第１３回代数的組合せ論シンポジウム報告集

１９９６年７月１日～３日

於 北海道大学学術交流会館

平成８年度文部省科学研究費基盤研究 (A)

(課題番号 08304003 代表 八牧宏美)

まえがき

この報告集は、１９９６年７月１日(月)から３日(水)にわたって、北海道大学学術交流会館で行なわれた「第１３回代数的組合せ論シンポジウム」の講演記録です。遠隔地であるにも関わらず、90 名近い参加者を得て盛会でした。

この集会に関わる講演者の旅費、およびこの報告集の作成にあたっては、科学研究費基盤研究 (A) (研究代表者: 熊本大学理学部教授) から大きな援助をいただきました。プログラム作成には、坂内英一(九州大学)、鈴木寛(ICU)、宮本雅彦(筑波大学) の３氏にお世話になりました。また宗政昭弘氏(九州大学) には、プログラムの発送などいろいろお世話になりました。この場を借りて御礼申し上げます。

なお私の連絡ミスなどで、この報告集の発行が遅れたこと、にもかかわらず、すべての講演記録を収めることが出来なかったことをお詫びします。

1997 年 1 月
吉田 知行

「第１３回代数的組合せ論シンポジウム」

科学研究費基盤研究 (A) (八牧宏美代表) による研究集会を下記の通り開催します。

日時：７月１日 (月)−３日 (水)
場所：北海道大学学術交流会館（札幌市北区北８条西５丁目）小講堂
北大正門入ってすぐの左側、札幌駅北口から徒歩で１０分
世話人：吉田知行 (北大・理・数学) yoshidat@math.hokudai.ac.jp

プログラム

７月１日（月）
10:00–10:50 五味健作 (東大・数理)
思考、論理、言語、代数

11:00–11:50 Stephen Smith (Illinois Univ.)
Applications of combinatorics to group cohomology.

13:30–14:00 Sung Yell Song (Iowa State Univ.)
The subconstituent algebra for the wreath product of association schemes.

14:10–15:00 Haitao Guo(九大・数理)–Tayuan Huang (国立交通大 (台湾) –九大・数理)
Four-weight spin models and related Bose-Mesner algebras.

15:10–15:40 大浦学 (九大・数理)
Genus 4 の Siegel modular form と関係した有限群の Molien 級数

15:40–16:10 宮本泉–花木章秀 (山梨大・工)
コンピュータを用いた小さなサイズの association schemes の分類

16:20–17:00 坂内 英一 (九大・数理)
Primitive symmetric association schemes with $m_1 = 3$.

17:10–17:40 鈴木通夫 （イリノイ大学）
有限単純群の素数グラフについて

7月2日（火）

10:00–10:50 原田耕一郎 (オハイオ州立大)
On a commutative algebra with an associative form.

11:00–11:50 Bernhard Runge (阪大・理)
Codes and Siegel modular forms.

13:30–14:00 奥山京 (鳥羽商船高専)
アーベル群の purifiable 部分群と ADE 群について

14:10–15:00 永友清和 (大阪大学・理)
頂点作用素代数の共形構造 — CFT の視点から

15:10–16:00 宮本雅彦 (筑波大・数学)
ムーンシャイン頂点作用素代数の超簡単な構成法とミラクルミラーコード

16:10–17:00 木村浩 (愛媛大・理)
Hadamard 行列の二面体群からの構成法

17:10–17:40 J.Mackey (Montreal univ.)
Modular forms and moonshine

7月3日（水）

10:00–10:50 寺尾宏明 (北大・理)
Arrangements of hyperplanes and hypergeometric integrals

11:00–11:50 Harvey Blau(Northern Illinois univ.)
Integral table algebras with elements of small degree.

13:30–14:00 平峰豊 (熊本大・教育)
(n,r)-型のシュア環について

14:00–14:30 中川暢夫 (近畿大・理工)
A construction of regular graphs of degree 26 with no triangles admitting $PSL(2,25)$

14:40–15:10 平木 彰 (大阪教育大・教育)
Distance-regular subgraphs in a regular near polygon.

15:10–15:40 田邉顕一朗 (九大・数理)
On the centralizer algebra of the unitary reflection group $G(m,p,n)$.

15:40–16:10 伊藤豊治
有限体上のデザインの構成

目　次

思考・論理・言語・代数

数理心理学序説

五 味 健 作

（東京大学 数理科学研究科）

シンポジウムから三ケ月近くたつと、講演ノートの粗ばかりが目につき、そのまま記録するのがはばかられます。そこでここでは、「数理心理学序説」という副題をつけたうえで、講演の不備を多少補うことにいたします。

1

人間の脳の中で起きているのは、物質的には、神経細胞間の電気的あるいは化学的な信号の行き来だけであると言う。しかし脳は、思考し、感情や意志というものを生じ、しかもそれらを意識するという複雑な心の働きを担っている。一見単純そうに見える脳の構造から、なぜ複雑な心というものが生ずるのだろうか。そもそも、思考、感情、意志、意識とは何だろうか。このように、心の世界の不思議は、原子や宇宙といった物質世界の不思議に勝るとも劣らない。物質世界の原理を探る学問としては物理学があり、その数学的部分として数理物理学というものが盛んに研究されている。それと同様に、心の世界の原理を探るための数理心理学というものが、もっと盛んであって然るべきではなかろうか。しかし、現実は必ずしもそうなっていない。

歴史上、物理学と数学はほとんど一体のものとして発展して来た。これに比べると、心理学と数学とは永い間ほとんど無縁であったと言ってよいだろう。しかし、この状況も、電子計算機――人間の思考の一部を摸擬するかに見える機械――の出現の前後の時期を境として大きく変化している。脳や心についての従来の学問分野である神経科学、心理学、論理学、言語学などが、計算機関連科学（情報科学）から強い影響を受けて、認知科学という大きな学問分野を形成しつつある。私にとっての数理心理学とは、この認知科学の数学的な部分に当たるもののようである。もっとも、現在のところ、私の数理

