問題は自然である.

問題 1.5. P が r -differential poset であるとき, P の Hasse 図式を Bratteli 図形とする半単純環の塔 $(F_n)_{n \geq 0}$ を具体的に構成せよ. つまり, 半単純環の増大列 $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$ で, 各 F_n の既約表現が P_n の元でパラメトライズされ, $x \in P_n$ に対応する F_n の既約表現を V^x と表わすとき, その F_{n-1} への制限が

$$V^x \downarrow_{F_{n-1}} \cong \bigoplus_{y \prec x} V^y$$

のように P の Hasse 図式にしたがって分解するようなものを具体的に構成せよ. 抽象的には $F_n = \bigoplus_{x \in P_n} M_{e(x)}(\mathbb{C})$ ととり, $F_{n-1} \subset F_n$ を Hasse 図式を用いて定義すればよい.

また, 有限群 G の指標環 $R(G)$ は fusion algebra の典型例であり, H を G の部分群とすると, $\text{Res}: R(G) \rightarrow R(H)$ は fusion algebra の間の準同型である (定義は §3 を見よ). よって, 次のような問題も考えられる.

問題 1.6. r -differential poset P が与えられたとき, 次の性質を満たす fusion algebra の列 $(A_n)_{n \geq 0}$ を構成せよ.

- (1) A_n の underlying space として P_n を基底とする $\mathbb{C}P_n$ がとれる.
- (2) $D_n = D \downarrow_{\mathbb{C}P_n}: A_n = \mathbb{C}P_n \rightarrow A_{n-1} = \mathbb{C}P_{n-1}$ は fusion algebra の間の準同型となる.

§2. Wagner による構成法と Young-Fibonacci lattice.

r -differential poset を “partial” r -differential poset から構成する方法が, D. Wagner によって与えられている ([S, §6]). $P = \coprod_{i=0}^n P_i$ を graded poset とし, $\bigoplus_{0 \leq i \leq n-1} \mathbb{C}P_i$ 上で $DU - UD = r \text{Id}$ が成り立っているとする. このとき, graded poset $E_r(P) = \coprod_{i=0}^{n+1} E_r(P)_i$ を次のように構成する. 半順序集合 $E_r(P)$ は rank n 以下のところでは P と一致している. つまり, 半順序もこめて

$$\coprod_{i=0}^n E_r(P)_i = \coprod_{i=0}^n P_i.$$

そして, P_n のコピーを r 個用意し, $\tilde{P}_n^{(0)}, \dots, \tilde{P}_n^{(r-1)}$ とし, $x \in P_n$ に対応する $\tilde{P}_n^{(i)}$ の元を $\tilde{x}^{(i)}$ と表わす. また, P_{n-1} のコピーも 1 個用意し, \tilde{P}_{n-1} とし, $y \in P_{n-1}$ に対応する \tilde{P}_{n-1} の元を \tilde{y} と表わす. このとき, $E_r(P)$ の rank $n+1$ の元全体の集合を

$$E_r(P)_{n+1} = \tilde{P}_n^{(0)} \cup \dots \cup \tilde{P}_n^{(r-1)} \cup \tilde{P}_{n-1} \quad (\text{disjoint union})$$

とおき, $E_r(P)_n$ と $E_r(P)_{n+1}$ の間の半順序を

$$C^-(\tilde{x}^{(i)}) = \{x\}, \quad C^-(\tilde{y}) = C^+(y) \quad (x \in P_n, y \in P_{n-1})$$

によって定義する. よって, $E_r(P)$ の Hasse 図式は, P の Hasse 図式の P_{n-1} の部分を P_n に関して折り返し, 各 $x \in P_n$ から辺を r 本ずつ伸ばしたものになる. すると, $\bigoplus_{0 \leq i \leq n} CE_r(P)_i$ 上で $DU - UD = r \text{Id}$ が成り立つことは明らかである.

この手続きを繰り返す, $E_r(P)$, $E_r^2(P) = E_r(E_r(P))$, $E_r^3(P) = E_r(E_r^2(P))$, ... を作っていくと, $E_r^\infty(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_r^k(P)$ は r -differential poset となる.

特に, 1つの元からなる半順序集合 P_0 から始めて, Wagner の構成法を繰り返すことによってできる r -differential poset $E_r^\infty(P_0)$ を Young-Fibonacci lattice といい, $\mathbf{YF}^{(r)}$ と表わす. この Young-Fibonacci lattice $\mathbf{YF}^{(r)}$ は次のようにしても記述できる. (詳しくは [S1, §5], [S3] を参照されたい.)

$\{1_0, \dots, 1_{r-1}, 2\}$ を alphabet とする word 全体の集合 (empty word \emptyset も含む) を $\mathbf{YF}^{(r)}$ と表わす. 各 word $v = a_1 \dots a_k \in \mathbf{YF}^{(r)}$ に対して, その rank を $|v| = |a_1| + \dots + |a_k|$ ($|1_m| = 1$) とおいて定義し, $\mathbf{YF}_n^{(r)} = \{v \in \mathbf{YF}^{(r)} : |v| = n\}$ とおく. $\mathbf{YF}^{(r)}$ 上の半順序を

- (1) \emptyset が最小元である.
- (2) $C^-(1_m v) = \{v\}$.
- (3) $C^-(2v) = C^+(v)$.

によって定義する. この半順序集合 $\mathbf{YF}^{(r)}$ の rank generating function は

$$\sum_{n \geq 0} \#\mathbf{YF}_n^{(r)} q^n = (1 - rq - q^2)^{-1}$$

で与えられ, 特に $\#\mathbf{YF}_n^{(1)}$ は Fibonacci 数である. 例えば, $\mathbf{YF}^{(1)}$ の Hasse 図式は図 2 のようになる.

注意. Young 束 \mathbf{Y} と Young-Fibonacci lattice $\mathbf{YF}^{(1)}$ は, ある意味で 1-differential poset 全体の中で両端にいる. つまり, P が 1-differential poset であるとき,

$$\#\mathbf{Y}_n \leq \#P_n \leq \#\mathbf{YF}_n^{(1)}$$

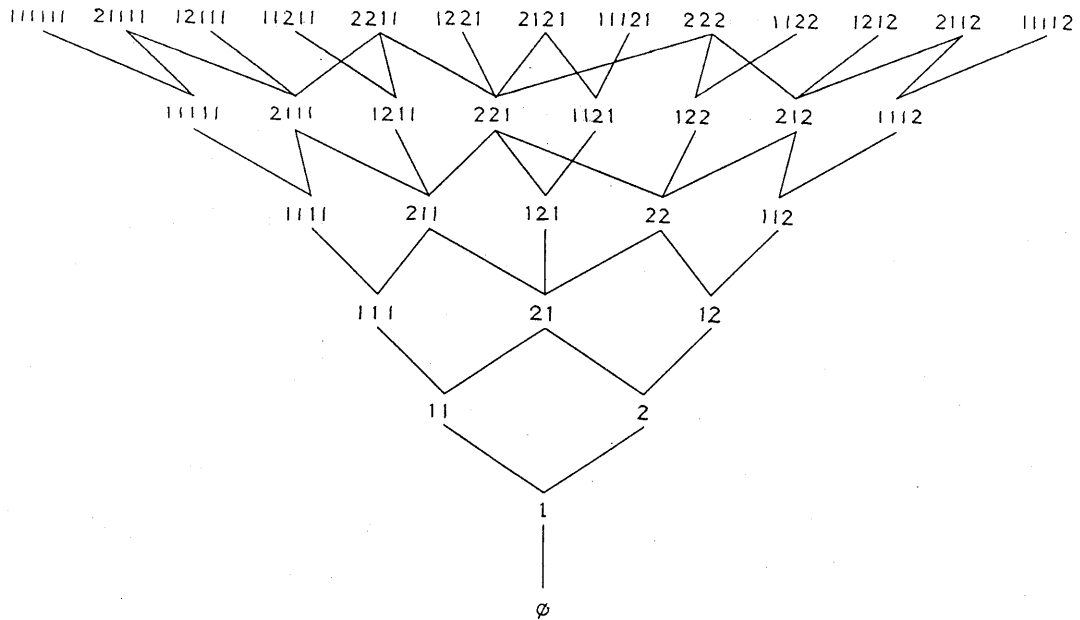


図 2. Young-Fibonacci 束 $YF^{(1)}$

と予想されている。

§3. Fusion algebra の reflection-extension.

この節では、 r -differential poset P が Wagner の構成法によってできているときに、問題 1.6 を考える。

まず、fusion algebra の定義を思い出しておく。

定義 3.1. [B] $\mathcal{A} = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ を、 a_1, \dots, a_n を基底とする \mathbb{C} -代数とし、構造定数を

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^n A_{ij}^k a_k$$

とする。この代数 \mathcal{A} は次の条件を満たすとき、代数的レベルでの fusion algebra と呼ぶ。

(F0) \mathcal{A} は可換な結合的代数である。

(F1) $A_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

(F2) 全単射 $\hat{\cdot}: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ で次を満たすものが存在する。

(a) $\hat{\hat{i}} = i$,

$$(b) A_{ij}^k = A_{ij}^k,$$

(c) $A_{ijk} := A_{ij}^k$ は i, j, k に関して対称である.

(F3) a_1 は \mathcal{A} の単位元である.

(F4) 1 次表現 $\Delta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ で, すべての i に対して $\Delta_{\mathcal{A}}(a_i) > 0$ となるものが存在する.

条件 (F2) は次の条件 (F2') で置き換えることができる.

(F2') 集合 $\{a_1, \dots, a_n\}$ を保つ involutive な \mathcal{A} の環自己同型 $\sigma_{\mathcal{A}}$ が存在して,

$$(xy, z)_{\mathcal{A}} = (y, \sigma(x)z)_{\mathcal{A}},$$

を満たす. ここで, $(\ , \)_{\mathcal{A}}$ は $(a_i, a_j)_{\mathcal{A}} = \delta_{ij}$ によって定義される対称な双線型形式である.

\mathcal{A} はさらに

$$(F5) A_{ij}^k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$$(F6) \Delta_{\mathcal{A}}(a_i) \in \mathbb{N}.$$

を満たすとき **strictly integral** であるという. 以下 “代数的レベルでの” という言葉を省略する.

定義 3.2. $\mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle, \mathcal{B} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ を fusion algebra とし, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を環準同型とする. この F は, 次の条件を満たすとき, **fusion algebra** の間の準同型 であるという.

$$(H1) F_{ji} \in \mathbb{R} \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m).$$

$$(H2) \Delta_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{B}} \circ F.$$

$$(H3) F \circ \sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{\mathcal{B}} \circ F.$$

ここで, $F(a_i) = \sum_{j=1}^m F_{ji} b_j$ である. また F は, \mathcal{A}, \mathcal{B} がともに strictly integral であり, すべての i, j に対して $F_{ji} \in \mathbb{N}$ となるとき, **integral** であるという.

Fusion algebra の最も典型的な例は, 有限群 G の (複素化された) 指標環 $R(G)$ (基底は既約指標全体) であり, これは strictly integral である. また, H を G の部分群とするとき, $\text{Res}_H^G : R(G) \rightarrow R(H)$ は fusion algebra の間の integral な準同型である.

このとき,

定理 3.3. $\mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\mathcal{B} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$, $\mathcal{C} = \langle c_1, \dots, c_l \rangle$ を fusion algebra とする. そして, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を fusion algebra の間の全射準同型とし, $F(a_i) = \sum_{j=1}^m F_{ji} b_j$ とする. $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \oplus \mathcal{B}$ とおき, \mathcal{E} 上の可換で双線型な積を

$$\begin{cases} (a \otimes c \oplus 0) \cdot (a' \otimes c' \oplus 0) = aa' \otimes cc' \oplus 0 \\ (a \otimes c \oplus 0) \cdot (0 \oplus b) = 0 \oplus \Delta_{\mathcal{C}}(c)F(a)b \\ (0 \oplus b) \cdot (0 \oplus b') = F^*(bb') \otimes R_{\mathcal{C}} \oplus (FF^*(bb') - r_{\mathcal{C}}bb') \end{cases}$$

によって定義する. ここで, $F^*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ は $F^*(b_j) = \sum_{i=1}^n F_{ji} a_i$ によって定まる線型写像であり, $R_{\mathcal{C}} = \sum_{k=1}^l \Delta_{\mathcal{C}}(c_k)c_k$, $r_{\mathcal{C}} = \Delta_{\mathcal{C}}(R_{\mathcal{C}}) = \sum_{k=1}^l \Delta_{\mathcal{C}}(c_k)^2$ である. このとき,

- (1) 上で定義した積は結合的であり, この積に関して \mathcal{E} は fusion algebra となる. ただし, 基底は $\{a_i \otimes c_k \oplus 0 : i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, l\} \cup \{0 \oplus b_j : j = 1, \dots, m\}$ であり,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{E}}(a \otimes c \oplus b) &= \sigma_{\mathcal{A}}(a) \otimes \sigma_{\mathcal{C}}(c) \oplus \sigma_{\mathcal{B}}(b), \\ \Delta_{\mathcal{E}}(a \otimes c \oplus b) &= \Delta_{\mathcal{A}}(a)\Delta_{\mathcal{C}}(c) + \frac{r_{\mathcal{A}}}{r_{\mathcal{B}}}\Delta_{\mathcal{B}}(b) \end{aligned}$$

($r_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^n \Delta_{\mathcal{A}}(a_i)^2$, $r_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^m \Delta_{\mathcal{B}}(b_j)^2$) である.

(2)

$$\tilde{F}(a \otimes c \oplus b) = \Delta_{\mathcal{C}}(c)a + F^*(b)$$

によって定義される線型写像 $\tilde{F}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ は fusion algebra の間の全射準同型である.

- (3) $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ がすべて strictly integral であり, F が $\sum_{i=1}^n F_{ji}^2 - r_{\mathcal{C}} \geq 0$ ($j = 1, \dots, m$) を満たす integral な準同型であるならば, \mathcal{E} は strictly integral な fusion algebra であり, \tilde{F} も integral となる.

この fusion algebra \mathcal{E} を $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ と \mathcal{C} から reflection-extension によって得られる fusion algebra といい, $\mathcal{E}(\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}, \mathcal{C})$ と表わす.

さて, $P = \coprod_{i=0}^n P_i$ を, $\oplus_{0 \leq i \leq n-1} \mathcal{C}P_i$ 上で $DU - UD = r \text{Id}$ を満たす graded poset とする. そして, 各 $\mathcal{C}P_i$ ($0 \leq i \leq n$) が fusion algebra の構造を持ち, 各 $D_i = D|_{\mathcal{C}P_i}: \mathcal{C}P_i \rightarrow \mathcal{C}P_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$) が fusion algebra の間の準同型になっていると仮定する. このとき, $D_n U_{n-1} - U_{n-2} D_{n-1} = r \text{Id}$ から D_n が全射であることがわかる. よって,

$F = D_n : \mathcal{A} = \mathbb{C}P_n \rightarrow \mathcal{B} = \mathbb{C}P_{n-1}$ と $C = R(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ に対して, 上の reflection-extension を施すことができ, fusion algebra $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{C}P_n \xrightarrow{D_n} \mathbb{C}P_{n-1}, R(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}))$ と準同型 $\tilde{F} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ が得られる. 一方, 対応

$$x \otimes \chi^i \oplus 0 \mapsto \tilde{x}^{(i)}, \quad 0 \oplus y \mapsto \tilde{y},$$

(ここで, $R(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) = \{\chi^0, \dots, \chi^{r-1}\}$) によって \mathcal{E} は $\mathbb{C}E_r(P)_{n+1}$ と同一視でき, この同一視のもとで $\tilde{F} = D_{n+1}$ となる. これを繰り返すことによって, 問題 1.6 に答えることができる.

§4. $\mathbf{YF}^{(r)}$ を Bratteli 図形とする半単純環の塔.

最後に Young-Fibonacci lattice $\mathbf{YF}^{(r)}$ の Hasse 図式を Bratteli 図形とする半単純環の増大列 $(\mathcal{F}_n^{(r)})_{n \geq 0}$ を構成する (問題 1.5).

基礎体として, \mathbb{C} 上の有理関数体 $K = \mathbb{C}(x_{i,k}, y_i : i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, r-1)$ をとる.

定義 4.1. $\mathcal{F}_n^{(r)}$ を次の表示によって定まる K -代数とする.

$$\text{生成元} : E_1, \dots, E_{n-1}, t_1, \dots, t_n$$

$$\text{関係式} : E_i t_i^k E_i = x_{i,k} E_i \quad (i = 1, \dots, n-1, k = 0, \dots, r-1)$$

$$E_i E_j = E_j E_i \quad (\text{if } |i-j| \geq 2)$$

$$E_{i+1} E_i E_{i+1} = y_i E_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

$$E_i t_{i+1} = t_{i+1} E_i = E_i \quad (i = 1, \dots, n-2)$$

$$E_i t_j = t_j E_i \quad (j \neq i, i+1)$$

$$t_i^r = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$t_i t_j = t_j t_i \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

定理 4.2. (1) $\mathcal{F}_n^{(r)}$ は半単純環であり, $\dim_K \mathcal{F}_n^{(r)} = r^n n!$.

(2) $\mathcal{F}_n^{(r)}$ の K 上の既約表現は $\mathbf{YF}_n^{(r)}$ の元でパラメトライズされる. $v \in \mathbf{YF}_n^{(r)}$ に対応する $\mathcal{F}_n^{(r)}$ の既約表現を V^v と表わし, $\mathcal{F}_{n-1}^{(r)}$ を $E_1, \dots, E_{n-2}, t_1, \dots, t_{n-1}$ によって生成される $\mathcal{F}_n^{(r)}$ の部分代数とする. このとき, V^v の $\mathcal{F}_{n-1}^{(r)}$ への制限は

$$V^v \downarrow_{\mathcal{F}_{n-1}^{(r)}} \cong \bigoplus_{w \triangleleft v} V^w$$

と分解する.

$\mathcal{F}_n^{(r)}$ の既約表現 V^v は次のようにして構成できる. $\mathbb{YF}^{(r)}$ における \emptyset から v にいたる saturated chain 全体の集合 Ω^v を基底とする線型空間を V^v とし, $\mathcal{F}_n^{(r)}$ の生成元の作用を次のように定義する. 基底の元 $T = (v^{(0)}, \dots, v^{(n)}) \in \Omega^v$ に対して,

$$\begin{aligned} & \pi_v^{(r)}(E_i)(v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, v^{(i)}, v^{(i+1)}, \dots, v^{(n)}) \\ &= \begin{cases} \sum_{w \triangleright v^{(i-1)}} \frac{\alpha^{(r)}(w)}{\alpha^{(r)}(v^{(i-1)})} (v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, w, v^{(i+1)}, \dots, v^{(n)}) & \text{if } v^{(i+1)} = 2v^{(i-1)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ & \pi_v^{(r)}(t_i)(v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, v^{(i)}, \dots, v^{(n)}) \\ &= \begin{cases} \zeta^k (v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, v^{(i)}, \dots, v^{(n)}) & \text{if } v^{(i)} = 1_k v^{(i-1)} \\ (v^{(0)}, \dots, v^{(i-1)}, v^{(i)}, \dots, v^{(n)}) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, ζ は 1 の原始 r 乗根であり, 係数 $\alpha^{(r)}(v)$ ($v \in \mathbb{YF}^{(r)}$) は次のようにして定まる K の元である. まず, 多項式 $P_l^{k_1, \dots, k_l}$ を次の漸化式で定義する.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1^k = \alpha_{1,k}, \\ P_l^{k_1, \dots, k_l} &= \alpha_{l, k_1} P_{l-1}^{k_2, \dots, k_l} - \delta_{k_1, 0} y_1 P_{l-2}^{k_3, \dots, k_l}. \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_{l,j} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta^{jk} x_{l,k}$ である. 次に, $\alpha^{(r)}(v)$ を

$$\begin{aligned} & \alpha^{(r)}(1_{k_1} \dots 1_{k_l}) = P_l^{k_1, \dots, k_l}, \\ & \alpha^{(r)}(1_{k_1} \dots 1_{k_l} 2) \\ &= P_{l+1}^{k_1, \dots, k_l, 0} \left[\begin{array}{ll} x_{1,k} \rightarrow \delta_{k,0} y_1, & x_{i,k} \rightarrow x_{i+1,k} (i \geq 2) \\ y_1 \rightarrow x_{1,0} y_2, & y_i \rightarrow y_{i+1} (i \geq 2) \end{array} \right], \\ & \alpha^{(r)}(1_{k_1} \dots 1_{k_l} 2u) = \alpha^{(r)}(1_{k_1} \dots 1_{k_l}) [x_{i,k} \rightarrow x_{m+i,k}, y_i \rightarrow y_{m+i}] \alpha^{(r)}(u) \end{aligned}$$

($f[z \rightarrow w]$ は f において z を w で置き換えることを意味する) によって再帰的に定義する. この係数の定義の仕方から, E_i, t_i たちの作用が $\mathcal{F}_n^{(r)}$ 全体の作用にのびることが確かめられる. この表現 V^v を用いることによって, [W] と同様の論法で定理 4.2 を証明することができる.