心理学は、もっぱら思考を研究対象とし、数学とは数理論理学や数理言語学を介して結びついているに過ぎない。このような現状に鑑み、以下では話を思考に限ることにする。しかし、数理心理学の発展につれ、思考だけでなく感情や意志などを扱えるようになった暁には、数学の大きな部分が関わっているに違いない。

2

電子計算機からの強い影響の必然的な結果として、数理心理学は人間機械論に立脚する。つまり、「人間は如何なる思考機械であって、その結果如何なる思考能力を持つのか」というのが、数理心理学の当面の主問題ということになる。それでは、機械とは何だろうか。手もとの辞典によれば、「機械とは変換装置である」というのが現代的定義であるらしい（ここにも電子計算機の影響が見てとれる）。これにはなるほどと思わされるので、この定義に従うことにする。そうすると、機械には、それが変換するものと変換の結果出来るものとがある。これらを一まとめに L で表せば、機械が行う変換は、L の一部分で定義され L に値をもつ関数とみなされる。ただし、複数のものが組み合わされ変換されて一つものが出来る場合もある。したがって、機械が行う変換とは、集合 L の有限直積の部分集合において定義され L に値を持つ関数だということになる（機械は一般に複数の変換器を備えているから、複数個の関数がある）。このような関数は、見方を変えれば、L における（局所多項）算法である。したがって、L は（一般には複数個の）算法をもつ集合となり、機械とは、集合 L とその上の算法系とを合わせた概念、すなわち代数系となる。そうすると、機械の構造とは、この代数系の代数構造のことになる。機械の能力が如何ほどであるかは、材料に変換を施して如何ほどのものを作り出せるかで計られる。そうすると、代数系となったこの機械の機能は、L の部分集合 A とそれが生成する部分代数系 $\langle A\rangle$ との対応関係によって計られることになる。

以上のような代数学的定式化は、機械の機能の理論的可能性（あるいは限界）の定性的な研究には、有効な方法であると思われる。そして、そのよう

な研究を、私は第一義のものとしたい。

3

どのような思考にも、必ずその対象となる事物から成る世界がある。思考機械としての人間は、その世界の事物をまず何らかの形に記述し、次にそれに変換操作を施して、今までにない新しい記述を作り出すことになる。しかし、思考機械に可能なのは L の元――これを以下では「記号」とも呼ぶ――に変換を施すことだけであるから、世界の事物を記述するのも記号への変換操作によって行われる。そこで、L における変換すなわち算法を、

（ａ）世界の記述のための算法と、

（ｂ）新しい記述を得るための算法

とに分ける。そして（ａ）に属する算法のみを L に与えて出来る代数系を、心的言語（あるいは深層言語、あるいは内部言語）と呼ぶ。また、（ｂ）に属する算法全体を L の論理構造と呼び、L に論理構造を与えて出来る代数系を論理代数と呼ぶ。そうすると、思考機械についての基本的な問は、次の四つに分割されることになる。

（１）世界とは何か。

（２）心的言語の代数構造は如何なるものか。

（３）論理構造は如何なるものか。

（４）論理代数において、部分集合とそれが生成する部分代数系との対応関係は如何なるものか。

（実は、（２）と（３）の間にもう一つの基本的な問がある。）こう分割したうえで、思考についての最初の仮説を述べることができる。

《仮説》 心的言語は何等かの普遍代数系である。

ここで代数系と呼んでいるのは、厳密には型つき代数系であり、これは代数系 L およびそれと同類の代数系 T ならびに L から T への狭義準同形写像 τ から成る三つ組のことを言う。そして、L の元 x に対して τx を x

の型と呼ぶ。「普遍」とは、自由群や自由多元環などがもっている普遍性と同種の概念である。そして、集合 K および K から代数系 T への写像 τ' の組を与えるごとに、普遍型つき代数系 $(L,\ T,\ \tau)$ であって、L が K によって生成され、かつ τ が τ' の拡張になっているもの（の同形類）が唯一つ存在する。以上のことの正確な定義や証明は割愛するが、L は K のなかの記号と T の算法記号および括り記号（括弧など）の列から成る集合として構成されることを注意しておく（あちこちに繰返し現れるいわゆる帰納的定義のほとんどは、普遍型つき代数系の構成法の中に集約されてしまう）。

普遍代数系とは、要するに、自由群というおなじみの概念を考えられる限りに一般化した概念である。したがって、普遍代数系を自由代数系と呼ぶこともできる。しかし、今の文脈では、より適切な呼び名は形式言語であろう（さっき心的言語という名を使ったのはこのためである）。ここまで来ればもうお分かりの方が多いかも知れない。問（１）～（４）について考えるとは、要するに、心的言語という形式言語の構造を然るべく定めた後、その形式言語の上の論理学を研究することに他ならない。したがって、問（２）（３）の間に欠けていた問とは、

（$2\frac{1}{2}$）真偽とは何か。

ということになる。真偽の定義により、真なる文から真なる文を導くことのできる算法としての「妥当な論理」の範囲が定まる。そして、問（３）における論理構造は、妥当な論理の中に探ることになる。なぜなら、人間は妥当な論理を進化させて来たはずだからである（そうでなかったら、淘汰されてしまっただろう）。

以上に出てきた数学的概念の生理学的裏付けとか実体については、残念ながら良く分からないことが多い。心的言語が普遍代数系であるという根本的な仮説の裏付けは、どこにどのように探せばよいのだろうか。心的言語の中のある種の記号は、恐らく、外界の事物からの特定の刺激に対応して興奮する特定の神経細胞または神経細胞群、あるいはその興奮パターンに相当するものであろう。それ以上のことは、現在の私には考え及ばない。しかし、そ

のような生理学的実体が不明なままでも、以上に述べたような代数学的（あるいは論理学的）枠組みであれば、かなりのことが出来るのではないかというのが、現在の私の感触である。

4

科学的理論が妥当であるかどうかは、観察される現象を如何に説明し得るかで判定される。思考の科学的理論の場合、観察し説明すべき現象の第一は、人間が使う言葉すなわち自然言語であろう。自然言語文は、心的言語文や心的言語上の論理計算過程などが、何等かの変形を受けた後、不完全な形で表出されたものと考えられるからである。（もっとも、犬や猫もかなり高度の抽象的な思考をしているという証拠がある。犬の思考の理論の場合には、どこを観察したらよいのだろうか？ 犬は音声言語ではなく臭気言語を使っているとしたら…） 自然言語は、観察され説明されるべき現象であるばかりでなく、その他の事物と共に思考の対象世界を作ることもある。（思考が言語によって規定されるというのは、こういう状況で起きることであると考えられる。思考が何時でも言語に規定されるとか、何時でも規定されないとかの主張は極論であろう。） したがって、思考の研究のためには、言語学の領域にまで深く立ち入る必要がある。そう考えて言語学を見渡してみると、問（１）－（４）と関連深い研究がすでに行われていることが分かる。その第一は、いわゆる Montague 意味論に端を発っし形式意味論などに至る流れである。 Montague のそもそもの目標は、自然言語のある断片についての意味論を展開することのようであるが、そこでは、まさしく問（１）～（４）が考察されている。実は、彼は思考の一理論を作ったのであって、それによって、自然言語現象の中でも特に、意味に関わる現象を説明しようと試みたものと解釈できないだろうか。第二の流れは、Chomsky が創始した変形生成文法論である。この理論では、自然言語現象を説明するために、いろいろな意識下の言語（深層言語、ｄ言語、ｓ言語、等々）の存在を模索するが、これは問（２）に通ずる考え方ではないだろうか。

5

第３節で、論理学とは思考機械の機能の定性的理論のための学問に他ならない、という視点を述べた。この点をもう少し立ち入って説明しよう。説明の便宜上、一階述語論理学をとりあげる。つまり、ある人の心的言語が述語論理学における形式言語 TF （すなわち項と式の全体）であるとする。（これは問（２）への答えとしては不十分なもので、たとえば Montague は代わりに内包論理を用いる。しかし、述語論理的な思考機械は有り得る。） すなわち、神経系の中の何等かの生理学的単位として、次の７種の基本記号があるとする。

定数記号（その全体を CON で表す）

関数記号（その全体を FUN で表す）

述語記号（その全体を PR で表す）

変数記号（その全体を VAR で表す）

論理記号 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall x$, $\exists x$ $(x \in VAR)$

（これらの集合を LOG で表す）

型 e と t（これらの集合を TYP で表す）

括弧 [と]

このうち、始めの三種が個々の心的言語に固有のものであり（すなわち人によって異なる後天的なもの）、後の四種はすべての心的言語に共通のものである（すべての人に遺伝的に備わっている）。また、TYP は、何らかの生理学的な仕組みにより、$LOG \cup FUN \cup PR$ を算法系とし、次のような代数構造をもつ代数系になっているものとする。

$\alpha = \wedge, \vee, \rightarrow$ のとき $\alpha t^2 = t$

$\beta = \neg, \forall x, \exists x$ のとき $\beta t = t$

f が n 変数関数記号のとき $fe^n = e$

p が n 変数述語記号のとき $pe^n = t$

これまた何等かの生理学的仕組みとして、$CON \cup VAR$ から TYP への写像 τ' で、すべての $\alpha \in CON \cup VAR$ に対して $\tau' \alpha = e$ なるものがあるとする。

これだけの簡単な仕組みがあると、前述のように普遍代数系 (TF, TYP, τ) が一意に定まる (TF の型 e の元が項であり、型 t の元が式である)。ただし、これは数学的に定まるのであって、神経系の中に TF のすべてが存在しているのではない (TF は無限集合だから存在し得ない)。必要に応じて TF の記号 (に相当する生理学的実体) が作り出されるという意味で、TF が言わば仮想的に存在しているのである。そして、TF の記号を神経系の中に実際に作り出すためには、基本記号と括弧を然るべき規則にしたがって並べることのできる仕組みがあればよい。これが心的言語というものである。

述語論理学においては、世界は集合 M によって定まり、M および M 上の全域的多項算法の全体 $M^n \to M$ ($n=1,2,\ldots$) および M 上の多項関係の全体 $M^n \to 2$ ($n=1,2,\ldots$) から成るものとする (集合 A から B への写像全体を $A \to B$ で表し、集合 $\{0, 1\}$ を 2 で表す)。すなわち、M が世界の「物」の集合であり、$M^n \to M$ と $M^n \to 2$ が「事」の集合である (これも問 (1) への答えとしては十分でない)。

さて、TF に固有の記号系 $CON \cup FUN \cup PR$ は、世界の特定の事物を記銘することによって神経系の中に常駐するようになった何等かの生理学的単位に相当するものである (第3節末尾参照)。したがって、$CON \cup FUN \cup PR$ から世界へ記銘写像 Φ があることになるが、Φ は CON を M にうつし、n 変数関数記号を $M^n \to M$ にうつし、n 変数述語記号を $M^n \to 2$ にうつすものとする。そうすると、Φ は論理学で「解釈」と呼ばれるものに他ならない。 VAR も世界の物に対応するが、この対応は非定常的である (時により変化する)。そこで、この対応の全体すなわち $VAR \to M$ を考える必要がある。これを VAL で表す。 VAL は論理学で「付値」と呼ばれるものの全体に他ならない。

記銘写像 Φ によって $(VAL \to M) \cup (VAL \to 2)$ は TF と同類の代数系となることを示そう。まず、$\Phi|_{FUN}$ により n 変数関数記号は $M^n \to M$ の元にうつるが、さらに次のように $(VAL \to M)^n \to (VAL \to M)$ の元にうつる。

f が n 変数関数記号で $\varphi_i \in VAL \to M$ $(i=1,2,\dots,n)$ のとき

$\sigma \in VAL$ に対して $(f(\varphi_1,\dots,\varphi_n))\sigma = f(\varphi_1\sigma,\dots,\varphi_n\sigma)$

つまり、f は $(VAL\to M)^n$ を定義域とし $VAL\to M$ を値域とする n 項算法となる。同様に、$\Phi|_{PR}$ により n 変数述語記号は $M^n\to 2$ の元にうつるが、さらに $(VAL\to M)^n\to(VAL\to 2)$ の元にうつる。つまり、n 変数述語記号は $(VAL\to M)^n$ を定義域とし $VAL\to 2$ を値域とする n 項算法となる。また、$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ は通常のように 2 の算法となり、したがって $VAL\to 2$ の算法となる。最後に、$\forall x$ と $\exists x$ についてであるが、まず $VAR\times M$ は次のように VAL へ作用する。