References

- [B] E. Bannai, *Association schemes and fusion algebras (an introduction)*, preprint.
- [F1] S. V. Fomin, *Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, preprint.
- [F2] ———, *Duality of graded graphs*, Report No.15 (1991/92), Institut Mittag-Leffler.
- [F3] ———, *Schensted-type algorithms for dual graded graphs*, Report No.16 (1991/92), Institut Mittag-Leffler.
- [O1] S. Okada, *Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattice*, J. Combin. Theory, Ser. A **55** (1990), 14–32.
- [O2] ———, *Algebras associated to the Young-Fibonacci lattice*, preprint.
- [O3] ———, *Reflection-extension of fusion algebras*, preprint.
- [R1] T. W. Roby, *Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [R2] ———, *Schensted correspondences for differential posets*, preprint.
- [S1] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 919–961.
- [S2] ———, *Variations on differential posets*, in “Invariant Theory and Tableaux (D. Stanton ed.),” The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications 19, Springer, New York, 1988, pp. 145–165.
- [S3] ———, *Further combinatorial properties of two Fibonacci lattices*, Europ. J. Comb. **11** (1990), 181–188.
- [W] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.

大きな Hecke 環 (Span 環) について

吉田 知行

熊本大学理学部

宗政 昭弘

九州大学理学部

小田 文仁

熊本大学自然科学研究科

1 fusion algebra \mathcal{A}

「有限群の作用に付随した fusion algebra」 [Mu 93] で考察されている fusion algebra \mathcal{A} が、ある Mackey functor から得られる大きな Hecke 環 (Span 環) から構成できることを示すことを目標とする。

G を有限群とし、 $G \times G$ を基底とする C 上のベクトル空間 D に次のように積を定義すると D は associative algebra になる。

$$(g, h)(k, l) = \delta_{h^{-1}gh, k}(g, hl) \quad (g, h, k, l \in G).$$

さらに D は Hopf algebra になる [Mu 93]。 D の中心を \mathcal{A} とすると、この \mathcal{A} が Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde [DV 89] に現れる fusion algebra $C \otimes K_G(G)$ であることが知られている。 second author は、 G が集合 X に可移に作用している場合の fusion algebra の構成法を次のように考察した。

X, Y, Z を可移な G -集合とする。 X, Y に対して C 上のベクトル空間を

$$\tilde{\mathcal{A}}(X, Y) := \langle (g; x, y) \mid x \in X, y \in Y, gx = x, gy = y, g \in G \rangle_C$$

と定める。また、 $\tilde{\mathcal{A}}(X, Y)$ と $\tilde{\mathcal{A}}(Y, Z)$ の “合成” を次のように定める。

$$\tilde{\mathcal{A}}(X, Y) \times \tilde{\mathcal{A}}(Y, Z) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(X, Z) ; (g; x, y)(h; z, w) \mapsto \delta_{yz} \delta_{gh}(g; x, z).$$

さらに、 G の $\tilde{\mathcal{A}}(X, Y)$ への作用を

$$u(g; x, y) = (ugu^{-1}; ux, uy) \quad u \in G$$

で定めると

$$\tilde{\mathcal{A}}(X, Y)^G \cong \bigoplus_{i=0}^d (C[X^{(g_i)}, Y^{(g_i)}])^{C_{G(g_i)}} ; (g; x, y) \mapsto (E_{x, y}^{(g_i)})_i$$

が成り立つ。ただし、 $\{g_0, \dots, g_d\}$ は G の共役類の完全代表系、 G -集合 X と、 G の部分群 H に対して $X^H = \{x \in X | hx = x, h \in H\}$, $(E_{x,y}^{g_i})_i$ は行列単位とする。従って

$$\tilde{\mathcal{A}}(X, X)^G \cong \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{H}(C_G(g_i), X^{(g_i)})$$

が成り立つ。ただし、 G -集合 X に対して $\mathcal{H}(G, X) = \text{End}_{CG}(CX)$ とする。特に、 $G = H \times H$ が $X = H \times H / \Delta H$, ($\Delta H = \{(h, h) | h \in H\}$) に作用している場合

$$\tilde{\mathcal{A}}(X, X)^G \cong \mathcal{A}$$

が成り立つ。

2 Mackey functor \mathcal{A}

この節では、類関数環の Mackey functor を構成する。 R を可換環、 \mathcal{S}_f^G 、 Mod_R をそれぞれ有限 G -集合、 R -加群の category とする。Mackey functor M は反変関手 M^* 、共変関手 M_* の対として定義される。

$$M^* : (\mathcal{S}_f^G)^{op} \longrightarrow \text{Mod}_R,$$

$$M_* : \mathcal{S}_f^G \longrightarrow \text{Mod}_R.$$

$M^*(X) = M_*(X)$, ($X \in \mathcal{S}_f^G$) であり (この加群を単に $M(X)$ と書く)、 G -写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して

$$f^* := M^*(f), \quad f_* := M_*(f)$$

とするとき、さらに次の 2 つの条件を満たすものである。

$$M(X \cup Y) \cong M(X) \oplus M(Y),$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \beta \downarrow & p.b. & \gamma \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\delta} & W \end{array}$$

ならば $\alpha_* \beta^* = \gamma^* \delta_*$ が成り立つ。

有限群 G に対して C 上の類関数環を $R(G)$ とする。 G -集合 X に対して

$$\tilde{\mathcal{A}}(X) := \bigoplus_{x \in X} R(G_x) \quad (G_x := \{g \in G | gx = x\})$$

とする。また、 G -写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して

$$f^* : \tilde{\mathcal{A}}(Y) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(X); (\beta_y)_{y \in Y} \mapsto (\beta_{f(x)} \downarrow_{G_x})_{x \in X},$$

$$f_* : \widetilde{\mathbf{A}}(X) \rightarrow \widetilde{\mathbf{A}}(Y) ; (\alpha_x)_{x \in X} \mapsto \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)/G_y} \alpha_{f(x)} \uparrow^{G_y} \right)_{y \in Y}$$

とする。このとき、 $\widetilde{\mathbf{A}}$ は上の 2 つの条件を満たし Mackey functor になる。さらに

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X) &= \left(\bigoplus_{x \in X} R(G_x) \right)^G \\ &= \{ (\alpha_x) \mid \alpha_x \in R(G_x), \alpha_x^g = \alpha_{gx}, g \in G \} \end{aligned}$$

とすると、 \mathbf{A} は Mackey functor になる。とくに、 G -集合 X, Y の直積に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(X \times Y) &= \left(\bigoplus_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} R(G_{xy}) \right)^G \\ &= \{ (\alpha_{xy}) \mid \alpha_{xy} \in R(G_{xy}), (\alpha_{xy})^g = \alpha_{gxy}, g \in G \} \end{aligned}$$

となる。以下の節では、この Mackey functor \mathbf{A} に対して

$$\mathbf{A}(X \times X) \cong \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{H}(C_G(g_i), X^{(g_i)})$$

を示すことを目標とする。この同型は、first author による [Yo 82]。

3 Hecke category

G -集合 X, Y, Z に対して

$$\pi_{12} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y,$$

$$\pi_{13} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z,$$

$$\pi_{23} : X \times Y \times Z \rightarrow Y \times Z$$

と定義する。このとき、 $\mathbf{A}(X \times Y)$ と $\mathbf{A}(Y \times Z)$ から $\mathbf{A}(X \times Z)$ への合成を次の可換な diagram で定義する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(X \times Y) \times \mathbf{A}(Y \times Z) & \longrightarrow & \mathbf{A}(X \times Z) \\ (\pi_{12})_* \times (\pi_{23})_* \downarrow & \text{積} & \uparrow (\pi_{13})_* \\ \mathbf{A}(X \times Y \times Z) \times \mathbf{A}(X \times Y \times Z) & \longrightarrow & \mathbf{A}(X \times Y \times Z) \end{array}$$

この合成は、結合法則、単位法則を満たすので、対象を G -集合、 X から Y への射の集合を $\mathbf{A}(Y \times X)$ として category が得られる。この category を \mathbf{A} を係数にもつ Hecke category と呼び $\text{Hec}(G, \mathbf{A})$ で表す。また、 CG -加群の族

$$\{CX \mid X : G\text{-集合}\}$$

がつくる category を単に Hecke category と呼び $\text{Hec}(G)$ で表す。 CX から CY への射 (CG -準同型) は、行列

$$(a_{xy})_{x \in X, y \in Y}, \quad (a_{gx, gy} = a_{xy}, g \in G, a_{xy} \in C)$$

と同一視できる。

4 基本定理

定理 1 $\text{Hec}(G, \mathbf{A})$ から $\prod_{t \in G/\sim} \text{Hec}(C_G(t)/\langle t \rangle)$ への忠実で充満な関手 Φ が存在する。ただし、 G/\sim は G の共役類の完全代表系とする。

$$\begin{aligned} \Phi : X &\mapsto (CX^{(t)})_t, \\ \Phi_{X,Y} : \mathbf{A}(X \times Y) &\rightarrow \bigoplus_{t \in G/\sim} \text{Hom}_{C_G(t)/\langle t \rangle}(CY^{(t)}, CX^{(t)}); \\ (\alpha_{xy}) &\mapsto ((\alpha_{xy}(t))_{x \in X^{(t)}, y \in Y^{(t)}})_t. \end{aligned}$$

(証明) まず、

$$\text{Hom}_{C_G(t)/\langle t \rangle}(CY^{(t)}, CX^{(t)}) \cong \text{Map}((X \times Y)^{(t)}/C_G(t), C)$$

が成り立つので、 G -集合 X に対して、

$$\mathbf{A}(X) \rightarrow \bigoplus_{t \in G/\sim} C^{X^{(t)}/C_G(t)}; (\alpha_x) \mapsto (\alpha_X(t))_{x \in X^{(t)}/C_G(t)}$$

が全単射になることを示せばよい。また、 $X = G/H$ について示せば十分である。このとき、

$$\mathbf{A}(X) = \mathbf{A}(G/H) \cong R(H); (\alpha_{gH}) \mapsto \alpha_H$$

が成り立つので、結局

$$R(H) \cong \text{Map}(X^{(t)}/C_G(t), C) \quad \dots \quad (*)$$

を示せばよい。ただし、 $C_G(t)/\langle t \rangle$ -集合 $X^{(t)}$ を $C_G(t)$ -集合とみなすとき $X^{(t)}/C_G(t)$ で表す。 $(G/H)^{(t)}/C_G(t)$ において代表元 t は H 内で選ぶことが出来る。従って単射である。さらに、

$$\dim_C R(H) = \dim_C \text{Map}(X^{(t)}/C_G(t))$$

より、(*) が示される。故に、 $\Phi_{X,Y}$ は全単射である。 ■

基本定理より、次の同型が得られる。

系 1 $\{g_0, \dots, g_d\}$ を G の共役類の完全代表系とするとき

$$\mathbf{A}(X \times X) \cong \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{H}(C_G(g_i), X^{(g_i)})$$

が成り立つ。

系 2 $G = H \times H$, $X = H \times H/\Delta H$ のとき

$$\mathbf{A}(X \times X) \cong \mathcal{A}$$

が成り立つ。

参考文献

- [DV 89] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, *Comm. Math. Phys.* 123 (1989), 485–526.
- [Mu 93] 宗政昭弘, 有限群の作用に付随した fusion algebra, 「代数的組合せ論」, 数理解析研究所講究録 846, 1993 年 6 月, 39–45.
- [Yo 82] 吉田知行, 有限 G -集合のカテゴリースパン, 「代数的 K -理論」研究集会報告集, 1982 年 12 月, 東京工業大学, 104–128.

Group association scheme の Terwilliger algebra

坂内 英一
宗政 昭弘

九州大学理学部
九州大学理学部

Terwilliger algebra とは Paul Terwilliger [3] が P-and Q-polynomial association scheme の研究のために導入した代数である。しかし、P-and Q-polynomial association scheme に限らず、一般の association scheme についても Terwilliger algebra を定義することができる。ここでは、有限群から作られる group association scheme と呼ばれる association scheme の Terwilliger algebra について詳しく論じる。特に、Terwilliger algebra の次元と triple regularity について得られた結果を述べる。

G を有限群とし、 G の共役類を $C_0 = e, C_1, \dots, C_d$ とする。 $i = 0, 1, \dots, d$ に対して、

$$R_i = \{(x, y) | yx^{-1} \in C_i\}$$

と定義する。このとき、 $\mathcal{A}(G) = (G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は可換な association scheme になり、これを G の group association scheme と呼ぶ。関係 R_i の adjacency matrix A_i を次で定義する。

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

すると、ある非負整数 p_{ij}^k があって $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$ が成り立つ。このことは次の式と本質的に同じである。 $\underline{C}_i \underline{C}_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k \underline{C}_k$ ただし、 $C_i = \sum_{x \in C_i} x \in CG$ とする。今、 $\mathcal{A} = \langle A_0, \dots, A_d \rangle_{\mathbb{C}}$ とすると、 \mathcal{A} は \mathbb{C} 上の $(d+1)$ 次元の代数になり、これを Bose-Mesner algebra と呼ぶ。実際、 $\mathcal{A} \cong Z(CG)$ である。 \mathcal{A} の primitive idempotents を E_0, \dots, E_d とする。 \mathcal{A} は Hadamard 積について閉じているので、 $E_i \circ E_j \in \mathcal{A}$ となり、

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{|G|} \sum_{k=0}^d q_{ij}^k E_k$$

となる複素数 q_{ij}^k が存在する。(実は q_{ij}^k は有理数) G の既約指標を χ_0, \dots, χ_d とすると、 χ_0, \dots, χ_d と E_0, \dots, E_d の間には自然な一対一対応があり、 $\chi_i \chi_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k \chi_k$ とすると

$$N_{ij}^k = \frac{\chi_k(1)}{\chi_i(1)\chi_j(1)} q_{ij}^k$$

が成り立つ。

次に対角行列 E_i^*, A_i^*

$$(E_i^*)_{xx} = \begin{cases} 1 & x \in C_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(A_i^*)_{xx} = |G|(E_i)_{e,x}$$

で定義すると

$$A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^d q_{ij}^k A_k^*$$

であり、

$$\mathcal{A}^* = \langle A_0^*, \dots, A_d^* \rangle_{\mathbb{C}} = \langle E_0^*, \dots, E_d^* \rangle_{\mathbb{C}}$$

を dual Bose–Mesner algebra と呼ぶ。

さて、Terwilliger algebra とは、 \mathcal{A} と \mathcal{A}^* で生成された $M_{|G|}(\mathbb{C})$ の部分代数である。すなわち、

$$T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{A}^* \rangle \subset M_{|G|}(\mathbb{C}).$$

Terwilliger algebra T は半単純で、 $G \neq 1$ ならば非可換である。

問題 $\dim T$ を求めよ。また、 T の既約表現を決定せよ。

$\dim T$ の下限を求めるために次のような T の部分空間を考えよう。

$$T_0 = \langle E_i^* A_j E_k^* \mid 0 \leq i, j, k \leq d \rangle_{\mathbb{C}}.$$

$E_i^* A_j E_k^*$ の定義どおり計算すれば、 $E_i^* A_j E_k^* = 0$ と $p_{ij}^k = 0$ が同値なことがわかる。さらに $\{E_i^* A_j E_k^* \mid p_{ij}^k \neq 0\}$ は一次独立、従って、 $\dim T_0 = |\{(i, j, k) \mid p_{ij}^k \neq 0\}|$ である。

同様に

$$T_0^* = \langle E_i A_j^* E_k \mid 0 \leq i, j, k \leq d \rangle_{\mathbb{C}}.$$

と定義すると、 $E_i A_j^* E_k = 0$ と $q_{ij}^k = 0$ は同値であることがわかる。これは

$$\text{tr}(E_i A_j^* E_k \overline{(E_l A_m^* E_n)^T}) = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} q_{ij}^k \text{rank}(E_j)$$

からただちにわかる。また、この式から $\{E_i A_j^* E_k \mid q_{ij}^k \neq 0\}$ の一次独立性も言えて、 $\dim T_0^* = |\{(i, j, k) \mid q_{ij}^k \neq 0\}|$ が言える。

次に $\hat{T} = \text{End}_G(\mathbb{C}G)$ を G を G に共役で作用させた置換表現の centralizer algebra とする。すると、 \hat{T} の次元は G の $G \times G$ 上の軌道の数であり、それは $\sum_{i=0}^d |G|/|C_i|$ となることがわかる。

以上の考察より、次の定理を得る。

Theorem 1 (i) $|\{(i, j, k) \mid p_{ij}^k \neq 0\}| \leq \dim T$.

(ii) $|\{(i, j, k) \mid q_{ij}^k \neq 0\}| \leq \dim T$.

(iii) $\dim T \leq \sum_{i=0}^d |G|/|C_i|$.

Proof. 上の議論と (i) $T_0 \subset T$, (ii) $T_0^* \subset T$, (iii) $T \subset \hat{T}$ より明らか。

G が abelian のときは Theorem 1 より $\dim T = |G|^2$ となる。すなわち、 $T = M_{|G|}(\mathbb{C})$ である。 G が nonabelian のとき、 $\dim T$ を一般的に与える式は今のところ見つかっていない。

G が、任意の i, j, k について集合

$$S_{ijk} = \{(g, h) \in C_i \times C_j \mid gh \in C_k\}$$

の上で可移に作用するとき、 G を triply transitive であると呼ぶことにする。このとき、 $\dim \tilde{T}$ は空でない S_{ijk} 達の数と一致するので G が triply transitive であるための必要十分条件は $T_0 = \tilde{T}$ となることである。そこで、 $T_0 = T$ が成り立つとき G を triply regular と呼ぶことにする。明らかに、triply transitive ならば triply regular である。さらに $T_0^* = T$ が成り立つとき G を dually triply regular と呼ぶことにする。

これらの性質について、簡単な事実を述べておく。

1. 任意の abel 群は triply transitive である。
2. もし G_1, G_2 が triply transitive ならば $G_1 \times G_2$ もそうである。
3. 位数 $2n$ の二面体群は triply transitive である。
4. 位数 16 のすべての群は triply transitive である。
5. 4 次交代群は triply regular だが triply transitive ではない。

一般に次の定理が成り立つ。

Theorem 2 G の既約指標を χ_0, \dots, χ_d とするとき、任意の i, j について $\chi_i \chi_j$ が multiplicity-free ならば $T_0^* = \tilde{T}$ 、特に dually triply regular である。

Proof. 一般に $\chi_i \chi_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k \chi_k$ とすると $\sum_{i,j,k} (N_{ij}^k)^2 = \sum_{i=0}^d |G|/|C_i|$ が成り立つ。これより、もし $N_{ij}^k \in \{0, 1\}$ ならば

$$\begin{aligned} \dim \tilde{T} &= \sum_{i=0}^d |G|/|C_i| \\ &= \sum_{i,j,k} N_{ij}^k \\ &= |\{(i, j, k) \mid N_{ij}^k \neq 0\}| \\ &= |\{(i, j, k) \mid q_{ij}^k \neq 0\}| \\ &= \dim T_0^* \end{aligned}$$

となる。

Remark. 上の定理の証明と同様に

$$\sum_{i,j,k} \frac{|C_k|}{|C_i||C_j|} (p_{ij}^k)^2 = \sum_{i=0}^d \frac{|G|}{\chi_i(1)^2}$$

という式が得られるがこの式の意味するところは何だろうか。

ややこじつけの感もあるが、群環の quantum double との関係述べる。 \tilde{A} を $G \times G \times G$ を基底とする \mathbb{C} 上のベクトル空間とし、

$$(x, g, a)(y, h, b) = \delta_{x^{-1}ga, h}(xy, g, ab)$$

で基底の間の積を定義すると \tilde{A} は代数になる。群環の quantum double \mathcal{D} とは

$$\mathcal{D} = \langle (h, g, h) | g, h \in G \rangle_{\mathbb{C}} \subset \tilde{A}$$

で定義された部分代数で、 \mathcal{D} は quasitriangular な Hopf 代数になることが知られている。ここで、

$$T = \langle (1, g, h) | g, h \in G \rangle_{\mathbb{C}} \subset \tilde{A}$$

とにおいて、 G を共役による $G \times G \times G$ への作用を \tilde{A} に線形に拡張し、さらに T に制限し、その固定点を T^G であらわすと、 T^G は \tilde{T} と同型になる。すなわち、 \tilde{A} は quantum double \mathcal{D} と Terwilliger algebra T を含む代数である。

最後に位数 24 以下の群で triply transitive でない群のリストを下に挙げる。それぞれについて T_0, T_0^*, T, \tilde{T} の次元を表にした。この計算は群計算システム GAP[2] をもちいて計算したものである。Balmaceda-大浦 [1] は $G = S_5, A_5$ について T の既約表現、次元を決定している。

	$\dim T_0$	$\dim T_0^*$	$\dim T$	$\dim \tilde{T}$
A_4	19	19	19	22
5.4	29	29	29	37
7.3	35	35	37	41
$SL(2, 3)$	75	73	75	76
S_4	42	43	43	43

なお、位数 100 以下の直既約な非可換群について、GAP を用いて $\dim T_0, \dim T_0^*, \dim \tilde{T}$ を決定したので、その表をつける。理由は今のところ不明だが、 $\dim T_0 = \dim \tilde{T}$ かつ $\dim T_0^* < \dim \tilde{T}$ であるような群の例は一つも見つからなかった。

参考文献

- [1] J. Balmaceda and M. Oura, The Terwilliger algebras of the group association schemes of S_5 and A_5 , preprint.
- [2] M. Schönert, et.al., GAP: Groups, Algorithms and Programming, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1992.
- [3] P. Terwilliger, The subconstituent algebra of an association scheme, I, II, III, J. Algebraic Combinatorics, 1 (1992), 363–388, 2 (1993), 73–103, 2 (1993), 177–210.

G	Order	$\#P_{i,j}^k$	$\#N_{i,j}^k$	$\sum_i C_G(u_i) $	3-trs.
S3	6	11	11	11	○
D8,Q8	8	28	28	28	○
D10	10	22	22	22	○
6.2	12	44	44	44	○
A4	12	19	19	22	
D14	14	37	37	37	○
D8Y4,16-9,(2×4).2,16-11	16	112	112	112	○
D16,QD16,Q16	16	64	64	64	○
D18,3 ² : 2	18	56	56	56	○
10.2	20	88	88	88	○
5:4	20	29	29	37	
7:3	21	35	35	41	
D22	22	79	79	79	○
12.2	24	176	176	176	○
24-11,D24,Q8+S3	24	116	116	116	○
SL(2,3)	24	75	73	76	
S4	24	42	43	43	
D26	26	106	106	106	○
3 ² : 3,9:3	27	137	137	153	
14.2	28	148	148	148	○
D30	30	137	137	137	○
32-16, -22	32	448	448	448	○
D16Y4, 32-27, -41	32	256	256	256	○
D8YD8,D8YQ8	32	304	304	304	○
32-44, -48	32	142	142	160	
D32,QD32,Q32	32	184	184	184	○
D34	34	172	172	172	○
(2 ² × 3).3	36	171	171	198	
(3 ² × 2).2,18.2	36	224	224	224	○
3 ² : 4	36	48	48	66	
D38	38	211	211	211	○
13:3	39	85	85	97	
20.2	40	352	352	352	○
10.4	40	116	116	148	
40-12,D40,Q8+D10	40	268	268	268	○
7:6	42	55	55	79	
D42	42	254	254	254	○
22.2	44	316	316	316	○
D46	46	301	301	301	○

G	Order	$\#P_{ij}^k$	$\#N_{ij}^k$	$\sum_i C_G(u_i) $	3-trs.
13:4	52	76	76	103	
$(3^2 : 3) : 2$	54	208	192	216	
$3^2 : 6, 9:6$	54	127	127	162	
$3^3 : 2, (3 \times 9):2, D54$	54	407	407	407	○
11:5	55	63	63	97	
28.2	56	592	592	592	○
56-10, D56, Q8+D14	56	484	484	484	○
$2^3 : 7$	56	71	71	106	
19:3	57	159	159	177	
D58	58	466	466	466	○
30.2	60	548	548	548	○
S3+(5:4)	60	132	135	161	
A5	60	71	65	77	
D62	62	529	529	529	○
21.3	63	315	315	369	
64-30, -42	64	1792	1792	1792	○
64-53, -102	64	1024	1024	1024	○
64-105, -109	64	1216	1216	1216	○
64-112, -133, 64-169, -182	64	568	568	640	
64-137, -153, 64-188, -200	64	736	736	736	○
64-157, -168	64	784	784	784	○
64-183, -187	64	406	406	496	
64-201, -224, 64-234, -240	64	538	526	544	
64-225, -233	64	340	340	448	
D8YD16, D8YQD16, Q8YD16	64	583	592	592	
64-244, -249, 64-256, -258	64	361	364	400	
64-250, -255	64	223	226	280	
64-259, -264	64	367	376	376	
64-265, -267	64	616	616	616	○
D66	66	596	596	596	○
34.2	68	688	688	688	○
17:4	68	112	112	148	
D70	70	667	667	667	○

G	Order	$\#p_{ij}^k$	$\#N_{ij}^k$	$\sum_i C_G(u_i) $	3-trs.
$(4 \times 3^2).2,36.2$	72	896	896	896	○
$(Q8 \times 3).3$	72	675	657	684	
$(6.2)Y(6.2)$	72	484	484	484	○
$(2 \times 3^2).4$	72	192	192	264	
72-36, -39, D72, Q8+D18	72	764	764	764	○
72-42, -44	72	394	382	400	
72-45	72	89	89	137	
72-47	72	138	156	156	
72-48	72	44	44	101	
72-49, -50	72	160	149	179	
D74	74	742	742	742	○
$5^2 : 3$	75	257	257	281	
38.2	76	844	844	844	○
13:6	78	80	80	134	
D78	78	821	821	821	○
40.2	80	1408	1408	1408	○
$4Y(10.4),20.4$	80	464	464	592	
80-30, -36	80	1072	1072	1072	○
$(10.2)YD8,(10.2)YQ8$	80	616	616	616	○
80-41, -44	80	278	284	352	
80-45, -48	80	514	502	520	
D80,80-50,80-51	80	928	928	928	○
$2^4 : 5$	80	94	94	148	
81-8,81-9, $(3^2 : 3)Y9,27:3$	81	1233	1233	1377	
$3\mathbb{3},81-13, -15$	81	443	443	513	
D82	82	904	904	904	○
$(14.2):3$	84	220	220	316	
42.2	84	1016	1016	1016	○
$A4+(7:3)$	84	315	315	342	
D86	86	991	991	991	○
44.2	88	1264	1264	1264	○
88-10, D88, Q8+D22	88	1108	1108	1108	○
$(3^2 \times 5) : 2, D90$	90	1082	1082	1082	○
46.2	92	1204	1204	1204	○
31:3	93	379	379	409	
D94	94	1177	1177	1177	○

G	Order	$\#P_{ij}^k$	$\#N_{ij}^k$	$\sum_i C_G(u_i) $	3-trs.
96.07a	96	2816	2816	2816	○
96.09e, 18b	96	304	269	344	
96.14d,e, 15c, 16c,d, 17b,c	96	1232	1232	1232	○
96.16a,b, 17a, 18a, 19a,b, 20a,b, 21a,b, 22a,b	96	1856	1856	1856	○
96.17d	96	1200	1168	1216	
96.26a,c,d	96	704	704	704	○
16 groups of order 96	96	1472	1472	1472	○
34 groups of order 96	96	932	908	944	
96.33d, 34c, 41d,	96	141	144	216	
96.42a,b, 43a,b	96	974	992	992	
96.42c,43c,	96	486	520	568	
96.42d	96	259	281	296	
96.44a,d,e, 45a,d,e, 46a,b, 47a,b, 48a,b	96	692	698	752	
96.44b,c, 45b,c	96	497	506	560	
96.49a, 50a, 51a	96	1304	1304	1304	○
96.49b, 50b,c, 51b	96	599	581	608	
96.054,056,057	96	520	472	544	
96.055,058,059	96	340	352	352	
96.060,068	96	234	231	243	
96.062	96	672	688	688	
96.063,064,067	96	366	346	400	
D98,7 ² : 2	98	1276	1276	1276	○
(5 ² × 2).2,50.2	100	1408	1408	1408	○
100-13	100	214	214	262	
100-14	100	210	210	262	
100-15	100	323	329	373	
25:4	100	209	209	262	

On Distance- i -Graphs of Distance-Regular Graphs

大阪教育大学 数理科学 鈴木 寛

All graphs considered in this note are finite undirected graphs without loops or multiple edges.

Let Γ be a graph. For two vertices α, β in Γ , let $\partial(\alpha, \beta) = \partial_\Gamma(\alpha, \beta)$ denote the distance between α and β in Γ , i.e., the length of a shortest path connecting α and β in Γ . Let $d = d(\Gamma)$ denote the diameter, i.e., the maximal distance in Γ .

The distance- i -graph $\Gamma^{(i)}$ is the graph defined on the same vertex set as Γ and that α and β are adjacent if and only if $\partial_\Gamma(\alpha, \beta) = i$.

Let $\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \mid \partial(\alpha, \beta) = i\}$ and $\Gamma(\alpha) = \Gamma_1(\alpha)$.

A connected graph Γ is said to be *distance-regular* if the cardinality of the set

$$P_{i,j}^m = P_{i,j}^m(\alpha, \beta) = \Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)$$

depends only on i, j and m . In this case, we write $p_{i,j}^m = |P_{i,j}^m|$ using lower case letters. In particular, we set $k_i = p_{i,i}^0 = |\Gamma_i(\alpha)|$ and $k = k_1$, which is the valency of Γ . Let

$$c_i = p_{i-1,1}^i, \quad a_i = p_{i,1}^i, \quad \text{and} \quad b_i = p_{i+1,1}^i.$$

Note that $c_i + a_i + b_i = k = b_0$ and $c_1 = 1$.

The following is called *the intersection array* of Γ .

$$\iota(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccccc} * & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_{d-1} & * \end{array} \right\}.$$

For the references to the theory of distance-regular graphs see the following excellent monographs [2, 7].

We study the distance- i -graph $\Gamma^{(i)}$ of a distance-regular graph Γ and its connected component Δ . Since Γ is distance-regular, $\Gamma^{(i)}$ is edge-regular,

i.e., $\Gamma^{(i)}$ is regular of valency k_i and any two adjacent vertices in $\Gamma^{(i)}$ have precisely $p_{i,i}^i$ comon neighbors. As the relation

$$R_i = \{(\alpha, \beta) | \partial_{\Gamma}(\alpha, \beta) = i\}$$

can be regarded as a relation in a very special class of association schemes called P -polynomial schemes, the graph $\Gamma^{(i)}$ has a lot of special features.

The following are well known.

Proposition 1 *Let Γ be a distance-regular graph of diameter d , valency $k > 2$ and Δ a connected component of a distance- i -graph $\Gamma^{(i)}$ for some $i > 0$. If $\Gamma^{(i)}$ is not connected, i.e., $\Delta \neq \Gamma^{(i)}$, then one of the following holds.*

- (1) $i = d$, Δ is a clique and Γ is antipodal.
- (2) i is even, $\Gamma^{(i)}$ has two connected components and Γ is bipartite.

The distance-regular graphs satisfying the conditions in Proposition 1 are called *imprimitive*.

Theorem 2 ([1]) *Let Γ be a distance-regular graph of diameter $d \geq 3$ and valency $k > 2$. If $\Delta = \Gamma^{(i)}$ is a distance-regular graph of diameter d for some i , then $i = 2, d - 1$, or d and one of the following holds. Here the tables show the correspondence between distances.*

$$(I) \begin{array}{c|cccccc} \Delta & 0 & 1 & 2 & \cdots & d-1 & d \\ \Gamma & 0 & 2 & 4 & \cdots & 3 & 1 \end{array}$$

Γ is a generalized Odd graph, i.e., $p_{1,j}^1 \neq 0$ if and only if $j = d$.

$$(II) \begin{array}{c|cccccc} \Delta & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \Gamma & 0 & d & 1 & d-1 & 2 & \cdots \end{array}$$

$\Gamma_d(\alpha)$ is a clique of size at least 2, i.e., $p_{j,d}^d \neq 0$ if and only if $j = 0$ or 1.

$$(III) \quad \frac{\Delta \mid 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ d-1 \ d}{\Gamma \mid 0 \ d \ 2 \ d-2 \ \cdots \ d-1 \ 1}$$

If $d = 3$, then $p_{1,3}^3 = 0 \neq p_{2,3}^3$.

If $d = 4$, then $p_{1,4}^4 = p_{3,4}^4 = 0$, $p_{2,4}^4 \neq 0 \neq p_{2,3}^4$.

If $d \geq 5$, then $p_{j,d}^d \neq 0$ if and only if $j = 0, 2$. Moreover if $d = 2e - 1 \geq 5$, then $p_{1,j}^j \neq 0$ implies $j = e$ and if $d = 2e \geq 5$, then $p_{1,j}^j \neq 0$ if and only if $j = e, e + 1$.

$$(IV) \quad \frac{\Delta \mid 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \cdots \ d-1 \ d}{\Gamma \mid 0 \ d-1 \ 2 \ d-3 \ 4 \ \cdots \ 1 \ d}$$

Γ is an antipodal 2-cover. Moreover, if $d = 2e$, then $p_{1,j}^j \neq 0$ implies $j = e$ and if $d = 2e + 1$, then $p_{1,j}^j \neq 0$ if and only if $j = e, e + 1$.

For the proof and the examples of each type in Theorem 2, see [2, Section 3.4], [7, Section 4.2 D] and [6]. We note as in [2, Theorem 3.4.2] that if Γ satisfies the parametrical conditions above, $\Gamma^{(i)}$ is distance-regular for a suitable i .

Recently, the author gave a diameter bound for the distance-regular graphs of type III in Theorem 2.

Theorem 3 ([15]) *Let Γ be a distance-regular graph of diameter d and valency $k > 2$. If $\Gamma^{(d)}$ is a distance-regular graph of diameter d and $\Gamma_2^{(d)}(\alpha) = \Gamma_2(\alpha)$. Then $d \leq 4$.*

Proposition 1 and Theorem 2 indicates a couple of things.

Firstly, if Γ is a distance-regular graph, then apart from the original $\Gamma = \Gamma^{(1)}$, only a few $\Gamma^{(i)}$'s can have special features. They are $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(d-1)}$ and $\Gamma^{(d)}$. We shall see similar nature as we consider the condition:

$$\Gamma_2^{(i)}(\alpha) = \Gamma_j(\alpha) \text{ for some } j.$$

Note that this condition is automatically satisfied if $\Gamma^{(i)}$ is of diameter $d = d(\Gamma)$, i.e., a distance-regular graph of diameter $d \geq 2$.

Secondly, in the distance-regular graph Γ considered in Proposition 1 and Theorem 2, lots of intersection numbers $p_{i,j}^m$ vanish. And the graphs considered in Theorem 2 are either imprimitive or very close to be imprimitive. Hence one of the motivations of this study is the investigation of ‘nearly imprimitive distance-regular graphs’.

We begin by stating one of the key propositions which deals with the vanishing condition of $p_{i,i}^2$.

Proposition 4 *Let Γ be a distance-regular graph of diameter $d \geq 2$ and valency $k > 2$. If $p_{i,i}^2 = 0$ for some $i < d$, then one of the following holds.*

- (1) Γ is the Biggs-Smith graph and $i = 5$.
- (2) Γ is the point graph of a generalized octagon of order $(s, 1)$ and $i = 2$.
- (3) Γ is the point graph of a generalized dodecagon of order $(s, 1)$ and $i = 2, 3$, or 4 .

As a direct corollary, we have a starting point of our study.

Corollary 5 *Let Γ be a distance-regular graph of diameter $d \geq 2$ and valency $k > 2$. If $i \neq 2, d$, then $\Gamma_2^{(i)}(\alpha) \supset \Gamma_2(\alpha)$ except the following.*

- (1) Γ is the Biggs-Smith graph and $i = 5$.
- (2) Γ is the point graph of a generalized dodecagon $GD(s, 1)$ and $i = 3$ or 4 .

As we can expect in view of Theorem 2, we can conclude $i = d - 1$ if we further assume $\Gamma_2^{(i)}(\alpha) = \Gamma_2(\alpha)$ in Corollary 5 with a few exceptions.

Theorem 6 *Let Γ be a distance-regular graph of diameter d and valency $k > 2$. Let Δ be a connected component of $\Gamma^{(i)}$ with $3 \leq i \leq d - 1$. If $\Delta_2(\alpha) = \Gamma_j(\alpha)$, then $j = 2$ and one of the following holds.*

- (1) $i = d - 1$, Γ is an antipodal 2-cover and $a_1 = a_{d-1} = a_d = 0$.

(2) $i = 4$, $d = 6$, Γ is a bipartite antipodal 2-cover and $\Gamma^{(4)}$ is not connected.

(3) $i = 4$, $d = 5$, Γ is bipartite and $\Gamma^{(4)}$ is not connected.

For a connected component Δ of $\Gamma^{(d)}$, we could not determine the index j satisfying the condition $\Delta_2(\alpha) = \Gamma_j(\alpha)$. But we have $j = 1$ or 2 if the diameter is sufficiently large under an extra condition:

$$\Delta_3(\alpha) = \Gamma_l(\alpha) \text{ for some } l.$$

Theorem 7 *Let Γ be a distance-regular graph of diameter $d \geq 3$ and valency $k > 2$. Let Δ be a connected component of $\Gamma^{(d)}$. If $\Delta_2(\alpha) = \Gamma_j(\alpha)$ and $\Delta_3(\alpha) = \Gamma_l(\alpha)$ for some j, l , then one of the following holds.*

(1) $j = 1$, $l = d - 1$ and $p_{d,d}^d = 0$.

(2) $j = 2$, $l = d - 2$ and $a_1 = a_{d-1} = a_d = 0$.

(3) $j = 2$, $l = 1$, and $d = 3$.

(4) $j = 2$, $l = 3$, and $d = 4$.

(5) $j = 3$, $l = 5$, and $d = 6$.

(6) $j = 3$, $l = 4$, $d = 6$ and $a_1 = a_2 = a_3 = a_6 = 0$.

(7) $j = 4$, $l = 2$, $d = 6$ and Γ is bipartite.

(8) $j = 4$, $l = 6$, $d = 8$ and Γ is bipartite.

Most of the graphs which appear in Theorems 6 and 7 are closely related to the graphs in Theorem 2.

For the distance-2-graph $\Gamma^{(2)}$, we can determine parametrical conditions if $\Gamma^{(2)}$ is distance-regular. We shall discuss it somewhere. See also Proposition 3.3 in [16].

Theorem 8 *Let Γ be a distance-regular graphs of diameter d and valency $k > 2$. Suppose in $\Delta = \Gamma^{(3)}$, for every pair of vertices α, β with $\partial_\Delta(\alpha, \beta) = i < d(\Delta)$, $\Delta_{i+1}(\alpha) \cap \Delta_1(\beta) \neq \emptyset$. then $d(\Delta) \leq 4$. Moreover, if $d(\Delta) = 4$, then one of the following holds.*

- (1) $d = d(\Delta)$ and Γ is of type IV in Theorem 1.2.
- (2) $d = 7$, $p_{j,3}^3 \neq 0$ if and only if $j = 0, 1, 2, 3, 5$, or 6. Moreover $p_{j,7}^7 \neq 0$ implies $j = 0, 6$ or 7.

Remarks

We introduced a class of distance-regular graphs, which include those appeared in Theorem 2. They are either imprimitive with some extra conditions or very close to be imprimitive. So in some sense we defined 'smallness' in distance-regular graphs.

Here are several problems and fields of study in this direction.

1. Let Γ be a distance-regular graph of diameter d . For a subset $I \subset \{1, 2, \dots, d\}$, let Δ be a connected component of the distance- I -graph $\Gamma^{(I)}$, i.e, a graph defined on the same vertex set as Γ such that two vertices α and β are adjacent if and only if $\partial_\Gamma(\alpha, \beta) \in I$. Study the condition when Δ is also a distance-regular graph. This paper is concerned with the case $I = \{i\}$ with $i > 1$.

It is probable that there is an absolute bound on the diameter $d(\Delta)$, if I contains an index i with $2 < i < d - 1$. And it seems very interesting to consider cases with $I = \{2\}$, $\{d - 1\}$, $\{d\}$ $\{1, 2\}$, and possibly $\{1, d\}$. See [9].

2. Study the condition $p_{i,i}^2 = p_{i,i}^j$. If one can derive either a diameter bound or some severe restrictions on parameters for small j 's (say $j \leq 4$), the combination with vanishing conditions of $p_{i,i}^j$'s will determine distance-regular graphs which appear as a connected component of $\Gamma^{(i)}$ with $3 \leq i \leq d - 2$.