$(x/a) \in VAR\times M$, $\sigma \in VAL$, $y \in VAR$ に対し

$$((x/a)\sigma)y = \begin{cases} a & (\ y = x \text{ のとき }) \\ \sigma y & (\ y \neq x \text{ のとき }) \end{cases}$$

そうして、$\forall x$ と $\exists x$ は次のように $VAL\to 2$ の単項算法となる。

$\varphi \in VAL\to 2$, $\sigma \in VAL$ に対し

$$(\forall x\varphi)\sigma = \inf\{\ \varphi((x/a)\sigma)\ ;\ a \in M\ \}$$

$$(\exists x\varphi)\sigma = \sup\{\ \varphi((x/a)\sigma)\ ;\ a \in M\ \}$$

Φ によって固有記号系 $CON\cup FUN\cup PR$ が世界の事物に対応づけられると、以上のようにして $(VAL\to M)\cup(VAL\to 2)$ は TF と同類の代数系となる。

記銘写像 Φ はまた $CON\cup VAR$ から $VAL\to M$ への写像 INT_Φ を次のように定める。

$\alpha \in CON\cup VAR$ と $\sigma \in VAL$ に対し

$$(INT_\Phi\alpha)\sigma = \begin{cases} \Phi\alpha & (\ \alpha \in CON \text{ のとき }) \\ \sigma\alpha & (\ \alpha \in VAR \text{ のとき }) \end{cases}$$

そうすると、TF の普遍性により INT_Φ は TF から $(VAL\to M)\cup(VAL\to 2)$ への準同形写像に拡張される。これも同じ記号 INT_Φ で表し、Φ が定める意味写像と呼ぶ。そうすると、任意の式 α は意味写像 INT_Φ によって $VAL\to 2$ へうつされる。そこで、すべての $\sigma \in VAL$ に対して $(INT_\Phi\alpha)\sigma = 1$ のとき、式 α は Φ のもとで真であると定義する。

以上に示したように、神経系の中に若干の記号と仕組みがあり、固有記号

が外界の事物に対応づけられていれば、数学的には非常に豊かな構造が存在していることになる（しかしもちろん、それは目に見えない）。

なお、述語論理学の枠内であっても、真の定義は無数にあり得るのであり、ここでの定義はその中の一つ（古典述語論理学におけるもの）に過ぎない。問（1）（2）への答えとしてどのようなものを採ろうと、この事情は変わらないであろう。しかし、真の定義というものは、この宇宙の仕組みの一部として唯一つであろうから、私たちは、何等かの唯一つの定義を選ばなければならない。

6

真の概念が定まると、真なる文から真なる文を導く算法としての（妥当な）論理の範囲が定まる。これを定義する前に、心的言語 TF の範囲を拡大して、いわゆる sequent も含めることにする（思考機械がこの種の記号をもっているとしてもいいし、思考機械の観察者が便宜のために導入するとしてもいい）。ただしここでは、sequent を文と呼ぶことにし、文の全体を SEN で表す。真の定義範囲も拡大して、文

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \to \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

が記銘写像 Φ のもとで真であるとは、任意の $\sigma \in VAL$ に対して

$$\inf\{(INT_\Phi\alpha_i)\sigma \ ; \ 1 \leq i \leq m\} \leq \sup\{(INT_\Phi\beta_j)\sigma \ ; \ 1 \leq j \leq n\}$$

が成り立つことと定義する（$\inf\emptyset = 1$，$\sup\emptyset = 0$）。また、Φ のもとで真である文の全体を Φ が定める理論と呼ぶ。そうすると、文の集合 SEN における（妥当な）論理とは、SEN 上の局所多項算法であって、任意の世界への任意の記銘写像が定める理論を不変に保つものと定義される。

代数系において、局所 n 項算法 f の定義式 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が具体的に分かっているとき、f を

$$\frac{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n}{y}$$

なる図式で表す。そうすると、たとえば、$VAL \to 2$ が分配束であることから、

SEN における二項算法

$$\frac{\Gamma \to \alpha, \Delta \quad \alpha, \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Pi}$$

は論理であることが分かる。これは論理学にｃｕｔ等の名前で登場する推論図に他ならない。その他のおなじみの推論図も論理図とみなされるが、論理はこれら以外にも無数にある。そこで、論理の全体を Λ で表すことにする。そうすると、問（３）における論理構造としては、Λ の部分集合 L を然るべく特定することになる。これが特定されると、最終段階である問（４）の研究にうつることになる。以下、これについて若干述べよう。

論理の集合 L に対して、SEN の部分集合であって、自明な文 $\alpha \to \alpha$ をすべて含み、かつ L に含まれるすべての論理で不変に保たれるものを L 理論と呼ぶ。つまり、L 理論とは、SEN を L 代数系とみなしたときの部分代数系であって、自明な文をすべて含むものに他ならない。この定義から明らかに、A が SEN の部分集合であるとき、A を含む最小の L 理論が存在する。これを LA で表す。

論理は無数に存在し、思考機械の記号操作能力は限られているから、思考機械の論理構造 L は Λ の極く一部であるに過ぎない。したがって、A を SEN の部分集合とするとき、LA はその理論的限界 ΛA よりはるかに小さいかも知れない。 $LA = \Lambda A$ であるためには、L はどの程度に大きくなければならないのか。この問については、次のいわゆる完全性定理が知られている。『L が Gentzen の論理系 L_K と同等であれば（とくに $L = L_K$ であれば）、$LA = \Lambda A$ が任意の A について成り立つ』。ただし、二つの論理系 L_1 と L_2 が同等であるとは、『L_1理論は L_2理論であり、その逆も正しい』なる条件をみたすことを言う。たとえば、L_1の中の論理がすべて L_2の中の論理の合成として表され、その逆も成り立つならば、L_1と L_2は同等になる。

これは確かに基本的かつ重要な定理である。しかし、これで問題は終わりではない。たとえば、L_K と同等でない論理系の場合はどうか、という膨大な問題領域が残されている。これは、思考の病理学に他ならない。思考の病理

学が人間の思考異常の診断に役立つなどということは、今のところ夢物語かもしれない（思考機械の故障の診断となれば、多少は現実味を帯びてくる）。しかし、数理心理学としては、このような問題を放置することは出来ないであろう。

以上、一階の述語論理学をとりあげたのは説明の便宜のためであった。如何なる論理体系が適切であるのかについて、自然言語現象などの実地に即した、十分な考察がまずもって必要であろう。

Applications of COMBINATORICS to GROUP COHOMOLOGY

Alg Combinatorics Conf.
Hokkaido U., Sapporo
1 July 1996

Stephen D. Smith
U. Illinois at Chicago

OUTLINE:

(Foreword: recent cohomology for SPORADIC groups.)