3. Determine vanishing conditions of intersection numbers $p_{j,l}^i$ with $i \geq 3$. For a feasible triple (i, j, l) , the condition $p_{j,l}^i = 0$ is very restrictive especially when $i + j + l$ is even and less than or equal to $2d(\Gamma)$.

It may be interesting to start with the determination of the vanishing conditions of $p_{i,i}^3, p_{i,i+1}^3, p_{i,i+2}^3$ or $p_{i,i}^4$.

4. Study the condition

$$p_{i,j}^i = p_{i,j+1}^i = 0.$$

The author obtained reasonable generalizations for $j \leq 5$.

5. Study Case (1) in Theorem 6 and type IV in Theorem 2. And characterize $H(2e, 2)$'s as those with unbounded diameter.
6. Study Case (2) in Theorem 7 and give a generalization of Theorem 3. If d is even and Γ is bipartite, a bipartite half Δ of Γ is of type II in Theorem 2. A bipartite graph with the array

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} * & 1 & 5 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 14 & 10 & 3 & * \end{array} \right\}$$

has the complement of the Hoffman-Singleton graph as its bipartite half. In particular, $p_{4,i}^4 \neq 0$ if and only if $i = 0$ or 2 . It is not hard to show that among the known distance-regular graphs of type II in Theorem 2, including those with $d = 2$, the example above is the only one which has corresponding Γ .

7. Classify distance-regular graphs which are in cases (5), (6), (7), and (8) in Theorem 7. The author does not know any examples.
8. Classify distance-regular graphs of diameter 7 in Theorem 8 possibly adding an extra condition that Δ is distance-regular.

参考文献

- [1] E. Bannai and E. Bannai, How many P-polynomial structures can an association scheme have?, *Europ. J. Combin.* 1 (1980), 289–298.
- [2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin-Cummings, California, 1984.
- [3] E. Bannai and T. Ito, Current researches on algebraic combinatorics, *Graphs and Combin.* 2 (1986), 287–308.
- [4] N. L. Biggs, A. G. Boshier, and J. Shawe-Taylor, Cubic distance-regular graphs, *J. London Math. Soc.* (2) 33 (1986), 385–394.
- [5] A. Boshier and K. Nomura, A remark on the intersection arrays of distance-regular graphs, *J. Combin. Th. (B)* 44 (1988), 147–153.
- [6] A. E. Brouwer, A remark on association schemes with two P-polynomial structures, *Europ. J. Combin.* 10 (1989), 523–526.
- [7] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [8] A. Hiraki and H. Suzuki, On distance-regular graphs with $b_1 = c_{d-1}$, *Math. Japonica* 37 (1992), 751–756.
- [9] J. H. Koolen, On uniformly geodetic graphs, preprint.
- [10] B. Mohar and J. Shawe-Taylor, Distance-biregular graphs with 2-valent vertices and distance-regular line graphs, *J. Combin. Th. (B)* 38 (1985), 193–203.
- [11] H. Suzuki, On distance-regular graphs with $k_i = k_j$, to appear in *J. Combin. Th. (B)*.
- [12] H. Suzuki, On distance-regular graphs with $b_1 = c_{d-1}$, to appear in *Mathematical J. SUT*.

- [13] H. Suzuki, Bounding the diameter of a distance-regular graph by a function of k_d , *Graphs and Combin.* 7 (1991), 363–375.
- [14] H. Suzuki, Bounding the diameter of a distance-regular graph by a function of k_d , II, to appear in *J. Algebra*.
- [15] H. Suzuki, A note on association schemes with two P-polynomial structures of type III, preprint.
- [16] H. Suzuki, On Strongly Closed Subgraphs of Highly Regular Graphs, preprint.

この報告の内容は下記の論文からとったものです。

On Distance- i -graphs of Distance-regular graphs (Preliminary Version
: *July 19, 1993*), Preprint.

Affine distance-transitive graph の局所的性質による分類について

富士通研究所 横山 和弘

momoko@iiias.flab.fujitsu.co.jp

1 はじめに

近年重要視されてきている問題に distance regular graph (以下 DRG と略す) の完全分類問題がある。その分類問題の一つの部分問題として distance transitive graph (以下 DTG と略す) の分類がある。DRG の部分クラスである DTG は、本来 DRG が持つ組合せ論的な性質の上に群論的な性質を持っており、この二つの重要な性質により、組合せ論と群論双方の議論が使え、DTG の分類は DRG の分類と比較して容易であると考えられる。しかも、DRG の多くの例が DTG であることを考慮に入れるならば、DTG の分類は DRG の分類に大きく貢献することにもなり、それは、一つのステップとも考えられる。すなわち、まず解き易い問題として、そして DRG の分類の先行として DTG の分類を捉えることができる。また、近年重要視されてきた有限幾何と密接な関係を持ち、ある種の DTG(DRG) は対応する有限幾何の隣接グラフ表現であり、逆に、グラフの性質より、DTG より対応する有限幾何を再構成することも可能になってきている。したがって、DTG(DRG) の分類問題は有限幾何の分類問題に、またその逆に、応用される。ここでは、まず DTG の分類プログラムの概要とその途中経過について概要を述べ、ついで分類の中で現れる affine の場合についてその分類に重要な役割を持つ大域的アプローチと局所的アプローチを説明し、最後に本稿の主題である局所的アプローチについて主要な結果と技術について述べる。

2 DTG の分類プログラム

まず、DTG の定義を与える。

定義 1. 有限無向連結グラフ Γ とその自己同形群 G に対して、 Γ が G -distance transitive であるとは、任意の 4 頂点 x, y, u, v で、 $\partial(x, y) = \partial(u, v)$ を満たすものに対して、 $x^g = u, y^g = v$ となる G の元 g が存在することをいう。ここで、 $\partial(x, y)$ は 2 頂点 x, y の距離 (distance)、すなわち x と y とを結ぶ最短のパス (path) の長さ、を表す。

グラフ Γ がある自己同形群 G に対して、 G -distance transitive ならば、 $\text{Aut}(\Gamma)$ に対して $\text{Aut}(\Gamma)$ -distance transitive でもある。よって、 G を省略して Γ を単に distance transitive graph と言うことができる。

DTG の分類問題は大きく次の部分問題に分けることができる。

(1) 原始的な場合 (G が置換群として原始的に Γ に作用) の分類

(2) 原始的の場合の分類を用いて一般の場合すなわち非原始的な場合を分類する。

DTG Γ が非原始的な場合には、 Γ は antipodal もしくは bipartite であるから、その derived graph もしくは halved graph (bipartite half) を作るという操作が考えられる。この操作を高々 2 回行なうことにより原始的なグラフが現れるので (Smith, Biggs-Gardiner による)、(1) \Rightarrow (2) という問題解決の戦略が生ずる。さらに、(2) の問題は DRG の場合と比べて、自己同形群の立場を使えるので、(2) の解決はかなり容易であると思われる。というのは、非原始的なグラフ Γ より作られる原始的なグラフ Γ' が Γ の derived graph である場合には、 $\text{Aut}(\Gamma) = K \cdot \text{Aut}(\Gamma')$ 、 K はある正規部分群、となり、 Γ の halved graph である場合には $\text{Aut}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma')^2$ となる。この事実は群論的にかかなり強い制約であることから、『問題が(原始的なグラフの分類に比べて)比較的容易に解ける』ことが予想される。(DRG では covering の問題を解くことは難しい。)

さて、上記より問題はまず (1) を解くことに帰着された。そこで、以下では原始的 DTG の分類を考える。グラフの直径 (diameter) が 1 の場合は G は Γ の頂点上 2 重可移であり、直径が 2 の場合はランク 3 の置換群となる。したがって、これらの場合の分類には、2 重可移群、ランク 3 の置換群の分類結果が利用可能となる。そこで、直径は 3 以上であるとしてよいことになる。また、valency (すなわち 1 点に隣接する頂点の個数)、が 2 の場合は多角形 (polygon) であることより、valency は 3 以上としてよい。原始的 DTG の分類は次の定理により更に細分化される。

Theorem 1 (Praeger-Saxl-Yokoyama [8]) Γ を直径が 3 以上、valency が 3 以上の原始的 DTG とし、その自己同形群を G とおく。この時、次のいずれかが成り立つ。

- (i) Γ は Hamming graph である。
- (ii) G は almost simple である。(すなわち、ある単純群 X が存在して $X \subset G \subset \text{Aut}(X)$ 。この X を simple socle という。)
- (iii) G は Γ の頂点全体に正則に作用する基本可換正規部分群を持つ。

以下 (ii) の場合を almost simple の場合と呼び、(iii) の場合を affine の場合と呼ぶ。

上の定理により分類問題は二つの部分問題へと分割されることになる。一つは (ii) almost simple の場合の分類であり、他方は (iii) affine の場合の分類である。

(ii) の almost simple の場合の分類は van Bon, Cohen, Cuypers, Inglis, Ivanov, Liebeck, Praeger, Saxl 等により、有限単純群の分類定理を利用した『蝨潰し』的な方法で研究されており、置換指標の既約分解における各既約指標の重複度が 1 である事実を利用して解いたものと、グラフの性質を利用して解いたものがある。Lie 群を simple socle に持つ場合には、対応する BN-pair に関連したグラフが得られる点が興味深い。以下に分類のいくつかを挙げる。

交代群 (対称群) – Saxl, Ivanov, Liebeck-Praeger-Saxl

$\text{PSL}(n, q)$ – Inglis, Liebeck-Saxl, van Bon-Cohen

13 次元以下の古典群 – Inglis

almost simple の場合はほぼ終結したと言えるが、現時点では、まだ完全分類の結果は論文として出版されてはいない。

ここまでの話は、Bannai & Ito [1]、Brouwer, Cohen & Neumaier [3] または Ivanov [4] を参照されたい。

3 affine の場合の分類: 2つのアプローチ

affine の場合の分類については、現時点では2つの異なる方法が提案されている。ひとつは van Bon によるもので、他方は横山によるものである。まず、van Bon の方法とその結果について述べる。van Bon の方法は大域的アプローチとも呼べるもので、それに対して横山の方法は局所的アプローチと呼べるものである。

Theorem 2 (van Bon [2]) Γ を原始的 affine DTG で、直径が3以上、valency が3以上であるものとする。このとき、 Γ は次のいずれかである。

- (a) Γ は bilinear forms graph,
- (b) Γ は Hamming graph,
- (c) 1点の固定部分群 G_0 に対して
 - (c-i) G_0 は可解、特に $G_0 \subset \Gamma L(1, q)$ ここで $q = |V(\Gamma)|$ 、であるか
 - (c-ii) $G_0/F(G_0)$ の一般化された Fitting 部分群が単純群である。(ここで、 $F(G_0)$ は G_0 の Fitting 部分群。)

van Bon の定理により、affine DTG の分類は1点の固定部分群が可解であるか『ほとんど単純』の場合に帰着することができる。

この van Bon の方法は大域的アプローチ (global approach) と呼ぶことができる方法で、自己同形群全体の性質からグラフまたは、自己同形群の構造を決めていく。先の Praeger-Saxl-Yokoyama の定理もこの大域的アプローチに他ならない。しかも、これら両者の特徴は、Praeger-Saxl-Yokoyama は、原始的置換群における O’Nan-Scott の定理を基盤とし、van Bon は、古典群の部分群の分類に関する Aschbacher の結果を基盤としている点である。

これに対して、横山の方法はグラフの局所的な性質から全体を決定していこうとする、局所的アプローチ (local approach) もしくは幾何的アプローチ (geometric approach) と呼べる方法である。すなわち、そのアプローチの基本は1点の近傍系の構造 (グラフ的) を手がかりに、有限幾何を再構成するもので、そこでは、以下の操作を行なう。

局所的アプローチの1方針:

- (Y-1) 1点の固定部分群の置換群論的情報を加えることにより、低ランクの幾何 (geometry) を決定。
- (Y-2) 幾何の特徴付けの結果を用いて、低ランクの幾何に対応する部分グラフを決定。
- (Y-3a) 直接、特徴付けを利用する。
- (Y-3b) 以下帰納的に幾何のランクを上げ (部分グラフを逐次大きくし) (Y-1)(Y-2) のステップを繰り返すことにより最終的には全体のグラフを決定する。

この方法の背景には、affine の場合には、十分な valency と diameter を持つグラフは有限幾何に対応するものであろうという予測がある。

もう少し局所的アプローチに関して補足し、横山の方法について説明する。現在 affine の場合に現れるグラフは直径に関する無限系列として3種類のみが知られている。

1. Hermitian forms graph – 隣接する2点を含む極大関 (maximal clique) は唯一つ

2. Bilinear forms graph – 隣接する 2 点を含む極大関は 2 個

3. Alternating forms graph – 隣接する 2 点を含む極大関は 3 個以上

(直径が 3 の無限系列には Affine $E_6(q)$ graph がある。Quadratic forms graph は DRG ではあるが、DTG ではない。)

これらのグラフ Γ は、各々の系列内で、グラフを定義する有限体の位数 q と直径 d により定まる。それを仮に $\Gamma(d, q)$ と書くことにする。さらに、上記の 3 系列に属するグラフ $\Gamma = \Gamma(d, q)$ は部分グラフ列として各々が Γ が属する系列と同じ系列に属するものを持つ。

$$\Gamma = \Gamma(d, q) \supset \Gamma(d-1, q) \supset \cdots \supset \Gamma(2, q) \supset \Gamma(1, q) = \text{a maximal clique}$$

この状況より、上の 3 つのグラフを有限幾何的に特徴つける方法が有効であることがわかり、その 3 つを区別する鍵の一つとして隣接する 2 点を含む極大関の個数が考えられる。

そこで、極大関の個数を指定してグラフの分類をするアプローチが考えられ、しかも、この局所的性質より同じ系列に属する部分グラフの列を下から (すなわち直径の小さいものから) 構成していく方法が採れる。これが横山の方法である。そして、現時点での目標は直径が充分大きい場合に、『隣接する 2 点を含む極大関の個数を指定すればグラフは上記のものが抽出される』ことである。

4 局所的アプローチ：極大関の個数

前節において局所的アプローチの説明をしたが、そこでは (Y-2) (Y-3) のステップにおいて有限幾何的特徴付けを必要とした。この有限幾何的特徴付けとしてその目標である 3 種類の forms graph について以下が存在する。

Hermitian forms graph ← Ivanov & Shpectorov [5] による特徴付け。

Bilinear forms graph ← Sprague [9] による attenuated space の分類。

Alternating forms graph ← Munemasa & Shpectorov [7] による特徴付け。

よって、3 種の forms graph を特徴付け (分類) するには十分な材料がそろっているといえる。現時点では、これらの有限幾何的特徴付けを利用した横山のアプローチの結果として、以下の 2 つがある。

Theorem 3 (Yokoyama [10]) Γ が *affine* の場合で、直径と *valency* は共に 3 以上、しかも正則部分群は 2-群ではないとし、更に次の 2 条件を満たすとする。(原始性は仮定していない。)

- (1) 隣接する 2 点を含む極大関は 2 個、
 - (2) Γ の自己同形群 G は三角形にはならない長さ 2 のパス全体の上に可移に作用する。
- この時、 Γ は *bilinear forms graph* である。

Theorem 4 (Yokoyama [11]) Γ が *affine* の場合で、直径と *valency* は共に 3 以上、しかも正則部分群は 2-群ではないとし、更に次の 2 条件を満たすとする。

- (1) 隣接する 2 点を含む極大関は 1 個であり、距離 2 の 2 頂点に同時に隣接する頂点の個数は 3 個以上である、
 - (2) Γ の自己同形群 G は三角形にはならない長さ 2 のパス全体の上に可移に作用する。
- この時、 Γ は *Hermitian forms graph* である。

注意 以上の2つの結果は純粋に極大関の個数による分類にはなっていない。(2)の条件により、1点の固定部分群の構造をある程度決めることができ(2重可移群の分類が利用できる)、この構造により部分グラフの列が構成されている。そこで、上の定理を条件(2)を取って定理を証明することが必要である。(しかし、この条件(2)がある・ないの gap は大きい。)

横山の方法では(2)の条件付きでしか結果が得られていない点で、van Bonの方法の方が『より一般的』であるといえる。しかし、横山の方法では、下から部分グラフを構成していく点で、グラフ自体の構造が明確になるという利点があり、van Bonの定理によりさらに細分されたクラスを最終的に分類するのにあたり局所的な分類が必要であると考えられる。すなわち、両者を併用する方法が最終的には必要であり、それは大域的アプローチ(van Bonの方法)である程度1点の固定部分群を決定した後で、グラフの決定問題として局所的アプローチ(横山の方法等)を用いるという方法である。実際、定理4は、van Bonの定理(定理2)を使っている。そして、最も大事な点は定理2により、1点の固定部分群が「ほとんど単純」(定理2(c-ii))を分類すればよいことである。すなわち、最終的な目標は

定理2(c-ii)の条件の下で、十分大きな diameter と valency を持つものとして上の3つの目標のうち、Hermitian forms graph と alternating forms graph を抽出する

ことである。

上の2つ結果より、局所的アプローチにおいて重要である点を見ることが出来る。それは、「低いランクでの幾何の構成がひとたびできれば、比較的容易に高次のランクまで構成できる」ということである。そこで次節では、低ランクの幾何の構成を考える。

5 低ランクの幾何の構成

定理1で定義されているように、affine DTGの各頂点は有限体 $GF(q)$ 上の線形空間の構造を持ち、自己同型群は線形空間上のシフト(translation)と線形写像の直積で表される。線形空間上のシフトは線形空間自体を abel 群とみた時の、内部自己同型群に他ならない。この性質より次を得る。

特徴 1. 固定した1点 x の近傍は $-x$ の translation を作用させることにより、原点0の近傍に移される。そこで、原点とその近傍の構造を調べることにより、すべての点の近傍の構造は決定できる。0に隣接する頂点全体を N_1 とおけば、頂点 x に隣接する頂点全体は $\{x+y|y \in N_1\} = N_1 + y$ と書ける。

では、幾何の構成を考えよう。低ランクの幾何の要素を列挙すれば、以下である。

低次元の要素

0-次元 ← 点(頂点) = 有限体上の線形空間の元

1-次元 ← 直線 = 部分集合ですべての元は互いに隣接 = 関(clique)

2-次元 ← 平面 = 部分集合で交わる直線2本により生成される = 2本の直線を含む line-closed なものの全体の交わり

0-次元は頂点であるから、問題はない。1-次元の要素は直線であり、「有限幾何の隣接グラフが元のグラフになる」べきものであることより、関(clique)であることが要求される。また、異なる隣接す

る 2 点を通る (包含関係) 直線が必ず 1 本存在する (semi-linearity) が望ましい。そこで、次が示される。

直線の決定 1; singular line

隣接する 2 点 x, y を固定する。 $x^\perp = \{x\} \cup (N_1 + x) = (\{0\} \cup N_1) + x$ とおく。 x^\perp は x 自身と x に隣接する頂点全体よりなる。このとき、 $(x^\perp \cap y^\perp)^\perp = \{x, y\}^{\perp\perp}$ は x, y 両方に隣接する頂点すべてに隣接する頂点全体の集合で定義より関をなしている。この $\{x, y\}^{\perp\perp}$ を x, y を通る singular line と呼ぶ。隣接する x, y を通る singular line は必ず存在し、それは一意的に定まる。この意味で、singular line を直線と考えれば、空間は semi-linear であり、Gamma space と呼ばれる。特に、原点 0 を通る singular line については、 G_0 の N_1 への作用の非原始 block が singular line から原点を取り除いたもの全体である。そこで原点を通る singular line 全体を L_0 とおけば、 G_0 は L_0 に作用し、 K をその作用の kernel とおけば、 G_0/K は L_0 に忠実に作用する。

Lemma 5 *singular line* $\{0, x\}^{\perp\perp}$ は群をなす。特に、 *singular line* を全体として固定する部分群は *singular line* の各頂点全体に 2 重可移に作用する。また、 G_0 の L_0 への作用の kernel K は scalar 倍写像からなる。

ここで、定理 2 (c-ii) を思いだせば、 G_0 の Fitting 部分群 $F(G_0)$ は頂点全体 ($GF(q)$ 上の線形空間とみる) に scalar 倍写像を引き起こしており、望ましいものとして、次がある。(実際、定理 4 では示された。)

目標 1. $K = F(G_0)$ である。

定理 4 の場合のように、singular line 自体が極大関である場合には、singular line を直線とする幾何を構成することになる。しかし、singular line が極大関でない場合には、singular line をそのまま直線とする幾何を構成することが妥当であるかどうか問題になる。例えば、このような場合には、交わる 2 直線が両方とも一つの極大関に入る時とそうでない場合とが現れ、2-次元の要素「平面」を構成する上で、同一に扱えない平面の類が現れてしまうのである。

直線の決定 2; maximal clique

隣接する 2 点を含む極大関が唯一である場合は、singular line が極大関になる。では、そうでない場合を考える。そこで 2 点を原点 0 とその隣接点 x とし、 $0, x$ を通る singular line を s 、 $0, x$ を通る極大関全体の集合を M とおく。このとき、singular line の定義より、

$$s = \bigcap_{m \in M} m$$

となる。 M の元の中では、次の「区別可能」なものが重要になる。

定義 2. 極大関 m が区別可能であるとは、

- (1) 隣接する 2 点に対してその 2 点を通る m と G -共役な極大関 m' を唯一決める決定的な手続きが存在する。
- (2) m に含まれる異なる 2 点に対して、(1) の手続きは m 自身を返す。

M において区別可能な極大関 m が存在する場合として、グラフ構造的もしくは作用群論的に一意に定まるか、一意でなくても、 G_0 の「大きな」正規部分群の M における軌道で、 $0, x$ を含む極大関を一つだけ持つ場合が考えられる。

例えば、大きさが最大の極大関が唯一であれば、それは区別可能である。(bilinear forms graph の多くの場合に成り立つ) alternating forms と bilinear forms の一部については、大きさが最大の極大関は 2 つ存在するが、上の軌道分解ができる。

m が区別可能である場合には、次が成り立つ。

Lemma 6 m は群をなす。また、 m を全体として固定する部分群 G_m は m 上 2 重可移に作用する。更に、 (m, S) 、ここで S は m に含まれる singular line 全体、は non-trivial な 2-design をなし、その自己同型群より、 (m, S) は AG となる。

Lemma 6 と 2 重可移群の分類により、 $G_{0,m}$ が決定され、そこには一般線形群 GL といくつかの例外が現れる。また、区別可能な極大関の一つを決めそれを直線とすることで、singular line を直線とする幾何とは異なる幾何が構成できる。しかも、そこでは各直線の構造とその固定部分群の構造がかなりわかっているのである。

目標 2. 区別可能性を示す。

平面の決定

一度、直線が定まれば次は平面である。一般的な定義に従い、平面は交わる 2 直線を含む最小の line-closed な集合として定義される。このとき、定理 3, 4 で見られる三角形にならない長さ 2 のパス上可移である性質は平面の決定の一意性を裏付けるものである。すなわち、

平面の長さ 2 のパスで三角形にならないものは同じ平面を決定する

のである。平面を一つ決めるときに、その平面の任意の部分集合に対して、その部分集合を含む最小の connected かつ line-closed な集合がもとの平面であるか、その平面に含まれる直線であることが平面の well-definedness を意味するものである。また、有限幾何の構成をグラフの部分系列に対応付けるためのものとして、距離 2 の点 x, y に対して $\{x, y\}^\perp = x^\perp \cap y^\perp$ から生成される line-closed な集合 (幾何の対象) が平面になることが望ましい。実際、これが示されれば、DRG としてみたときのパラメーターの中で、 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ が定まることになる。これらより、低ランクの幾何の特徴付けが有効に作用し、構造が明らかになる。また、DRG としてのこれら最初のパラメーターの決定はグラフの決定に大きな力を与えることにもなる。そこで、次の目標が上げられる。

目標 3. 平面の well-definedness を示す。また距離が 2 である頂点 x, y に対して $\{x, y\}^\perp$ から生成される部分空間が平面であることを示す。

この目標がいれば、群論的に原点を含む平面は群をなし、その平面の固定部分群の構造も明らかになる。ランク 2 の幾何を構成できた後はランクを逐次的に上げた幾何の構成にはいるが、ここでは、ランク 2 の幾何構造が「完全に」定まっていることによるいくつかの情報が使えて、比較的容易になると考えられる。実際、経験的ではあるが、[5,7,9,10,11] を見れば、低いランクの幾何を決定する部分が大きな割合を占めていることがわかる。

6 おわりに

今回、DTG の分類における局所的アプローチとその実際の目標および局所的アプローチの方法論としての低いランクの幾何構造の決定に関するいくつかのステップについて述べた。残念ながら、各ステップに関しての現時点の最新の結果を記載していないが、これらのステップの目標が解決されることが、分類を完成するものに他ならないと信じている。

7 参考文献

- [1] E. Bannai and T. Ito, Current researches on algebraic combinatorics, *Graphs and Combinatorics*, **2**, 287-308, 1986.
- [2] J. T. M. van Bon, "Affine distance-transitive groups," Ph.D. thesis, Rijksuniversiteit, 1990.
- [3] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, "Distance-regular graphs," Springer-Verlag, 1989.
- [4] A. A. Ivanov, Distance-transitive graphs and their classification, in *Investigations in Algebraic Theory of Combinatorial Objects*, Kluwer Publ. Co., 1992.
- [5] A. A. Ivanov and S. V. Shpectorov, A characterization of the association schemes of Hermitian forms, *J. Math. Soc. Japan*, **43**, 25-48, 1991.
- [6] M. W. Liebeck and C. E. Praeger, Affine distance-transitive groups with alternating or symmetric point stabilizer, *Europ. J. Combinatorics*, **13**, 489-501, 1992.
- [7] A. Munemas and S. V. Shpectorov, A local characterization of the graphs of alternating forms, to appear.
- [8] C. E. Praeger, J. Saxl and K. Yokoyama, Distance transitive graphs and finite simple groups, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **55**, 1-21, 1987.
- [9] A. P. Sprague, Incidence structures whose planes are nets, *Europ. J. Combinatorics*, **2**, 193-204, 1981.
- [10] K. Yokoyama, On distance transitive graphs whose automorphism groups are affine, *J. Combin. Th. (B)*, **55**, 190-235, 1992.
- [11] K. Yokoyama, On distance transitive graphs whose automorphism groups are affine II, IAS Research Report 91-23E, 1991.

Affine Difference Set について

大阪大学教養部 平峰 豊

§1 Introduction

位数 mn の群 G の部分集合 D ($|D|=k$) が位数 n の正規部分群 N に関して相対差集合 ((m, n, k, μ, λ) -difference set) であるとは、各元 $a (\neq 1) \in G$ について

$$\#\{(x, y) \mid x, y \in D, a = x^{-1}y\} = \begin{cases} \mu & (a \in N) \\ \lambda & (a \notin N) \end{cases}$$

が成り立つことを言う。(つまり $\widehat{D} \widehat{D}^{(-1)} = \lambda(\widehat{G} - \widehat{N}) + \mu(\widehat{N} - 1) + k \cdot 1$,
ただし $G \cap X$ に対して $X^{(-1)} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$, $\widehat{X} = \sum_{x \in X} x \in \mathbb{C}[G]$.)
 $N=1$ の $\mu=\lambda$ の時は D は (m, n, k, λ) -差集合となる。

$(s+1, s-1, s, 0, 1)$ -相対差集合は位数 s の affine difference set と呼ばれることがある。これはデカルト平面における Singer 群の “affine version” として得られた (Bose [5])。Hoffman ([8]) によって初めて difference set の変形として affine difference set の概念が与えられた。これがさらに、上に述べたような (m, n, k, μ, λ) -相対差集合の形に一般化されていった (Elliot-Butson [6])。位数 n の affine difference set $\{G, N, D\}$ が与えられると位数 n の affine plane が

次のようにして与えられる:

点集合 $P = \{x \mid x \in G\} \cup \{0\}$ (0 は G に含まれない記号)

直線集合 $L = \{Dx \mid x \in G\} \cup \{Nx \cup \{0\} \mid Nx \in G/N\}$

この affine plane を $\pi(G, N, D)$ と書くことにする。以降 G, N, D, n をそのまま用いることとし, G は常にアベル群であると仮定する。

§2 Affine difference set の例とこれに関する予想

G, N, D, n に関する条件をあらためて書くと。

$$\#\{(x, y) \mid x, y \in D, a = x^{-1}y\} = \begin{cases} 0 & (a \in N) \\ 1 & (a \notin N) \end{cases}$$

(for $\forall a \in G - \{1\}$)

$$|G| = n^2 - 1, \quad |N| = n - 1, \quad |D| = n \quad \text{と成る。}$$

p^m と素数中とするとき affine difference set of order p^m の例が次のように与えられる: $G = F_{p^{2m}}^\times \supset N = F_{p^m}^\times$ (\times は乗法群の意味) $D = \{1 + \alpha\alpha \mid \alpha \in F_{p^m}\}$ ここで α は G の生成元。

実は G がアベル群の場合には affine difference set はこの例だけが知られている。(アベル群でない例は [7] に与えられている。) このことから次の予想が立てられている。

(i) G は巡回群である。

(ii) 位数 n は素数中である。

(iii) affine plane $\pi(G, N, D)$ は Desarguesian である。

(i) と (iii) については有効な方法が今のところまだ開発されておらず。 (ii) について考える場合、次の multiplier が重要である。これは $\pi(G, N, D)$ に自然に act する自己同型群 G に含まれない自己同型を induce する。整数 t が D の multiplier であるとは、 $D^{(t)} = \{d^t \mid d \in D\}$ と定めるとき $D^{(t)} = D \cdot a$ ($\exists a \in G$) が成り立つことであると定義する。 $\langle D \rangle = G$ より $(t, |G|) = 1$ になければならない。

§3 Known Results

- (1) (Hoffman [8]) G が cyclic であるという条件のもとで
- (i) $t \mid n$ ならば t は D の multiplier である。
 - (ii) t_1, t_2, t_3, t_4 が D の multiplier ならば $t_1 - t_2 \equiv t_3 - t_4 \pmod{n^2 - 1}$ ならば $n^2 - 1 \mid (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)$ 。
(例: (i) と $2^3 - 1 = 3^2 - 1$ を用いれば $6 \mid n$ となるが分かる。)
- (2) (Elliot-Butson [6]) $t \mid n$ ならば t は D の multiplier である。
- (3) (Kø & Ray-Chaudhuri [10]) G が cyclic なとき n が偶数ならば $n = 2$ 又は $4 \mid n$ でありさらに G の位数 $n-1$ の subgroup は order $\frac{n}{2}$ の Hadamard difference set である。
- (4) (Jungnickel [9], Arasu-Jungnickel [2]) G が abelian という条件のもとで (3) と同じことが成り立つ。

(5) (Anasu [1]) G が cyclic で n が偶数とある。 ϕ を n を割る素数とし、 ℓ を unit group $U(\mathbb{Z}_{n^2-1})$ における ϕ の位数とすれば、

(i) $2 \nmid \ell$ ならば $(\frac{\phi}{\ell}) = 1 \quad \forall$ 素数 $q \mid n^2-1$

(ii) $2 \mid \ell$ ならば $\exists r (\phi \mid r \text{ 依存}) ; n+1 \mid \phi^{r+1} \text{ かつ } n-1 \mid \phi^{r-1}$

(6) (Pott [11]) $3 \mid n$, $3^2 \nmid n$ ならば $n=3$ である。

(7) (Anasu-Pott [3]) G の 2-Sylow 群は cyclic である。

(8) (S [4]) $8 \mid n$, $16 \nmid n$ ならば $n-1 =$ 素数 かつ $(\frac{8}{n-1}) = 1 \quad \forall$ 素数 $q \mid n$.

§4 いくつかの結果

この節では $n \neq$ 素数中のあるときの非存在について得た結果について述べる。 D が affine difference set ならば Da ($a \in G$) もそうであり、 $|G/N| = |D| + 1$ かつ D の定義より D は mod N ですべて異なるので $D \cup \{1\}$ が G/N の完全代表系であると仮定してよい。 $G/N = H$ とおき、 $H^* = H - \{1\}$ から N への写像 g を次により定義する。

$$g: H^* \rightarrow N \quad g(sN) = ss'w \quad \forall s \in D$$

ここで s' は $s'N = s^{-1}N$ とする D の元 (D の中にただ一つ存在) を表すことにする。 また $w = \prod_{x \in N} x$ とする。 (w は N が involution をただ一つ含む時はこれに一致し、そうでないときは単位元に一致する。)

明らかに $\{s, s'\} = \{t, t'\}$ ならば $g(s) = g(t)$ であるが、逆も

成りたつことが相対差集合であることの定義から容易に分かる。

Lemma $g(sN) = g(tN) \iff \{s, s'\} = \{t, t'\}$

従ってとくに次が成りたつ。

Lemma $|g^{-1}(y)| = \begin{cases} 0 & (y \notin \text{Im } g) \\ 1 & (g^{-1}(y) \text{ が involution を含むとき}) \\ 2 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$

この補題を用いると g は $H \rightarrow N/U^2(N)$ (ただし $U^2(N)$ は N の平方元全体が作る群) なる epimorphism を induce することが証明できて、 $H/\text{Ker } g \cong N/U^2(N)$ 一方で $|H| \mid (n+1)$, $|N| \mid (n-1)$ より $N/U^2(N) \cong 1$ or \mathbb{Z}_2 とくに $2 \nmid n$ の時はこのことは N の 2-Sylow 群が cyclic であることを示している。D の定義より G/N は位数 2 の元を含まないことが容易に示せるのでこのことは次を意味する。これは §3(6) の述べた結果の別証を与えらる。

Theorem G の 2-Sylow 群は cyclic である。

さて, affine difference set の条件を group ring $\mathbb{C}[G]$ のコトバで書くと $\widehat{D} \cdot \widehat{D}^{(-1)} = \lambda(\widehat{G} - \widehat{N}) + n \cdot 1$ となるが、これを group rings $\mathbb{C}[H]$ ($H = G/N$) と $\mathbb{C}[N]$ の関係式に分けて考えてみる。関数 g を用いると次が分かる。

Proposition $Sx = g^{-1}(x) \text{ (} \mathbb{C}[H] \text{) } \forall x \in N$ とおくととき

$\mathbb{C}[H]$ において次の関係式が成りたつ

(i) $2 \nmid n$ なら

$$\sum_{x \in N} \widehat{S}_{xt} \widehat{S}_x = \begin{cases} 2\widehat{H}_0 + n - 2 & (t=1) \\ 2H_0 - 2 & (t \in N_0 - \{1\}) \\ 2\widehat{H} - 2H_0 & (t \in N - N_0) \end{cases}$$

(ii) $2 \mid n$ ならば

$$\sum_{x \in N} \widehat{S}_{xt} \widehat{S}_x = \begin{cases} \widehat{H} + n - 1 & (t=1) \\ \widehat{H} - 1 & (t \in N - \{1\}) \end{cases}$$

n が偶数で $n \neq 2$ とすると $N - \{1\} \ni \exists t$, また先の Lemma により $|\widehat{S}_x| = 0$ or 2 であるから, $\chi_1(\sum \widehat{S}_{xt} \widehat{S}_x) \equiv 0 \pmod{4}$ ($\chi_1 \neq H$ の trivial character) また $\chi_1(\widehat{H} - 1) = n \therefore 4 \mid n$ さらに $\{x \in N \mid \widehat{S}_x = \emptyset\}$ は N にあらず ($n-1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{4}-1$) 差集合であることか上の (ii) をみることから証明できる。これらのことは §3 の (4) の別証と互証している。さらに次を示すこともできる。

Proposition $\chi \in H$ の (linear) character とし $Z (= Z_\chi) = \sum_{x \in N} \chi(\widehat{S}_x) \cdot \chi$ とおくとき $\mathbb{C}[N]$ において次が成り立つ

$$(i) 2 \nmid n \text{ ならば } Z Z^{-1} = \begin{cases} (n+1)\widehat{N} - 2\widehat{N}_0 + n & (\chi^{-1}(1) = H \text{ のとき}) \\ -(n+1)\widehat{N} + 2nN_0 + n & (\chi^{-1}(1) = H_0 \triangleleft H \text{ のとき}) \\ -2\widehat{N}_0 + n & (\text{その他 のとき}) \end{cases}$$

(ii) $2 \mid n$ ならば

$$Z Z^{-1} = \begin{cases} n\widehat{N} + n & (\chi^{-1}(1) = H \text{ のとき}) \\ -\widehat{N} + n & (\text{その他 のとき}) \end{cases}$$

ただし $Z^{-1} = \sum_{x \in N} \chi(\widehat{S}_x) \chi^{-1}$ とし, H_0 は H の (拡大- γ の) index 2 の部分群である。

最後に非素数中位数の affine difference set の非存在
に関連する結果についてお話ししたい。

Theorem $2 \nmid n$ とし n を割り素数の全体を $\{p_1, \dots, p_r\}$
とおく。このとき $t = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ 及び $(t-1, n+1) > 2$ とみた
す任意の整数 t について次が成り立つ。

(i) $n \equiv 1 \pmod{4}$ ならば $2 \times |n-1|_2 \leq |t-1|_2$

(ii) $n \equiv -1 \pmod{4}$ ならば $t \equiv 1 \pmod{4}$

ここで整数 m を割り 2 の最高中位 $|m|_2$ で表した。

(研究集会の講演では $D^t = D$ の時に $D \cap N = \emptyset$ と仮定するに
できることを仮定した)。 $(t-1, n+1) > 2$ なる条件で
十分であることがその後証明できたので、この形で書いてある。

定理の証明には次の Proposition を用いる。

Proposition $(t-1, n+1) > 2$ のときは D の translate
をあらためて D とおくことにより次の (i) (ii) が成り立つと
仮定できる: (i) $D^t = D$ (ii) $D \cup \{1\}$ は G/N の完全代表系。

この Proposition の証明には、 t が multiplier であること ([2])
及び t が $\pi(G, N, D)$ 上に planar collineation として act
するという事 ([3] Th 5.1) を用いる。

定理の証明

D, t を上の Proposition をみたすように取っておく。 $a \in N$ は
 G/N の unique involution とする。(§3 (vii) 参照) t は

奇数なので, $(aN)^t = aN$. 果た aN は代表系 $D \cup \{1\}$ の元
 を含むか. $1 \notin aN$ より $aN \cap D = \{e\}$ ($\exists! e \in D$).

これと $D^t = D$ より $e^t = e \therefore e^{t-1} = 1$

$n \equiv 1 \pmod{4}$ とすると $2 \mid (n+1)$, $4 \nmid (n+1)$ であるから
 $\langle e \rangle$ は G の 2-Sylow 群を含む ($\because \S 3(7)$). $\therefore |e|_2 = 2 \times |n-1|_2$

果た $e^{t-1} = 1$ より $|e|_2 \leq |t-1|_2 \therefore |t-1|_2 \geq 2 \times |n-1|_2$

$n \equiv -1 \pmod{4}$ とすると $2 \mid (n-1)$, $4 \nmid (n-1)$ であるから,

$|e|_2 = 4 \therefore 4 \mid |t-1|_2 \therefore t \equiv 1 \pmod{4}$

例. $n = 5 \cdot 13 \cdot 17$ 桁の位数をもつ affine difference set
 は存在しない.

(\because) 存在したと仮定する. $n-1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 23$, $n+1 =$
 $2 \cdot 7 \cdot 79$ である. $5 \mid n$ より 5 は multiplier. $\therefore t = 5^6$
 とおくと t も multiplier. $(t-1, n+1) = 2 \cdot 7 > 2$
 であるから, 定理より $2 \times |n-1|_2 \leq |t-1|_2$. これは

$2^5 \leq |5^6 - 1|_2 = 2^3$ を意味して矛盾

例. $n = p^{2a+1} q^b$ (果たし p, q は $p \equiv 5 \pmod{12}$,
 $q \equiv 7 \pmod{12}$ の素数とする.) とおくととき位数 n の
 affine difference set は存在しない.

(\because) $e \equiv 0 \pmod{2}$ のとき: $n \equiv 1 \pmod{4}$. $t = q$ と
 して定理を用いると $2 \times |n-1|_2 \leq |q-1|_2 = 2$, 矛盾.

$e \equiv 1 \pmod{2}$ のとき: $n \equiv -1 \pmod{4}$. $t = q$ として

定理を用いると $q \equiv 1 \pmod{4}$, 矛盾. 従って与えられた形の位数をもつ affine difference set は存在しない.

参考文献

- [1] K. T. Arasu, Cyclic affine planes of even order, *Discrete Math.* 76 (1989) 177-181.
- [2] K. T. Arasu & D. Jungnickel, Affine difference sets of even order, *J. of Combin. Theory, Series A*, 52 (1989) 188-196.
- [3] K. T. Arasu & A. Pott, On quasiregular collineation groups of projective planes, *Designs, Codes and Cryptography*, 1 (1991) 83-92.
- [4] K. T. Arasu & A. Pott, Cyclic affine planes and Paley difference sets, *Discrete Math.* 106/107 (1992) 19-23.
- [5] R. C. Bose, An affine analogue of Singer's Theorem, *J. Indian Math. Soc.*, 6 (1942), 1-15
- [6] J. E. H. Elliot & A. T. Butson, Relative difference sets, *Ill. J. Math.* 10 (1966), 517-531.
- [7] M. J. Ganley & E. Spence, Relative difference sets and quasiregular collineation groups,

- J. of Combin. Theory, Series A, 19 (1975) 134-153
- [8] A. J. Hoffman, Cyclic affine planes,
Canad. J. of Math. 4 (1952) 295-301
- [9] D. Jungnickel, A note on affine difference
sets, Arch. Math. 47 (1986) 279-280
- [10] H-P Ko & D. K. Ray-Chaudhuri, Intersection
Theorems for group divisible difference sets,
Discrete Math. 39 (1982) 37-58.
- [11] A. Pott, An affine analogue of Wilbrink's
Theorem, J. of Combin. Theory, Series A,
55 (1990), 313-315.