① Using point-line geometries

② Using incidence-algebra parameters (assoc. scheme)

} Example: $G = M_{22}$, $p = 2$ ... $\mathcal{S}(3,6,22)$

③ SKETCH: WHY the combinatorics CAN be applied...

[④ ... maybe other examples?]

Background: recent cohomology for SPORADIC groups.

...simple group CLASSIFICATION: – alternating

∃ GOOD theory → – Lie-type / field char. p

¿ ∃ ANY theory? → – one of 26 "sporadic"

...maybe via GEOMETRIES?

Recently, sporadics connected also with "exotic" phenomena in ALG. TOPOLOGY!

...Milgram: M_{12} and compact G_2,
→ a 19-dim class-stable homotopy of spheres...

...Benson: Co_3 with Dwyer-Wilkerson $DI(4)$ ("exotic" loop space)

So there has been methodical study of H^* of increasingly-larger sporadics
C. Thomas & others ...Chern classes ...TEZUKA-YAGITA

Adem-Milgram ...compute MANY, at $p=2$...

Often they focus on particular subgroups, which are exactly stabilizers in geometry.

So: it seems that

group theory → same geometric structures
alg. topology → same geometric structures

starting point:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ A \arrow[dr, dash] & & B \arrow[dl, dash] \\ & H = A \cap B & \end{tikzcd}$$

[...use cosets of A, B to give POINTS, LINES of geometry]

Desired result: $H^*(G) \overset{"}{=} H^*(A) \cap H^*(B)$

that is, images RESTRICTED to H...

Adem-Maginnis-Milgram, J. Alg. 139 (1991) 90-133.

...their Thm 3.1 proves for case $G = M_{12}$, $p = 2$

Smith-Umland (to appear J. Alg.)

...we saw how to EXPLICITLY use combinatorics, to streamline proofs of this type.

① Using point-line geometries.

When would we say LINES for the blocks of a design?

Usually "points, lines" motivated by

1-spaces, 2-spaces of a projective space $\mathbb{P}(V)$
V v.sp./$\mathbb{F}_q$

So rather typical conditions are

Hyp.(pL) (1) 2 points determine (at most) one line
...since 2 1-space define a 2-space...
(2) G_L is 2-transitive on the points of L.
...since usually $G_L \supseteq PSL_2(q)$ ...2-tr on $q+1$...

As noted before, 1.4

abbreviate G_p by A, G_L by B (... $G_{p\in L}$ by H).

__Concl.(pL)__ Then for $b \in B \setminus A$,

the double coset AbA

consists of the single cosets xA, for the points q __collinear__ with p.

[__Later__ we will discuss the operator for AbA in the incidence algebra for perm. G/A]

__Example__ $G = M_{22}$ ("$p=2$")...Steiner system $\mathcal{S}(3,6,22)$

To avoid duplication, say "letters" for the 22 permuted...

The blocks of the Steiner system are certain 6-letter sets..

These will be our __points__, $\underset{A}{G_p} \cong 2^4 A_6$

By __line__ we mean a set of 5 points, all having a particular 2 letters in common

xx ——— ——— ——— ——— ———

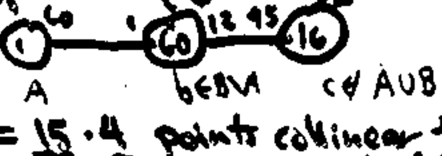
$\underset{B}{G_L} \cong 2^4 S_5$

$G_{pL} \cong 2^4 S_4$

Hyp. pL(1): $\begin{smallmatrix} \times\times \\ \times\times \end{smallmatrix}$ ——— ——— determines unique "sextet" of $\mathcal{S}(5,8,24)$...

Hyp. pL(2): S_5 acts as S_5 on the 5 pts of L ... so 5-trans.

Recall SUBORBIT DIAGRAM



Thus AbA contains the $60 = \underline{15} \cdot 4$ points collinear to p.

#L/p # of other points of L

(2) Using incidence-algebra parameters 1.5

Our goal will be to check cohomological STABILITY,
(...will define LATER)
using the various double cosets AgA.

Our main observations are:

<u>IncAlg</u> (1) It suffices to check a SUBSET which MULTIPLICATIVELY generates the alg.
(2) The needed mult. coefficients can be read from the suborbit diagram (many published!)

<u>Example</u> $G = M_{22}$ again ... work over $\mathbb{Z}_2$

G has rank 3 on cosets of A,
so 3 inc.matrices $\underset{=Id}{U_1}$ $\underset{b \in B \setminus A}{U_{AbA}}$ ...U_b $\underset{c \notin A \cup B}{U_{AcA}}$

From the suborbit diagram, we see

$$U_b \cdot U_b = 60\, U_1 + 47\, U_b + \underline{\underline{45}}\, U_c$$

prime to 2!

$$\text{So } \langle U_b \rangle_{\mathbb{Z}_2\text{-alg}} \supseteq (\underset{=Id}{U_b^0 = U_1}),\ U_b^1,\ \ldots\ U_c$$

so $=$ full inc. alg. over $\mathbb{Z}_2$
... but not for $p = 3, 5$!

[This is "obvious" over $\mathbb{Q}$ ... but group cohomology is all TORSION, so must work mod. various primes!]