2 元符号のヤコビ多項式について

小関 道夫 (山形大 理学部)

30 June, 1993

1 2 元符号の諸定義

$\mathbf{F}_2 = GF(2)$ を 2 元体とする。 $V = \mathbf{F}_2^n$ を \mathbf{F}_2 上の n 次元ベクトル空間とする。 V の k 次元部分空間を、線形 $[n, k]$ 符号 \mathbf{C} という。 \mathbf{C} の元 \mathbf{x} を \mathbf{C} の符号語という。 V 内では標準的な内積が定義され、その内積を (\mathbf{x}, \mathbf{y}) と書くことにする。ここで、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は V の元。 2 つの符号 \mathbf{C}_1 と \mathbf{C}_2 は、 \mathbf{C}_1 の座標位置の適当な変更により 2 つの符号の符号語が全体として一致するとき、同値であるという。 \mathbf{C} の双対符号 \mathbf{C}^\perp は

$$\mathbf{C}^\perp = \{\mathbf{u} \in V \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}\}.$$

により定義される。符号 \mathbf{C} は条件 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^\perp$ を満たすとき、自己直交的であると言われ、また条件 $\mathbf{C} = \mathbf{C}^\perp$ を満たすとき自己双対的であると言われる。

自己双対符号は $n \equiv 0 \pmod{2}$ の時にのみ存在し、そのとき $k = \frac{n}{2}$ が成り立っている。

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を V のベクトルとするとき、 \mathbf{x} のハミング式重み $wt(\mathbf{x})$ は $x_i \neq 0$ となるような添え字 i の個数により定義される。 V の上のハミング式距離 d は $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = wt(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ により定義される。

\mathbf{C} を符号とするとき、 \mathbf{C} の最小距離 d_{min} は

$$\begin{aligned} d_{min} &= \text{Min}_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \text{Min}_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} wt(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

により定義される。 \mathbf{x} を V のベクトルとすると \mathbf{x} を中心とした半径 t のハミング球 $S_t(\mathbf{x})$ は

$$S_t(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in V \mid d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq t\}.$$

により定義される。符号 \mathbf{C} の被覆半径 $r(\mathbf{C})$ は

$$V = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{C}} S_t(\mathbf{x})$$

が成り立つような最小の整数 t として定義される。符号 \mathbf{C} の被覆半径 $r(\mathbf{C})$ は別の仕方でも定義される。それは次の通り。

商ベクトル空間 V/\mathbf{C} の一つの剰余類 U のベクトル \mathbf{v} は

$$wt(\mathbf{v}) \leq wt(\mathbf{z}) \text{ for all } \mathbf{z} \in U.$$

を満たすとき、その剰余類の指導元と言われる。符号 \mathbf{C} の被覆半径 $r(\mathbf{C})$ はこのときすべての剰余類の指導元の重みの最大値としても定義できる。

\mathbf{C} を自己双対的な 2元 $[n, \frac{n}{2}]$ 符号とすると、 \mathbf{C} の各符号語 \mathbf{x} の重み $wt(\mathbf{x})$ は偶数になる。さらに、もし各符号語 \mathbf{x} の重み $wt(\mathbf{x})$ が 4 で割り切れるとき符号 \mathbf{C} は重偶符号と呼ばれる。重偶符号は長さ n が 8 の倍数であるときにかぎり存在する。

\mathbf{C} を長さ n の重偶符号で、 \mathbf{F}_2^n の中に埋め込まれているものとする。 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ を \mathbf{F}_2^n の任意のベクトルの組とすると、添え字 $1 \leq i \leq n$ で $u_i = v_i = 1$ となるものの個数を $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ で表し、これを \mathbf{u} と \mathbf{v} との交差数と呼ぶことにする。特に $\mathbf{u} * \mathbf{u}$ は $wt(\mathbf{u})$ に他ならない。

\mathbf{C} を偶重な自己双対 2元 $[n, \frac{n}{2}]$ 符号とする。符号 \mathbf{C} の非斉次重み枚举多項式 $W_{\mathbf{C}}(X)$ は

$$W_{\mathbf{C}}(X) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{C}} X^{wt(\mathbf{v})}.$$

により定義される。 a_r により、 \mathbf{v} の重みが r の符号語の個数を表すことにすると、 $W_{\mathbf{C}}(X)$ は

$$W_{\mathbf{C}}(X) = \sum_{r=0}^n a_r X^r.$$

と書き直される。

例えば、Appendix で与えている拡張されたハミング符号 e_8 の重み枚举多項式は

$$W_{e_8}(X) = 1 + 14X^4 + X^8.$$

を持つ。ここでは、さらに拡張された 2 元グレイ符号 \mathcal{G}_{24} の重み枚挙多項式 $W_{\mathcal{G}_{24}}(X)$ も具体的に与えておく。

$$W_{\mathcal{G}_{24}}(X) = 1 + 759X^8 + 2576X^{12} + 759X^{16} + X^{24},$$

なお \mathcal{G}_{24} の生成行列については例えば V. Pless, N.J.A. Sloane [22] を参照のこと。

また通常重み枚挙多項式は斉次多項式の形で与えられる。

$$W_{\mathbf{C}}(X, Y) = \sum_{r=0}^n a_r X^{n-r} Y^r.$$

例えば上述の e_8 の斉次型重み枚挙多項式 $W_{e_8}(X, Y)$ は

$$W_{e_8}(X, Y) = X^8 + 14X^4Y^4 + Y^8$$

で与えられる。しかし、二つの型の多項式は変換

$$Y^n W_{\mathbf{C}}\left(\frac{X}{Y}\right) = W_{\mathbf{C}}(X, Y),$$

および

$$Y^{-n} W_{\mathbf{C}}(X, Y) = W_{\mathbf{C}}(\xi), \text{ with } \xi = \frac{X}{Y},$$

によって互いに他を導くので代数的には同等のものである。ここで n は符号 \mathbf{C} の長さである。この報告では以下では殆どの場面で非斉次型を使うことにする。

MacWilliams 恒等式をここで引用する。

定理 1 $W_{\mathbf{C}}(X)$ を自己双対 2 元 $\left[n, \frac{n}{2}\right]$ 符号とすると、次の恒等式が成り立つ。

$$(1+X)^n W_{\mathbf{C}}\left(\frac{1-X}{1+X}\right) = |\mathbf{C}| W_{\mathbf{C}}(X).$$

符号 \mathbf{C} の一つの剰余類 U の重み枚挙多項式は

$$W_U(X) = \sum_{\mathbf{z} \in U} X^{wt(\mathbf{z})}.$$

によって定義される 1 変数 X の多項式である。実例を一つ与えておく。

e_8 を拡張されたハミング符号とし、 $\mathbf{u}_0 = 0$ をゼロベクトルとする。剰余類 $U = \mathbf{u}_0 + e_8$ にたいしては

$$W_U(X) = 1 + 14X^4 + X^8$$

$wt(\mathbf{u}_1) = 1$ となるベクトル \mathbf{u}_1 による剰余類 $U = \mathbf{u}_1 + e_8$ にたいしては

$$W_U(X) = X + 7X^3 + 7X^5 + X^7.$$

2 2元符号ヤコビ多項式の定義

本節を通じて \mathbf{C} は長さが n の重偶な自己双対 2元符号とする。 \mathbf{u}, \mathbf{v} を \mathbb{F}_2^n のベクトルとすると、 $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ は既に定義した \mathbf{u} と \mathbf{v} との交差数である。

Definition 1 符号のヤコビ多項式

\mathbb{F}_2^n の任意の元 \mathbf{v} にたいして、符号 \mathbf{C} のヤコビ多項式 $Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ は

$$Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{C}} X^{\mathbf{u} * \mathbf{u}} Z^{\mathbf{u} * \mathbf{v}}.$$

により定義される。

$Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ の展開:

$$Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z) = \sum_{m,r} b(m,r) X^m Z^r,$$

ここで $b(m,r)$ は

$$b(m,r) = |\{ \mathbf{u} \in \mathbf{C} \mid \mathbf{u} * \mathbf{u} = m, \mathbf{u} * \mathbf{v} = r \}|$$

により与えられる。

ヤコビ多項式の計算実例

(I) ハミング符号 e_8 の場合

(1) $wt(\mathbf{v}) = 1$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(7Z + 7) + X^8Z$$

(2) $wt(\mathbf{v}) = 2$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(3Z^2 + 8Z + 3) + X^8Z^2$$

(3) $wt(\mathbf{v}) = 3$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(Z^3 + 6Z^2 + 6Z + 1) + X^8Z^3$$

(4) $wt(\mathbf{v}) = 4$

(4)-(i) $\mathbf{v} \in C_4(e_8)$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(Z^4 + 12Z^2 + 1) + X^8Z^4,$$

(4)-(ii) $\mathbf{v} \notin C_4(e_8)$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(4Z^3 + 6Z^2 + 4Z) + X^8Z^4$$

(5) $wt(\mathbf{v}) = 5$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(Z^4 + 6Z^3 + 6Z^2 + Z) + X^8Z^5$$

(6) $wt(\mathbf{v}) = 6$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(3Z^4 + 8Z^3 + 3Z^2) + X^8Z^2$$

(7) $wt(\mathbf{v}) = 7$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(7Z^4 + 7Z^3) + X^8Z^7$$

(8) $wt(\mathbf{v}) = 8$ のとき

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + 14X^4Z^4 + X^8Z^8$$

[注意]: $1 \leq wt(\mathbf{v}) \leq 3$ に対するヤコビ多項式が一意的であるという事実は e_8 の各重みの符号語が 3-design をなすことを如実に反映していることであって、ヤコビ多項式の係数もデザインパラメーターと密接な関係がある。

(II) ゴレイ符号の場合

G_{24} をゴレイ [24,12,8] 符号とする。(1) $wt(\mathbf{v}) = 1$ のとき

$$Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^8(253Z + 506) + X^{12}(1288Z + 1288) + X^{16}(506Z + 253) + X^{24}Z$$

(2) $wt(\mathbf{v}) = 2$ のとき

$$\begin{aligned} Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(77Z^2 + 352Z + 330) + X^{12}(616Z^2 + 1344Z + 616) \\ & + X^{16}(330Z^2 + 352Z + 77) + X^{24}Z^2 \end{aligned}$$

(3) $wt(\mathbf{v}) = 3$ のとき

$$\begin{aligned} Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(21Z^3 + 168Z^2 + 360Z + 210) + X^{12}(280Z^3 + 1008Z^2 + 1008Z + 280) \\ & + X^{16}(210Z^3 + 360Z^2 + 168Z + 21) + X^{24}Z^3 \end{aligned}$$

(4) $wt(\mathbf{v}) = 4$ のとき

$$\begin{aligned} Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(5Z^4 + 64Z^3 + 240Z^2 + 320Z + 130) \\ & + X^{12}(120Z^4 + 640Z^3 + 1056Z^2 + 640Z + 120) \\ & + X^{16}(130Z^4 + 320Z^3 + 240Z^2 + 64Z + 5) + X^{24}Z^4 \end{aligned}$$

(1) $wt(\mathbf{v}) = 5$ のとき

$$\begin{aligned} Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(Z^5 + 20Z^4 + 120Z^3 + 280Z^2 + 260Z + 78) + \\ & X^{12}(48Z^5 + 360Z^4 + 880Z^3 + 880Z^2 + 360Z + 48) \\ & + X^{16}(78Z^5 + 260Z^4 + 280Z^3 + 120Z^2 + 20Z + 1) + X^{24}Z^5 \end{aligned}$$

(6) $wt(\mathbf{v}) = 6$ のとき

$$\begin{aligned} Jac^{(1)}(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(Z^6 + 60Z^4 + 160Z^3 + 300Z^2 + 192Z + 46) + \\ & X^{12}(16Z^6 + 192Z^5 + 600Z^4 + 960Z^3 + 600Z^2 + 192Z + 16) \\ & + X^{16}(46Z^6 + 192Z^5 + 300Z^4 + 160Z^3 + 60Z^2 + 1) + X^{24}Z^6, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} Jac^{(2)}(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = & \\ & 1 + X^8(6Z^5 + 45Z^4 + 180Z^3 + 285Z^2 + 198Z + 45) + \\ & X^{12}(18Z^6 + 180Z^5 + 630Z^4 + 920Z^3 + 630Z^2 + 180Z + 18) \\ & + X^{16}(45Z^6 + 198Z^5 + 285Z^4 + 180Z^3 + 45Z^2 + 6Z) + X^{24}Z^6 \end{aligned}$$

3 いくつかの基本定理

$\mathbb{Z}[X]$ により不定元 X についての \mathbb{Z} -係数の多項式全体のなす環を表すことにする。更に、 $W[X]$ により重偶の自己双対 2 元符号の非斉次型重み枚挙多項式全体により生成された $\mathbb{Z}[X]$ の部分環を表すことにする。始めの結果は有名な定理の言い直しに過ぎない。

定理 2 (Gleason) $W[X]$ は 2 つの生成元 $W_{e_3}(X)$ 及び $W_{g_{24}}(X)$ により生成される。

$\mathbb{Z}[X, Z]$ により 2 つの不定元 X および Z についての \mathbb{Z} -係数の多項式全体のなす環をあらわすことにする。また $\mathbb{J}[X, Z]$ により重偶の自己双対 2 元符号のヤコビ多項式全体によって生成される $\mathbb{Z}[X, Z]$ の部分環を表すことにする。

観測 1 $Jac(C, \mathbf{v} \mid X, Z)$ を $\mathbf{v} = 0$ となる \mathbf{v} に対するヤコビ多項式とすると、 $Jac(C, \mathbf{v} \mid X, Z) = W_C(X)$ が成り立つ。従って

$$\mathbb{J}[X, Z] \supseteq W[X]$$

と見ることができる。

命題 1 $Jac(C_1, \mathbf{v}_1 \mid X, Z)$ および $Jac(C_2, \mathbf{v}_2 \mid X, Z)$ を 2 つのヤコビ多項式とすると、

$$Jac(C_1, \mathbf{v}_1 \mid X, Z) Jac(C_2, \mathbf{v}_2 \mid X, Z) = Jac(C_1 \oplus C_2, \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2 \mid X, Z)$$

が成り立つ。

Col. $W_{C_1}(X)$ を C_1 の重み枚挙多項式とし、 $Jac(C_2, \mathbf{v} \mid X, Z)$ を別の符号 C_2 のヤコビ多項式とすると、積 $W_{C_1}(X) Jac(C_2, \mathbf{v} \mid X, Z)$ は符号 $C_1 \oplus C_2$ の適当な $\hat{\mathbf{v}}$ によるヤコビ多項式と見る事ができる。

$$W_{C_1}(X) Jac(C_2, \mathbf{v} \mid X, Z) = Jac(C_1 \oplus C_2, \hat{\mathbf{v}} \mid X, Z)$$

従って $\mathbb{J}[X, Z]$ は $W[X]$ -加群になる。

C を重偶な自己双対 $[n, \frac{n}{2}]$ 符号とする。 \mathbf{v} を \mathbf{F}^n の任意のベクトルとし、 $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{1} - \mathbf{v}$ と書く。ここで $\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 のベクトル。 $\hat{\mathbf{v}}$ のことを \mathbf{v} の補ベクトルということにする。このとき

命題 2 記号を上述のようにとる。

$$Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z) = \sum_{m,r} b(m, r) X^m Z^r$$

を符号 \mathbf{C} のヤコビ多項式とすると、関係

$$Jac(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{v}} \mid X, Z) = \sum_{m,r} b(m, r) X^m Z^{\mathbf{v} * \mathbf{v} - r}$$

が成り立つ。

我々の始めの主結果は次の通り

定理 3 \mathbf{C} を長さが n の重偶な自己双対 2 元符号とし、 $Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ をそのヤコビ多項式とする。ここで $\mathbf{v} \in \mathbf{F}_2^n$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} & Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} (1+X)^n \left(\frac{1+XZ}{1+X} \right)^{wt(\mathbf{v})} Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid \frac{1-X}{1+X}, \frac{(1-XZ)(1+X)}{(1+XZ)(1-X)}). \end{aligned}$$

が成り立つ。

本報告の諸証明については、目下準備中の Ozeki [] に出す予定。

4 符号の被覆半径とヤコビ多項式との関係

我々の次の主結果は次の定理である。

定理 4 \mathbf{C} を長さが n の重偶な自己双対 2 元符号とする。 \mathbf{F}_2^n からベクトル \mathbf{v} を任意にとり、 U を \mathbf{v} が属する $\mathbf{F}_2^n / \mathbf{C}$ の剰余類とするととき、

$$W_U(X) = X^{wt(\mathbf{v})} Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, X^{-2}),$$

が成り立つ。ここで、 $Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ は符号 \mathbf{C} の \mathbf{v} に関するヤコビ多項式である。

この定理の計算実例を 1 つ与えて置く。

G_{24} をゴレイ [24,12,8] 符号とする。前節で書いたように $wt(\mathbf{v}) = 1$ のとき

$$Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^8(253Z + 506) + X^{12}(1288Z + 1288) + X^{16}(506Z + 253) + X^{24}Z$$

であった。 $U = \mathbf{v} + G_{24}$ とすると、

$$\begin{aligned} W_U(X) &= X \{ 1 + X^8(253X^{-2} + 506) + X^{12}(1288X^{-2} + 1288) \\ &\quad + X^{16}(506X^{-2} + 253) + X^{24}X^{-2} \} \\ &= X + 253X^7 + 506X^9 + 1288X^{11} + 1288X^{13} + 506X^{15} + 253X^{17} + X^{23} \end{aligned}$$

となる。この多項式および 2 以上の重みの \mathbf{v} から得られるグレイ符号の剰余類の重み枚挙多項式は Conway-Sloane [7] の TABLE II と実質的には同じになる。

この定理の系として、

Col. $W_U(X)$ は次の関数等式を持つ。

$$X^{wt(\mathbf{v})} Jac(C, \mathbf{v} \mid X, X^{-2}) = \frac{1}{|\mathbf{C}|} (1+X)^n Jac(C, \mathbf{v} \mid \frac{1-X}{1+X}, (-1))$$

系の実例 ハミング符号 e_8 と重み 1 のベクトル \mathbf{v} の場合、

$$Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z) = 1 + X^4(7Z + 7) + X^8Z$$

だから $U = \mathbf{v} + e_8$ に対して

$$\begin{aligned} W_U(X) &= X \{ 1 + X^4(7X^{-2} + 7) + X^8X^{-2} \} \\ &= X + 7X^3 + 7X^5 + X^7 \\ &= \frac{1}{2^4} (1+X)^8 \left[1 - \left(\frac{1-X}{1+X} \right)^8 \right] \end{aligned}$$

最後の列の等式が系から導かれるものである。

次の定理はヤコビ多項式の重複度と剰余類の重み枚挙多項式との関係を与える定理で、符号の被覆半径の問題は、ヤコビ多項式を決定できれば、原理的には解決できることを意味し、実際に論文 [19] ではこの応用を手掛けている。定理を述べる前に 2,3 の定義が必要である。

Definition 2 : \mathbf{C} を長さが n の 2 元符号とする。 \mathbf{v} を \mathbb{F}_2^n のベクトルとする。ベクトル \mathbf{v} は、もし $wt(\mathbf{v})$ がそれが属する剰余類 $\mathbf{v} + \mathbf{C}$ の

中で重みが最小のとき、すなわち指導元であるとき、(符号 \mathbf{C} に関して) 堅い (rigid) と言われ、そうでないときは柔らかいと言われる。ヤコビ多項式 $Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ はその参照ベクトル \mathbf{v} が堅いとき、堅いと言われ、 \mathbf{v} が柔らかいとき、柔らかいと言われる。

定理 5 \mathbf{C} を長さが n の元符号とし、 \mathbf{R}_k をある重み k を持つ堅いベクトルで同じヤコビ多項式 $Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ をもつもの全体の集合とする。

$$\begin{aligned} X^k Jac(\mathbf{C}, \mathbf{v} \mid X, X^{-2}) &= W_{\mathbf{v}+\mathbf{C}}(X) \\ &= aX^k + bX^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

をその共通の剰余類の重み枚挙多項式とすると、 $\mathbb{F}_2^n/\mathbf{C}$ の剰余類 \mathbf{S} で

$$W_{\mathbf{S}}(X) = W_{\mathbf{v}+\mathbf{C}}(X)$$

が成り立つものの個数は $\frac{|\mathbf{R}_k|}{a}$ で与えられる。

5 Eisenstein 型多項式とそれに関連した多項式

これまでは符号を用いて定義される多項式のみを議論してきたが、重み枚挙多項式なりヤコビ多項式を代数的に研究するには、もう少し考察の対象を拡げたほうがより透明で見通しの良い議論がなし得ると考えられる。本節の試みはそのような着意に基づいたものの一つで、現状では未完のものである。

Definition 3 :

次数 n ($n \equiv 0 \pmod{4}$) の, 不定元 X についての多項式 $\mathcal{E}_n(X)$ は次の条件を満たすとき、アイゼンスタイン型多項式と言われる。

$$(i) \mathcal{E}_n(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ with } a_i = a_{n-i} \text{ and } a_0 = 1,$$

および

$$(ii) (1+X)^n \mathcal{E}_n\left(\frac{1-X}{1+X}\right) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}_n(X) & \text{if } n \equiv 0 \pmod{8} \\ -2^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}_n(X) & \text{if } n \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

例

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_8(X) &= 1 + 14X^4 + X^8 \\
\mathcal{E}_{16}(X) &= 1 + 28X^4 + 198X^8 + 28X^{12} + X^{16} \\
\mathcal{E}_{24}(X) &= 1 + \frac{759}{4}X^4 + \frac{7429}{2}X^{12} + \frac{759}{4}X^{20} + X^{24} \\
\mathcal{E}_4(X) &= 1 - 6X^2 + X^4 \\
\mathcal{E}_{12}(X) &= 1 - 33X^4 - 33X^8 + X^{12} \\
\mathcal{E}_{20}(X) &= 1 - 19X^4 - 494X^8 - 494X^{12} - 19X^{16} + X^{20} \\
\mathcal{E}_{28}(X) &= 1 - 5X^4 - 759X^8 - 7429X^{12} - 7429X^{16} - 759X^{20} \\
&\quad - 5X^{24} + X^{28}
\end{aligned}$$

上で導入したアイゼンスタイン型の多項式のヤコビ多項式版とも言うべきものがある。

Definition 4 :

次数 n ($n \equiv 0 \pmod{4}$) の, 不定元 X, Z についての多項式 $\mathcal{E}_{n,k}(X, Z)$ は次の条件を満たすとき、アイゼンスタイン-ヤコビ型の多項式と言われる。また k を形式的重みということにする。

$$(i) \mathcal{E}_{n,k}(X, Z) = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k} a_{i,j} X^i Z^j \text{ with } a_{i,j} = a_{n-i, k-j} \text{ and } a_{00} = 1,$$

および

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & (1+X)^n \left(\frac{1+XZ}{1+X} \right)^k \mathcal{E}_{n,k} \left(\frac{1-X}{1+X}, \frac{(1-XZ)(1+X)}{(1+XZ)(1-X)} \right) \\
&= \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}_n(X, Z) & \text{if } n \equiv 0 \pmod{8} \\ -2^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}_n(X, Z) & \text{if } n \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}
\end{aligned}$$

ここでは一般的な議論はしないで置いて、実例を 2,3 挙げて置くことにする。

$$\mathcal{E}_{12,1}(X, Z) = 1 - X^4(11Z + 22) - X^8(22Z + 11) + X^{12}Z$$

この多項式 $\mathcal{E}_{12,1}(X, Z)$ は関数等式

$$\mathcal{E}_{12,1}(X, Z)$$

$$= -\frac{1}{2^6}(1+X)^{12} \left(\frac{1+XZ}{1+X} \right) \mathcal{E}_{12,1} \left(\frac{1-X}{1+X}, \frac{(1-XZ)(1+X)}{(1+XZ)(1-X)} \right).$$

を持つ。

$$\mathcal{E}_{12,2}(X, Z) = 1 - X^4(3Z^2 + 16Z + 14) - X^8(14Z^2 + 16Z + 3) + X^{12}Z^2$$

多項式 $\mathcal{E}_{12,2}(X, Z)$ も関数等式

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{12,2}(X, Z) \\ &= -\frac{1}{2^6}(1+X)^{12} \left(\frac{1+XZ}{1+X} \right)^2 \mathcal{E}_{12,2} \left(\frac{1-X}{1+X}, \frac{(1-XZ)(1+X)}{(1+XZ)(1-X)} \right). \end{aligned}$$

を持つ。

6 ブルーエ・アンガール理論の拡張

ブルーエとアンガールは [4] に於いて、重偶な自己双対符号の斉次型の重み枚挙多項式の環と、その符号から Leech-Sloane 構成法により定義される偶整で正定値なユニモデュラー二次形式に付随したテータ級数のなす環とが同型になることをヤコビのテータ関数から定義される自然な (しかし不思議でもある) 写像を用いて示した。彼等の仕事はアイゼンスタイン型の多項式を用いることにより拡張できる。今は詳細を述べる段階ではないので、必要な前提知識と事実を一つだけ書いて置く。

ヤコビの 4 つの基本的なテータ関数: $q = e^{\pi i \tau}$ および $\zeta = e^{\pi i v}$, と置くと (τ は複素上半平面の変数で、 v は複素平面の変数)

$$\begin{aligned} \theta_0(v, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \zeta^{2n} \\ &= 1 - (\zeta^{-1} + \zeta)q + (\zeta^{-2} + \zeta^2)q^4 - (\zeta^{-3} + \zeta^3)q^9 \\ &\quad + (\zeta^{-4} + \zeta^4)q^{16} - (\zeta^{-5} + \zeta^5)q^{25} + \dots \end{aligned}$$

$$\theta_1(v, \tau) = \frac{1}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \zeta^{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(v, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \zeta^{2n+1} \\
&= (\zeta^{-1} + \zeta)q^{\frac{1}{4}} + (\zeta^{-3} + \zeta^3)q^{\frac{9}{4}} + (\zeta^{-5} + \zeta^5)q^{\frac{25}{4}} \\
&\quad + (\zeta^{-7} + \zeta^7)q^{\frac{49}{4}} + (\zeta^{-9} + \zeta^9)q^{\frac{81}{4}} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(v, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \zeta^{2n} \\
&= 1 + (\zeta^{-1} + \zeta)q + (\zeta^{-2} + \zeta^2)q^4 + (\zeta^{-3} + \zeta^3)q^9 \\
&\quad + (\zeta^{-4} + \zeta^4)q^{16} + (\zeta^{-5} + \zeta^5)q^{25} + \dots
\end{aligned}$$

さらに

$$\theta_j(\tau) = \theta_j(0, \tau)$$

および

$$\phi_j(\tau) = \theta_j(2\tau).$$

と置くと

$$\begin{aligned}
\theta_0(\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-q)^{n^2} \\
&= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + 2q^{\frac{81}{4}} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(\tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \\
&= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots,
\end{aligned}$$

次の有名なヤコビの恒等式は議論の途中で使われる。

$$\theta_0(\tau)^4 + \theta_2(\tau)^4 = \theta_3(\tau)^4$$

$\mathcal{E}_n(X, Y) = Y^n \mathcal{E}_n\left(\frac{X}{Y}\right)$ を斉次化されたアイゼンスタイン型の多項式とする。
このとき $\mathcal{E}_n(\phi_2(\tau), \phi_3(\tau))$ は正規化された重みが $n/2$ のアイゼンスタイン級

数になることが示される。

実例：

$$\mathcal{E}_8(X, Y) = X^8 + 14X^4Y^4 + Y^8$$

とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_8(\phi_2(\tau), \phi_3(\tau)) &= 1 + 240q^2 + 2160q^4 + 6720q^6 \\ &\quad + 17520q^8 + 30240q^{10} + \dots \\ &= E_4(\tau)\end{aligned}$$

となるがこの結果はブルーエ・アンガール理論の射程距離内に入る事実であるが、

$$\mathcal{E}_{12}(X, Y) = X^{12} - 33X^8Y^4 - 33X^4Y^8 + Y^{12}$$

の場合

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(\phi_2(\tau), \phi_3(\tau)) &= 1 - 504q^2 - 16632q^4 - 122976q^6 \\ &\quad - 532728q^8 - 1575504q^{10} - \dots \\ &= E_6(\tau)\end{aligned}$$

はもはやブルーエ・アンガール理論では説明出来ない結果である。

我々が目指すことは次の比例式：

MacWilliams 恒等式：定理3 = ブルーエ・アンガール理論：？

を解きたいのであるが、現段階では野望に近い目標かも知れない。

7 今後の問題

(I) Eichler-Zagier のヤコビ形式の環の場合は構造が相当に解明されているが $\mathbb{J}[X, Z]$ の場合は構造がよく分かっていない。この方向でも比例式：

MacWilliams 恒等式：定理3 = Gleason の定理：？

を解きたいのであるが、未だ出来ていない。

大阪教育大の講演の際には $Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z)$ や $Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z)$ に望みを掛け過ぎた予想を述べた ($\mathbb{J}[X, Z]$ は $Jac(e_8, \mathbf{v} \mid X, Z)$ と $Jac(G_{24}, \mathbf{v} \mid X, Z)$)

とで生成される?)が、その後地道な計算の結果反例が出たのもっと堅固たるべき予想を立てるよう鋭意努力中です。

(II) アソシエーションスキームの理論から導かれる情報は、或局面ではヤコビ多項式の議論から導かれる情報と重なる。このことは一つの推測を引き起こす。それはアソシエーションスキームの理論もある部分は多項式化すればもっと見通しのよい議論が可能になってヤコビ多項式の理論と補完しあうようになるという推測である。

Appendix:

ハミング [8,4,4] 符号 e_8 の生成行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

References

- [1] E.F. Assmus, Jr. V. Pless, On the Covering Radius of Extremal Self-Dual Codes, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-29 (1983), 359-363
- [2] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin 1984
- [3] E.R. Berlekamp, F.J. MacWilliams, and N.J.A. Sloane, Gleason's Theorem on Self-Dual Codes, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-18 (1972), 409-414
- [4] M. Broué et M. Enguehard, Polynôme des poids de certains codes et fonction thêta de certains réseaux, Ann. scien. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t.5 (1972) 157-181.
- [5] J.H. Conway and V. Pless, On the enumeration of self-dual codes, J. Comb. Th. Ser. A 28 (1980) 26-53

- [6] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag 1988.
- [7] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Orbit and Coset Analysis of the Golay and Related Codes, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.36 (1990), 1038-1050
- [8] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Res. Reports Supplements, No. 10 (1973)
- [9] P. Delsarte, Four fundamental parameters of a code and their combinatorial significance, Information and Control Vol.23, (1973) 407-438
- [10] H. Koch, Unimodular lattices and self-dual codes, Proc. ICM Berkeley (1986) Vol. 1, 457-465.
- [11] H. Koch, On self-dual, doubly even codes of length 32, J. Comb. Th. Ser.A 51, (1989) 63-76
- [12] H. Koch, On self-dual doubly-even extremal codes, Discrete Mathematics 83 (1990) 291-300, North-Holland
- [13] F.J. MacWilliams, C.L. Mallows, and N.J.A. Sloane, Generalizations of Gleason's Theorem on Weight Enumerators of Self-Dual Codes, IEEE Trans. Inf. Th. IT-18 (1972) 794-805
- [14] F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane, "The Theory of Error-Correcting Codes", North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [15] M. Ozeki, Hadamard matrices and doubly even error correcting codes, J. Comb. Th. Ser.A Vol.44 (1987) 274-287
- [16] M. Ozeki, Examples of even unimodular extremal lattices of rank 40 and their Siegel theta series of degree 2, J. Num. Th. Vol.28 (1988) 119-131
- [17] M. Ozeki, On the relation between the invariants of a doubly even self-dual binary code C and the invariants of the even unimodular lattices $L(C)$ defined from the code C , in Meeting on algebraic combinatorics, Suuri Kaiseki Kenkyuusho Koukyuuroku No. 671, (1988) Research Institute of Mathematical Sciences in Kyouto Univ.

- [18] M. Ozeki, On the notion of Jacobi polynomials for codes, in preparation
- [19] M. Ozeki, Determination of covering radii of doubly even extremal binary self-dual codes of lengths 40 and 56, in preparation
- [20] M. Peters, Jacobi theta series, Rocky Mt. Math. J. Vol. 19 (1989) 863-870
- [21] V. Pless, A classification of Self-Orthogonal Codes over $GF(2)$, Discrete Math. 3, (1972) 209-246.
- [22] V. Pless, N.J.A. Sloane, On the classification and Enumeration of Self-Dual Codes, J.Comb. Th. Ser. A 18, (1975) 313-335
- [23] V. Pless, An Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes, Wiley Interscience , New York, 1982.
- [24] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen, Math. Ann. 116 (1939), 511-523
- [25] N.J.A. Sloane, Binary Codes, lattices, and sphere-packings in "Combinatorial Surveys, Proc. 6th British Comb. Conf." ed. by P.J.Cameron, Academic Press (1977) 117-164.
- [26] N.J.A. Sloane, Self-dual codes and lattices, in "Relations between Combinatorics and Other Parts of Mathematics", Proc. Symp. in Pure Math., no.34 (1979) 273-308.

EXTREMAL DOUBLY EVEN (56,28,12) CODES AND HADAMARD MATRICES OF ORDER 28

HIROSHI KIMURA

Department of Mathematics, Ehime University

Matsuyama 790, Japan

ABSTRACT. In [2] Tonchev constructed six doubly even (56,28,12) codes from two Hadamard matrices of order 28. But two of them were not distinguished. In [11] and [12] we characterized Hadamard matrices of order 28 and there are exactly 487 Hadamard matrices, up to equivalence. We show that only two of the above 487 matrices produce doubly even (56,28,12) codes and that the six codes are all, up to equivalence.

1. Introduction

A Hadamard matrix H of order n is an $n \times n$ matrix of ± 1 's with $HH^t = nI$. It is well known that n is necessarily 1, 2 or a multiple of four. We say that two matrices M_1 and M_2 of same size are equivalent if there exists a signed permutation g of rows and columns of M_1 with $M_1^g = M_2$. A matrix which is equivalent to a Hadamard matrix is also a Hadamard matrix. An automorphism of H is a signed permutation g of the set of rows and columns such that $H^g = H$. The set of automorphisms forms a group under composition called the automorphism group of H and it is denoted by $Aut(H)$. We say that a set of four rows of H is a Hall set if the submatrix consisting of the four rows is equivalent to the following matrix:

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} + & + & + & + & J_m & J_m & J_m & J_m \\ + & + & - & - & J_m & J_m & -J_m & -J_m \\ + & - & + & - & J_m & -J_m & J_m & -J_m \\ + & - & - & + & -J_m & J_m & J_m & -J_m \end{bmatrix},$$

where J_m is the all 1's row vector of dimension $(n-4)/4$.

The equivalence classes of Hadamard matrices of order ≤ 28 have been determined by Hall, Ito-Leon-Longyear and the author([5], [6], [7], [11] and [12]). There are exactly 478 inequivalent Hadamard matrices of order 28. One of them has no Hall set and the others have Hall sets. These matrices are distinguished by their K-matrices except five matrices in [9].

Let $F = GF(2)$ be the field of two elements 0 and 1. Let F^n be the vector space of dimension n over F . For elements $x = (x_1, \dots, x_n)$ and $y = (y_1, \dots, y_n)$ of F^n , the Hamming distance $d(x, y)$ is defined by the number of i with $x_i \neq y_i$. The Hamming weight $w(x)$ of x is defined by $d(x, 0)$. For a column vector x put $d(x) = d(x^t)$. A binary linear (n, k) code C is a subspace of F^n of dimension k . The minimum distance of C is defined by the minimum weight among all non-zero elements of C . The generator matrix of C is the matrix whose rows are the basis vectors of C . Two codes are equivalent if one can be obtained from the other by a permutation of the coordinate indices of any generator matrix.

We assume that the reader is familiar with the basic facts from the theory of self-dual linear codes. Our terminology follow [3].

It is well known that for Hadamard matrix of order n there exists a binary code with n symbols, $2n$ code words, and minimum distance $n/2$. This is not necessarily a linear code. On the other hand many linear codes can be constructed from Hadamard matrices. It is well known that the $(24, 12, 8)$ Golay code is obtained from a Hadamard matrix of order 12 ([15]).

In [19] Tonchev gave a general method of a construction of binary self-orthogonal codes and in [2] obtained six doubly even self-dual $(56, 28, 12)$ codes from two Hadamard matrices of order 28. But two of the six codes were not distinguished.

We discuss the existence and equivalence of extremal doubly even self-dual $(56, 28, 12)$ codes obtained from all Hadamard matrices of order 28 by the method in [19].

We can consider that $(H + J)/2$ is a matrix on F , where J is the all 1's matrix, and denote also this H if there is no confusion.

Theorem 1. *Let H be a Hadamard matrix of order 28 and C a binary self-dual $(56, 28, 12)$ code with generator matrix (I, H) . Then H and C are equivalent to one of two matrices and one of six codes in [2], respectively. Moreover the six codes are inequivalent to each other.*

One of the matrices in Theorem 1 is of QR -type and the other is equivalent to the 471-th matrix in [13].

2. ON THE CASE H HAS HALL SETS

In this section we assume that H has Hall sets. Then H is one of the 486 matrices obtained in [11] by Proposition ???. The following proposition is trivial from the definition of Hall set.

Proposition 2. *Let $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ be a Hall set of H . The vector $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ in F^n is of weight 4 or 24.*

By this, if $(I, H_{B,P})$ generate $EC(H_{B,P})$, then

$$(2.1) \quad |B \cap \{r_1, r_2, r_3, r_4\}| = \begin{cases} 1 \text{ or } 3, & \text{if } w(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 4 \\ 0, 2 \text{ or } 4, & \text{if } w(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 24. \end{cases}$$

Let $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\}$ be a family consisting of all Hall sets of H . Set $\Sigma_i = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_i$. Assume the following:

Condition 1. $\Sigma_1 \subsetneq \Sigma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Sigma_k = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_m$

Set $k(H) = k$ for H . For all most matrices in [11] $\Sigma = \Gamma$. $\text{Max}\{k(H)\} = 3$. If we make a computer program under the conditions in Section ??? and this section, H must be a matrix H_{471} in [11], say H_2 in this paper. In fact the following subfamily of Hall sets of H_2 satisfy Condition 1:

Table 1. A subfamily of Hall sets of H_2

Hall set	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8	Λ_9	Λ_{10}	Λ_{11}	Λ_{12}	Λ_{13}	Λ_{14}	Λ_{15}	Λ_{16}	Λ_{17}	Λ_{18}	Λ_{19}
rows	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	9	10
	11	12	15	12	13	16	11	13	14	14	15	17	15	18	14	19	12	13	11
	21	23	21	22	24	22	23	20	20	23	26	23	24	24	26	25	21	22	20
	24	24	23	25	25	24	25	23	25	27	27	26	28	27	28	28	26	27	28
weight	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

The weight of sum of four elements of every Hall set Λ_i $\{i = 1, \dots, 19\}$ is four. Therefore $|\{B \cap \Lambda_i\}|$ must be one or three. There exists no Hall set containing the first row and the first column does not contain in any Hall set of H^t . In this case we may compute by hand and two solutions are obtains:

$$(2.2) \quad \begin{cases} B_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ P_1 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\} \end{cases}$$

and

$$(2.3) \quad \begin{cases} B_2 = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\} \\ P_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \end{cases}$$

Since H_2 and H_2^t has same K -matrix, they are equivalent.

3. ON EQUIVALENCE OF CODES

Let $k_i(j_1, \dots, j_i)$ be a number of blocks containing distinct points $\{j_1, \dots, j_i\}$ of a design. Let k_i be a maximal number in $\{k_i(j_1, \dots, j_i) : \text{for all } i\text{-tuplets of distinct points}\}$. Then k_i is invariant for equivalence classes of codes. k_1, k_2 and k_3 are constant for all codes since designs are 3-design. But (k_4, k_5) for six designs are different to each other. Therefore six codes in Table 3 are inequivalent to each other.