③ SKETCH : why does this help cohomology? 1.6

a) MULTIPLICATIVE structure:

First just think of $\begin{smallmatrix} G \\ | \\ H \end{smallmatrix}$. Assume $p \nmid |G:H|$

Then (Cartan-Eilenberg)

- Res^G_H is 1:1
- The image of $H^*(G)$ is the stable part $H^*(H)^{G/H\text{-st}}$

We will not use usual defn of stability...
instead a variant known (not much used?)

K. Brown, Cohom. of Groups, Springer GTM 66 (1982)
Exercise III.10.2

Cline-Parshall-Scott, PubM. IHES 45 (1975), 169-191.
Sec. 6

Now desired conclusion is:

$$H^*(H)^{G/H\text{-st}} \overset{??}{=} \underbrace{H^*(H)^{A/H\text{-st}} \cap H^*(H)^{B/H\text{-st}}}_{\text{Call this intersection } I}$$

$\subseteq$ is clear

$\supseteq$ is NOT ... even if $\langle A, B\rangle = G$!

... because determined
NOT by group mult,
but by mult. of
double cosets HgH.

Now stability can be phrased in terms of "eigenvalues":

Set $M = \mathbb{Z}[G/H]$ perm. module

M_1 = G-fixed points ... RANK 1

$\mathcal{H} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M)$ ... centralizer alg.

(inc. alg. of assoc. scheme).

$\mathcal{H}$ acts on M_1 of rank ... via "character" λ_1
1-dim

$\mathcal{H}$ also acts on $H^*(H)$

and Thm $H^*(H)^{G/H \text{ stab}} = \underbrace{H^*(H)}_{}{}_{\lambda_1}$

i.e., part where $\mathcal{H}$ acts via λ_1

... with those eigenvalues..

Thus for $i \in I$, we want to show

$$T(i) = \lambda_1(T) \cdot i \qquad \forall\, T \in \mathcal{H}$$

Now "standard basis" for $\mathcal{H}$ is given by

$$T_g = T_{HgH} \quad \text{(maps } H \text{ to cosets in } HgH\text{)}$$

So suffices to show $\forall g$ (reps. of double cosets)

$$T_g(i) = \underbrace{\lambda_1(T_g)}_{} \cdot i$$

$\hookrightarrow = |HgH : H|$ = # cosets in HgH ...

By analogy with group stabilizers, define

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{H}}(i) = \{ T \in \mathcal{H} : T(i) = \lambda_1(T) \cdot i \}$$

... want to show, = all of $\mathcal{H}$.

Lemma Stab is subalg of $\mathcal{H}$

Proof A, B act via $\lambda_1 \Rightarrow A \pm B$, AB act via λ_1.

So: SUFFICES to show a mult-gen subset lies in Stab!

b) work with double cosets of A - instead of H? 1.8

$$\begin{array}{c} H^*(A) \\ \text{Res} \downarrow \quad \uparrow \\ H^*(H) \end{array}$$

There is also a co-restriction map
we denote it $\tilde{T}_A$

(it maps $\sum_{a \in A} aH \to A$)

Define similar notation for G/A
... "increase each letter by 1"

$N = \mathbb{Z}[G/A]$

N_1 = invariants

$\mathcal{J} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(N)$ $\quad \left(\begin{array}{l} U_g = U_{AgA} \\ \text{dbl. coset operator} \end{array} \right)$

μ_1 = char. of I on N_1

Easy to show:

<u>Lemma</u> ($i \in I$) If $\tilde{T}_A(i) \in H^*(A)_{\mu_1}$ (i.e. G/A stable)

then $i \in H^*(H)_{\lambda_1}$ ... G/H stable

In particular, $i \in I$ = intersection

is stable under T_a ($a \in A$) ... maps to U_1

and under T_b ($b \in B$)

Can we proceed from $T_b = T_{HbH}$ (for $b \in B \setminus A$)

to $U_b = U_{AbA}$

← i.e. work with <u>this</u>?

It turns out we CAN ... if "$T_A T_b T_A = U_{AbA}$"
$\tau = \sum_{a \in \langle A \rangle} T_a$

Actually we need to phrase this in the language of "intertwining" ...

<u>Lemma</u> Suppose on $\tilde{T}_A(M)$ that

$$U_b[\tilde{T}_A(\cdot)] = \tilde{T}_A[T_A(T_b(-))]$$

Then for $i \in I$, get $U_b \in \mathrm{Stab}_A(\tilde{T}_A(i))$

that is, get $U_b \in \mathrm{Stab}$ "for free"

<u>Cor</u> If then U_b mult. generates J,

then $\tilde{T}_A(i)$ is G/A-stable

... so i is G/H stable ... so I is G/H stable QED

<u>Example</u> This is what we showed for $G = M_{22}$, $p = 2$
... implicit result in Adem–Milgram, Topology 34 (1995), 389-410.

4) other examples

a) original case of AMM (1990)

$G = M_{12}$ $A = 2^{1+4}S_3$ $B = 2^{2+3}S_3$ $p = 2$

Here A-M-M checked all 11 double cosets.
Here U_b does not generate all J ...
... but that ("free") plus checking 3 others does give a subset generating J.

b) (implicit in Milgram-Tezuka?)

$G = M_{12}$ $p=3$ $A, B \cong 3^2 GL_2(3)$

5 double cosets

$\mathcal{U}_b$ generates 4 of 5 (for free)

so only need to check 1 double coset "by hand".

Four-Weight Spin Models and Related Bose-Mesner Algebras

Tayuan Huang* *and* Haitao Guo
Department of Mathematics
Kyushu University
Fukuoka 812, Japan

February 3, 1997

Abstract

As a generalization of symmetric spin models, a four-weight spin model $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$, introduced by Bannai and Bannai, consists of a finite set X and four non-zero complex valued matrices with rows and columns indexed by elements of X which satisfy certain conditions set for polynomial invariants of links, knots in R^3 through their partition functions. This paper is devoted to a general theory of four-weight spin models in connection with Bose-Mesner algebras. We show that $W_4{}^tW_4 = {}^tW_4W_4$, $W_1 \circ {}^tW_1$ are in a symmetric Bose-Mesner algebra in terms of spectral technique together with some combinatorial arguments. Based on this algebra, further algebraic and combinatorial properties of W_1, W_4 are studied by introducing two transformations, *i.e.*, scaling and permutation.