Table 2. The extremal codes

code	H	Negated columns (P) and rows (B)	Class sizes	k_4, k_5
1	H_1	col: 1 row: 2, ..., 28	56	26, 21
2	H_1	col: 4, 5, 6, 7, 8, 12, 17, 19, 28 row: 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19, 20, 22, 25, 26, 28	2, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	26, 18
3	H_1	col: 4, 5, 8, 21, 22 row: 12, 14, 17, 21, 22	2, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6	32, 20
4	H_1	col: 4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27 row: 3, 7, 8, 12, 16, 17, 21, 25, 26	2, 18, 18, 18	23, 21
5	H_1	col: 4, 5, 9, 11, 13, 14, 15, 18, 19 row: 12, 16, 17, 21, 22, 23, 25, 26, 27	1, 1, 9, 9, 9, 9, 9	26, 20
6	H_2	col: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 row: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20	2, 18, 18, 18	23, 17

(3.1)

$$\begin{aligned}
 H_1 = & \begin{bmatrix}
 1\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111 \\
 1\ 010\ 000\ 111\ 101\ 110\ 110\ 001\ 010\ 010 \\
 1\ 001\ 000\ 111\ 110\ 011\ 011\ 100\ 001\ 001 \\
 1\ 100\ 000\ 111\ 011\ 101\ 101\ 010\ 100\ 100 \\
 1\ 111\ 010\ 000\ 110\ 101\ 110\ 010\ 001\ 010 \\
 1\ 111\ 001\ 000\ 011\ 110\ 011\ 001\ 100\ 001 \\
 1\ 111\ 100\ 000\ 101\ 011\ 101\ 100\ 010\ 100 \\
 1\ 000\ 111\ 010\ 110\ 110\ 101\ 010\ 010\ 001 \\
 1\ 000\ 111\ 001\ 011\ 011\ 110\ 001\ 001\ 100 \\
 1\ 000\ 111\ 100\ 101\ 101\ 011\ 100\ 100\ 010 \\
 1\ 001\ 010\ 010\ 010\ 000\ 111\ 101\ 110\ 110 \\
 1\ 100\ 001\ 001\ 001\ 000\ 111\ 110\ 011\ 011 \\
 1\ 010\ 100\ 100\ 100\ 000\ 111\ 011\ 101\ 101 \\
 1\ 010\ 001\ 010\ 111\ 010\ 000\ 110\ 101\ 110 \\
 1\ 001\ 100\ 001\ 111\ 001\ 000\ 011\ 110\ 011 \\
 1\ 100\ 101\ 100\ 111\ 100\ 000\ 101\ 011\ 101 \\
 1\ 010\ 010\ 001\ 000\ 111\ 010\ 110\ 110\ 101 \\
 1\ 001\ 001\ 100\ 000\ 111\ 001\ 011\ 011\ 110 \\
 1\ 100\ 100\ 010\ 000\ 111\ 100\ 101\ 101\ 011 \\
 1\ 101\ 110\ 110\ 001\ 010\ 010\ 010\ 000\ 111 \\
 1\ 110\ 011\ 011\ 100\ 001\ 001\ 001\ 000\ 111 \\
 1\ 011\ 101\ 101\ 010\ 100\ 100\ 100\ 000\ 111 \\
 1\ 110\ 101\ 110\ 010\ 001\ 010\ 111\ 010\ 000 \\
 1\ 011\ 110\ 011\ 001\ 100\ 001\ 111\ 001\ 000 \\
 1\ 101\ 011\ 101\ 100\ 010\ 100\ 111\ 100\ 000 \\
 1\ 110\ 110\ 101\ 010\ 010\ 001\ 000\ 111\ 010 \\
 1\ 011\ 011\ 110\ 001\ 001\ 100\ 000\ 111\ 001 \\
 1\ 101\ 101\ 011\ 100\ 100\ 010\ 000\ 111\ 100
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$H_2 =$

$$\begin{bmatrix}
 1\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111 \\
 1\ 100\ 010\ 110\ 000\ 001\ 101\ 111\ 010\ 110 \\
 1\ 010\ 001\ 011\ 000\ 100\ 110\ 111\ 001\ 011 \\
 1\ 001\ 100\ 101\ 000\ 010\ 011\ 111\ 100\ 101 \\
 1\ 011\ 001\ 010\ 101\ 000\ 001\ 110\ 111\ 100 \\
 1\ 101\ 100\ 001\ 110\ 000\ 100\ 011\ 111\ 010 \\
 1\ 110\ 010\ 100\ 011\ 000\ 010\ 101\ 111\ 001 \\
 1\ 001\ 110\ 001\ 001\ 101\ 000\ 100\ 011\ 111 \\
 1\ 100\ 011\ 100\ 100\ 110\ 000\ 010\ 101\ 111 \\
 1\ 010\ 101\ 010\ 010\ 011\ 000\ 001\ 110\ 111 \\
 1\ 000\ 100\ 110\ 111\ 100\ 110\ 100\ 100\ 110 \\
 1\ 000\ 010\ 011\ 111\ 010\ 011\ 010\ 010\ 011 \\
 1\ 000\ 001\ 101\ 111\ 001\ 101\ 001\ 001\ 101 \\
 1\ 011\ 000\ 100\ 110\ 111\ 100\ 110\ 010\ 001 \\
 1\ 101\ 000\ 010\ 011\ 111\ 010\ 011\ 001\ 100 \\
 1\ 110\ 000\ 001\ 101\ 111\ 001\ 101\ 100\ 010 \\
 1\ 001\ 011\ 000\ 010\ 011\ 111\ 100\ 101\ 010 \\
 1\ 100\ 101\ 000\ 001\ 101\ 111\ 010\ 110\ 001 \\
 1\ 010\ 110\ 000\ 100\ 110\ 111\ 001\ 011\ 100 \\
 1\ 111\ 010\ 011\ 100\ 001\ 110\ 000\ 100\ 101 \\
 1\ 111\ 001\ 101\ 010\ 100\ 011\ 000\ 010\ 110 \\
 1\ 111\ 100\ 110\ 001\ 010\ 101\ 000\ 001\ 011 \\
 1\ 110\ 111\ 001\ 011\ 010\ 100\ 110\ 000\ 100 \\
 1\ 011\ 111\ 100\ 101\ 001\ 010\ 011\ 000\ 010 \\
 1\ 101\ 111\ 010\ 110\ 100\ 001\ 101\ 000\ 001 \\
 1\ 100\ 101\ 111\ 100\ 011\ 010\ 100\ 011\ 000 \\
 1\ 010\ 110\ 111\ 010\ 101\ 001\ 010\ 101\ 000 \\
 1\ 001\ 011\ 111\ 001\ 110\ 100\ 001\ 110\ 000
 \end{bmatrix}$$

REFERENCES

1. V.K. Bhargava, G.Young and A.K. Bhargava, *A characterization of a (56,28) extremal self-dual code*, JIEEE Trans. Info. Theory 27(1981), 258-260.
2. F.C. Bussemaker and V.D. Tonchev, *New extremal doubly-even codes of length 56 derived Hadamard matrices of order 28*, Discrete Math. 76(1989), 45-49.
3. P.J. Cameron and J.H. van Lint, *Codes and designs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.
4. M. Hall, Jr., *Combinatorial Theory*, Ginn(Blaisdell), Boston, 1967.
5. ———, *Hadamard matrices of order 16*, J. P. L. Research Summary 36-10 1(1961), 21-26.
6. ———, *Hadamard matrices of order 20*, J. P. L. Technical Report 32-761(1965).
7. N. Ito, J. S. Leon and J. Q. Longyear, *Classification of 3-(24,12,5) designs and 24-dimensional Hadamard matrices*, J. Combin. Theory(A) 27(1979), 289-306.
8. H. Kimura, *Hadamard matrices of order 28 with automorphism groups of order two*, J. Combin. Theory(A) 24(1986), 98-102.
9. ———, *On equivalence of Hadamard matrices*, Hokkaido Math. J. 17(1988), 139-146.
10. ———, *New Hadamard matrix of order 24*, Graphs and Combin. 5(1989), 236-242.

11. ———, *Characterization of Hadamard matrices of order 28 with Hall sets*, Discrete Math. (to appear).
12. ———, *Characterization of Hadamard matrices of order 28*, Discrete Math. (to appear).
13. ———, *A list of Hadamard matrices of order 28*, (Unpublished)
14. ——— and H. Ohmori, *Construction of Hadamard matrices of order 28*, Graphs and Combin. 2(1986), 247–257.
15. F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane *The theory of error-correcting codes*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
16. Michio Ozeki, *Hadamard matrices and doubly even self-dual error-correcting codes*, J. Combin. Theory(A) 44(1987), 274–287.
17. V. D. Tonchev, *Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 13*, J. Combin. Theory(A) 35(1983), 43–57.
18. ———, *Hadamard matrices of order 28 with automorphisms of order 7*, J. Combin. Theory(A) 40(1985), 62–81.
19. ———, *self-orthogonal designs and extremal doubly-even codes*, J. Combin. Theory(A) 52(1989), 197–205.

4重可移群の分類の顛末

大阪教育大学 大山 豪

定年を迎えることになり、この機会に約10年間4重可移群の分類を試みたが、遂に成功しなかった顛末を述べたいと思う。

永尾 汎先生の指導と野田 隆三郎氏との協力のもとで、1965年から1978年までに、On multiply transitive groups I~XIVにより分類を試みた。またその間永尾 汎: Multiply transitive groups[5]も大きな役割を果たした。

当時W. Feit and J. Thompson: Solvability of groups of odd order (1963)が発表され、1964年にMathieu群以来最初の散在単純群 J_1 がZ. Jankoにより構成され、有限単純群分類へ向けての夢が大きくふくらんでいた。私達も伊藤 昇先生の大阪市大での談話会がきっかけで4重可移群の分類を試みることになった。

必要な記号

G ; $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の置換群

$I(X) = \{i \in \Omega \mid i^x = i, \forall x \in X\}$, $X \subseteq G$, $I(x) = I(\{x\})$, $x \in G$

$G_\Delta = G_{i_1 \dots i_k} = \{x \in G \mid I(x) \supseteq \Delta\}$, $\Delta = \{i, j, \dots, k\} \subseteq \Omega$

$\Delta \subseteq \Omega$, $x \in G$, $\Delta^x = \Delta$ のとき x^Δ ; x の Δ 上への制限

$\Delta \subseteq \Omega$, $X \subseteq G$, $\Delta^X = \Delta$ のとき X^Δ ; X の Δ 上への制限

必要な用語

G が Ω 上 t 重可移群; Ω の t 個の異なる文字からなる任意の2つの
順列 $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}, \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$ に対して

$$\exists x = \begin{matrix} i_1 & i_2 & \dots & i_t & \dots \\ j_1 & j_2 & \dots & j_t & \dots \end{matrix} \in G$$

G が Ω 上semi-regular; $G_i = 1, \forall i \in \Omega$

G が Ω 上regular; semi-regularな可移群

知られた4重可移群は、対称群 S_n ($n \geq 4$), 交代群 A_n ($n \geq 6$)及びMathieu群 M_n ($n = 11, 12, 23, 24$) (1870年頃)であった。我々は次の定理を出発点とした。

C. Jordan; (1872) [3]

G が4重可移群で $|G_{1234}| = 1 \Rightarrow G = S_4, S_5, A_6$ または M_{11}

M. Hall; (1954) [1]

G が4重可移群で $|G_{1234}| = \text{奇数} \Rightarrow G = S_4, S_5, A_6, A_7$
または M_{11}

従って $|G_{1234}| = \text{偶数}$ の場合を分類すればよい。また G の次数が 35 未満の 4 重可移群は、上記の群に限ることが示されていた ([2], p. 80)。

分類を進める際、 Ω の部分集合の上で 4 重可移群になっている G の部分群の構造により、 G の構造を決定する方法をしばしば用いた。従って次の定理が重要な役割をはたした。

E. Witt [7]

G を t 重可移群、 X を $G_{12\dots t}$ の部分集合とする。 X と G - 共役な $G_{12\dots t}$ の部分集合が つねに X と $G_{12\dots t}$ - 共役であれば、

$N_G(X)^{I(X)}$ は $I(X)$ 上 t 重可移である。

X として $G_{12\dots t}$ とか $G_{12\dots t}$ の p -シロ一部分群をとることができる。

D. Livingstone and A. Wagner [4]

p を素数とする。任意の t 個の点 i_1, i_2, \dots, i_t に対して丁度この t 個の点を固定する p -部分群 ($\neq 1$) が存在するならば、 G は t 重可移群
また M. Hall [2], H. Wielandt [6] も重要な参考書であった。

以下 G を $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の 4 重可移群、 $H = G_{1234}$ 、 P を H の 2-シロ一部分群、 $\Lambda = I(H)$ 、 $\Delta = I(P)$ 、 $\Gamma = \Omega - \Delta$ とする。

E. Witt の定理 [7] を用いることにより、

C. Jordan [3] の定理より $N_G(H)^\Lambda = S_4, S_5, A_6$ または M_{11}

M. Hall [1] の定理より $N_G(P)^\Delta = S_4, S_5, A_6, A_7$ または M_{11}

この $N_G(H)^\Lambda$ と $N_G(P)^\Delta$ に P の群としての性質 (H の正規部分群とか可換群)、置換群としての性質 (軌道, semi-regular, regular, i -cycle の個数) を仮定して G を決定することを進めた。そのためには Mathieu 群における部分群 P の構造と同じ構造を持った 4 重可移群をまず分類することであった。

Mathieu 群の P は次の構造を持っている。

M_{12} ; $P = H$, $N_G(P)^\Delta = S_4$, P ; quaternion gp, Γ 上 regular

M_{23} ; $N_G(P)^\Delta = A_7$, $|P| = 16$, $P \trianglelefteq H$,

P ; elementary abelian, Γ 上 regular

M_{24} ; 5 重可移群, $N_G(P)^\Delta = S_4$, $|P| = 4 \times 16$

Γ 上の P -orbit の長さ; 4 と 16

(1965)

まず最初の定理として、 G の 2 点の stabilizer の構造より G の分類を試みた。

(1)永尾[8]: $|\Omega| = \text{偶数}, \exists Q \cong G_{12}; \Omega - I(Q)$ 上regular

$\Rightarrow G = S_4, S_5$ or A_6

以下はすべて、Hの構造より分類を進めたものであるが、Pとくに $N_G(P)^\wedge$ の構造よりGが定まることは大きな驚きであり喜びでもあった

(2)永尾, 大山[9]: P ; elementary abelian ($\neq 1$), Γ 上可移

$\Rightarrow G = S_6, S_7, A_8, A_9$ または M_{23}

(3)永尾, 大山[9]: $P(\neq 1) \cong H, P; \Gamma$ 上可移

$\Rightarrow G = S_6, A_8, M_{12}$ または M_{23}

(4)永尾, 大山[10](1)の拡張: $P(\neq 1); \Gamma$ 上regular

$\Rightarrow G = S_6, S_7, A_8, A_9, M_{12}$ または M_{23}

さらに次の定理により、分類は大きく前進した。

(5)永尾[11]: $N_G(H)^\wedge = S_5, A_6$ または M_{11}

$\Rightarrow G = S_5, A_6$ または M_{11}

$N_G(H)^\wedge$ が4通り、 $N_G(P)^\wedge$ が5通りありそれらを組み合わせて検討していたのが、(5)により $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$ として、 $|\Delta| = 4, 5, 6, 7$ または 11について調べればよいことになった。

(1967)

(6)永尾[12]: $P(\neq 1)$; semi-regular, $|\Delta| \leq 5$

$\Rightarrow G = S_6, S_7, A_8, A_9$ または M_{12}

(1968)

(7)野田, 大山[13]: $P(\neq 1)$; cyclic $\Rightarrow G = S_6$ または S_7

(8)大山[14](6)の拡張: $P(\neq 1)$; semi-regular

$\Rightarrow G = S_6, S_7, A_8, A_9, M_{12}$ または M_{23}

殆どの対称群、交代群は $|\Delta| = 4$ または 5 である。従って $|\Delta| = 6, 7$ または 11 の場合は分類できると考えた。

(1969)

(9)大山[15]: $|\Delta| = 6 \Rightarrow G = A_6$

(1970)

(10)大山[16]: $|\Delta| = 11 \Rightarrow G = M_{11}$

(1971)

$|\Delta| = 7$ の場合 M_{23} が表れる。そのために一般の置換群についての性質を [17] で調べた。

(1973)

(11)大山[18]: $|\Delta| = 7 \Rightarrow G = A_7$ または M_{23}

以上より $|\Delta| = 4$ または 5 の場合のみ残った。また今までの分類では

M_{24} は一度も表れてこなかった。従って残された2つの場合の分類は困難が予想され、もはやPのみだけでなくPの部分群、元の性質を用いなければ分類は進まないと考えた。

(1974~1978)

(12) 大山[19]: t ; involutionの固定点の個数の最大数

$\exists Q$; 2-部分群; $|I(Q)|=t$,

(\star) $N_G(Q)^{I(Q)} = S_t$ または A_t

$\Rightarrow G = S_n (n \geq 4), A_n (n \geq 6)$ または $M_n (n = 11, 12, 23, 24)$

このようにして、全ての知られた4重可移群をとらえることのできる条件を見つかることができた。ここで $t \leq 8$ ならば(\star)は不要であり、また平峰により(12)は拡張された。

(12') 平峰[23]: (\star) $N_G(Q)^{I(Q)}$; 知られた4重可移群

$\Rightarrow G$; 知られた4重可移群

このことよりGを最小次数の知られていない4重可移群とすれば、(\star)の条件は4重可移群でない群となる。従って $N_G(Q)^{I(Q)}$ をうまく場合分けできれば、分類が完成するはずである。しかしこの条件設定は残念ながら行い得なかった。

(12)の系として次の(13), (14)も得られる。

(13) 大山[19]: $|\Omega|$; 偶数, $P \neq 1$ とする

(i) $\Delta = I(Z(P))$, $Z(P)$; Pの中心

$\Rightarrow G = S_n (n \geq 6), A_n (n \geq 8, n \equiv 0 \pmod{4})$ または M_{12}

(ii) $\forall i \in \Gamma, P_i$; $\Omega - I(P_i)$ 上 semi-regular か 1

$\Rightarrow G = S_6, S_8, A_8, A_{10}, M_{12}$ または M_{24}

(14) 大山[19]: $P (\neq 1)$; Γ 上可移

$\Rightarrow G = S_{2^{k+4}} (k \geq 1), S_{2^{k+5}} (k \geq 1)$

$A_{2^{k+4}} (k \geq 2), A_{2^{k+5}} (k \geq 2), M_{12}$ または M_{23}

Hのp-シロ一部分群の構造のみから分類を進めることは益々困難になってきた。そこでHの構造に目を向けざるを得なくなったが、手ずまりの感を強めた。

(15) 大山[20]: $3 \mid |H| \Rightarrow G = S_4, S_5, S_6, A_6, M_{11}$ または M_{23}

(16) 大山[21]: \exists 長さ2のH-orbit $\Rightarrow G = S_6$

ここまで来たが、全体の単純群の分類の進展状況より、遂に我々の仕事は中断されることになった。

尚我々の仕事と同じ流れである次の結果もできている。

(17)平峰[22]:Hの任意の2-elementと3-elementが可換

$\Rightarrow G = S_4, S_5, S_6, A_6, A_7, M_{11}$ または M_{12}

(18)秋山[24]: \exists 長さ3のH-orbit $\Rightarrow G = S_7, S_7$ または M_{23}

1979年単純群の分類の完成で4重可移群分類の仕事は一応幕を閉じることとなった。しかし今尚単純群の分類定理を用いることなく4重可移群を分類したい気持ちには変わりはない。

参考文献

- [1] M.Hall:On a theorem of Jordan, Pacific J. Math. 4(1954), 219-226.
- [2] M.Hall:The Theory of Groups, Macmillan, New York, 1959.
- [3] C.Jordan:Recherches sur les substitution, J. Math.Pures Appl. 17(1872), 351-363.
- [4] D.Livingstone and A.Wagner:Transitivity of finite permutation groups on unordered sets, Math. Z. 90(1965), 393-403.
- [5] H.Nagao:Multiply Transitive Groups, California Institute of Technology, California, 1967.
- [6] H.Wielandt:Finite Permutation Groups, Academic Press, New York, 1964.
- [7] E.Witt:Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, Abh. Matu. Sem. Univ. Hamburg 12(1937), 256-264.

関連論文

- [8] H.Nagao:On multiply transitive groups I, Nagoya Math. J. 27 (1966), 15-19.
- [9] H.Nagao and T.Oyama:_____ II, Osaka J. Math. 2(1965), 129-136.
- [10] H.Nagao and T.Oyama:_____ III, Osaka J. Math. 2(1965), 319-326.
- [11] H.Nagao:_____ IV, Osaka J. Math. 2(1965), 327-341.
- [12] H.Nagao:_____ V, J. Algebra 9(1968), 240-248.
- [13] R.Noda and T.Oyama:_____ VI, J. Algebra 11(1968), 145-154.
- [14] T.Oyama:_____ VII, Osaka J. Math. 5(1968), 155-164.
- [15] T.Oyama:_____ VIII, Osaka J. Math. 6(1969), 315-319.
- [16] T.Oyama:_____ IX, Osaka J. Math. 7(1970), 41-56.