1 Introduction

The concept of *spin models* [14] was introduced by V. F. R. Jones as statistical mechanical models to construct invariants of knots and links in R^3 through their partition functions. It was generalized by Kawagoe, Munemasa and Watatani [15] by removing the condition of symmetry, and then was further generalized to give *four-weight spin models* (or called *generalized generalized spin models*) by Bannai and Bannai [4]

The fact that Bose-Mesner algebras and their association schemes provide a convenient and natural framework for the study of spin models was first pointed out

*This research was done while the first author was visiting Department of Mathematics, Kyushu University under the research project NSC 33091F sponsored by National Science Council, Taiwan.
e-mail:thuang@math.nctu.edu.tw

by Jaeger [10], which was soon generalized by Bannai and Bannai [3] to two-weight spin models in nonsymmetric association schemes. Inspired by the works of [16, 13] and many other previous works, this paper is devoted to a general theory of four-weight spin models in connected with associations schemes. Inspired by the works of [16,13] and many other previous works, this paper is devoted to a general theory of four-weight spin models in connected with associations schemes. Indeed, a four-weight spin model $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$ contains a pair of type II matrices which are related by some conditions, call *star-triangle condition*, set for polynomial invariants of links, knots in R^3 through their partition functions. A *type II matrix* is a square matrix with non-zero complex entries such that the entries quotient of any two distinct rows sum to zero, its algebraic structure has been studied by Jaeger, Matsumoto and Nomura in [13].

Basic definitions regarding four-weight spin models, Bose-Mesner algebras, association schemes and Terwilliger algebras are given in Section 2. Some straightforward consequences derived from star-triangle conditions and their equivalent froms are collected in Section 3. The algebraic nature of W_1 and the combinatorial nature of W_4 were initiated in Theorems 3.5 and 3.7 respectively. We then show in Section 4 that $W_4{}^tW_4 = {}^tW_4W_4$, $W_1 \circ {}^tW_1$ are in a symmetric Bose-Mesner algebra (say of dimension $d+1$) of symmetric matrices in terms of spectral technique together with some combinatorial arguments. This allows a significant simplication in the study of those defining conditions based on $d+1$ variables rather than on n^2, $n = |X|$, variables. Based on this algebra, further algebraic, combinatorial properties of W_1, W_4 are studied in Section 5 by introducing the operations of *scaling* and *permutations.* In particular, we show in Theorem 5.4 that $W_1 \circ W_1$ lies in the subconstituent algebra of the Bose-Mesner algebra mentioned above.

2 Preliminaries

The notions of four-weight spin models and the algebraic structures supporting them, *e.g.*, Bose-Mesner algebras, subconstituent (or called Terwilliger) algebra, will be recalled in this section. Most of the terminology and notations used in this paper follow from that of [4, 13].

Definition 2.1 *Let X be a finite set of n points, and let w_i (i=1,2,3,4) be non-zero complex valued functions on $X \times X$. Then $(X; w_1, w_2, w_3, w_4)$ is a four-weight spin model of size n and of loop variable D ($D^2 = n$) if the following conditions are satisfied for any α, β and $\gamma \in X$:*

(1) $w_1(\alpha,\beta)w_3(\beta,\alpha) = w_2(\alpha,\beta)w_4(\beta,\alpha) = 1$,

(2) $\sum_{x\in X} w_1(\alpha,x)w_3(x,\beta) = \sum_{x\in X} w_2(\alpha,x)w_4(x,\beta) = n\delta_{\alpha\beta}$,

(3) a. $\sum_{x\in X} w_1(\alpha,x)w_1(x,\beta)w_4(\gamma,x) = Dw_1(\alpha,\beta)w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)$,
b. $\sum_{x\in X} w_1(x,\alpha)w_1(\beta,x)w_4(x,\gamma) = Dw_1(\beta,\alpha)w_4(\alpha,\gamma)w_4(\beta,\gamma)$.

The conditions (3a) and (3b) are called *star-triangle condition* in the literature. These four functions $w_i, 1 \le i \le 4$, can also be conveniently expressed as matrices $W_i, 1 \le i \le 4$, with $W_i = [w_i(\alpha,\beta)]_{\alpha,\beta\in X}$.

Let $\mathcal{M}_X$ be the family of all square matrices over complex numbers whose rows and columns are indexed by elements of X. Assume $A \cdot B$ (or AB when there is no confusion) is the ordinary product, and $A \circ B$ is the Hadamard product of $A, B \in \mathcal{M}_X$. I is the identity matrix and J is the all-one matrix; furthermore, let $Y^{ij}_{\alpha\beta}$ be an n dimensional column vector whose x-entry is given by

$$Y^{ij}_{\alpha\beta}(x) = w_i(\alpha, x) w_j(x, \beta)$$

for $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ and $\alpha, \beta \in X$, the above conditions in Definition 2.1 can be conveniently expressed in terms of matrices as following.

Lemma 2.2 [4, Proposition 5] *For a four weight spin mode* $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$,

(1) ${}^tW_1 \circ W_3 = {}^tW_2 \circ W_4 = J$,

(2) $W_1 W_3 = W_2 W_4 = nI$,

(3) a. $W_1 Y^{41}_{\gamma\beta} = Dw_4(\gamma, \beta) Y^{41}_{\gamma\beta}$,

b. ${}^tW_1 Y^{14}_{\beta\gamma} = Dw_4(\beta, \gamma) Y^{14}_{\beta\gamma}$ for all $\gamma, \beta \in X$,

Bannai and Bannai showed in [4] that star-triangle conditions $(3a)$ and $(3b)$ are equivalent to $\mathrm{III}_1 \sim \mathrm{III}_8$, and to $\mathrm{III}_9 \sim \mathrm{III}_{16}$ respectively, which are given below in the form of matrices. The motivation and background for these conditions can be found in [4] and the references there.

Lemma 2.3 [4, Theorem 1] *For a four-weight spin model* $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$, *the star triangle conditions (3a), (3b) are* III_1, III_{14} *respectively. Moreover, the conditions* III_1 *to* III_8 *are equivalent to each other, as well as* III_9 *to* III_{16}:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{III}_1: & W_1 Y^{41}_{\alpha\beta} = Dw_4(\alpha,\beta) Y^{41}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_9: & W_1 Y^{23}_{\alpha\beta} = Dw_4(\beta,\alpha) Y^{23}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_2: & W_4 Y^{13}_{\alpha\beta} = Dw_1(\alpha,\beta) Y^{24}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{10}: & {}^tW_3 Y^{14}_{\alpha\beta} = Dw_2(\beta,\alpha) Y^{14}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_3: & {}^tW_3 Y^{32}_{\alpha\beta} = Dw_2(\alpha,\beta) Y^{32}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{11}: & W_4 Y^{42}_{\alpha\beta} = Dw_1(\beta,\alpha) Y^{31}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_4: & {}^tW_2 Y^{13}_{\alpha\beta} = Dw_3(\alpha,\beta) Y^{24}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{12}: & {}^tW_2 Y^{42}_{\alpha\beta} = Dw_3(\beta,\alpha) Y^{31}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_5: & W_3 Y^{41}_{\alpha\beta} = Dw_2(\beta,\alpha) Y^{41}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{13}: & W_3 Y^{23}_{\alpha\beta} = Dw_2(\alpha,\beta) Y^{23}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_6: & W_2 Y^{24}_{\alpha\beta} = Dw_3(\beta,\alpha) Y^{13}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{14}: & {}^tW_1 Y^{14}_{\alpha\beta} = Dw_4(\alpha,\beta) Y^{14}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_7: & {}^tW_1 Y^{32}_{\alpha\beta} = Dw_4(\beta,\alpha) Y^{32}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{15}: & W_2 Y^{31}_{\alpha\beta} = Dw_3(\alpha,\beta) Y^{42}_{\alpha\beta}, \\
\mathrm{III}_8: & {}^tW_4 Y^{24}_{\alpha\beta} = Dw_1(\alpha,\beta) Y^{13}_{\alpha\beta}, & \mathrm{III}_{16}: & {}^tW_4 Y^{31}_{\alpha\beta} = Dw_1(\alpha,\beta) Y^{42}_{\alpha\beta}.
\end{array}$$

Lemma 2.4 [4, Proposition 4] *For a four-weight spin model* $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$, *there is a constant a, called module, such that*

(1) $W_2 J = {}^tW_2 J = Da^{-1} J$, $W_3 \circ I = a^{-1} I$,

(2) $W_4 J = {}^tW_4 J = DaJ$, $W_1 \circ I = aI$.

Among those 16 conditions, conditions III_1, III_3, III_5, III_7, III_9, III_{10}, III_{13} and III_{14} posed conditions on eigenvalues of W_1, W_3 and their transposes, which in turn provide the entries of W_2, W_4 respectively.

Lemma 2.5 *For a four-weight spin model $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$,*

(1) *$Dw_4(\alpha,\beta)$, $Dw_2(\beta,\alpha)$ (respectively $Dw_4(\beta,\alpha)$, $Dw_2(\alpha,\beta)$) are eigenvalues of W_1, W_3 with the same eigenvector $Y^{41}_{\alpha\beta}$ (respectively $Y^{23}_{\alpha\beta}$).*

(2) *$Dw_4(\alpha,\beta)$, $Dw_2(\beta,\alpha)$ (respectively $Dw_4(\beta,\alpha)$, $Dw_2(\alpha,\beta)$) are eigenvalues of ${}^tW_1, {}^tW_3$ with the same eigenvector $Y^{14}_{\alpha\beta}$ (respectively $Y^{32}_{\alpha\beta}$).*

Let *Spectrum(W_1)* denote the multiset of all eigenvalues of W_1. We shall prove in Theorem 3.5 that $D^{-1}Spectrum(W_1)$ forms rows and columns of W_4. In addition to their eigenvalues, the rest post further constraints on the entries of W_4, W_2 by introducing a Bose-Mesner algrbra containing $W_4^t W_4 = {}^tW_4 W_4$ and $W_2^t W_2 = {}^tW_2 W_2$. Some examples show that diagonal entries of W_4 need not be identical, this shows that W_1, W_2, W_3, W_4 may not be in general contained in any Bose-Mesner algebra. Hence there exists limitation when relating arbitrary four-weight spin models to Bose-Mesner algebras of association schemes.

3 Some immediate consequences

¿From now on, we assume that $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$ is a four-weight spin model of size n and of loop varialbe D $(= n^2)$ unless otherwise stated. Some facts about the vectors $Y^{ij}_{\alpha\beta}$, $i,j = 1,2,3$ and 4, and $\alpha, \beta \in X$, together with some relations over products among W_1, W_2, W_3, W_4 will be derived in this section simply by applying the star triangle conditions together with those equivalent forms given in Lemmas 3.1 - 3.4. All these facts will be used in the following sections to derive Bose-Mesner algebras which pose some constraints over W_1, W_2, W_3, W_4. In particular, Theorems 3.5 and 3.7 show the algebraic and combinatorial natures of W_1, W_4 respectively.

For column vectors $\mathbf{u}=(u_i)_{i\in X}$,$\mathbf{v}=(v_i)_{i\in X}$ with complex entries, the inner product $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$ is defined to be $\sum_{i\in X} u_i v_i$. The following lemma shows that $\langle Y^{13}_{\alpha\beta}, Y^{13}_{\gamma\delta}\rangle \neq 0$ if and only if $\langle Y^{24}_{\alpha\beta}, Y^{24}_{\gamma\delta}\rangle \neq 0$, $\langle Y^{42}_{\alpha\beta}, Y^{42}_{\gamma\delta}\rangle \neq 0$ if and only if $\langle Y^{31}_{\alpha\beta}, Y^{31}_{\gamma\delta}\rangle \neq 0$, which will be used in determining the structure of related Bose-Mesner algebras in terms of certain graphs, see Lemma 4.3.

Lemma 3.1 *For $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta) \in X \times X$,*

(1) $\langle Y^{13}_{\alpha\beta}, Y^{13}_{\gamma\delta}\rangle = w_3(\alpha,\beta) w_1(\gamma,\delta) \langle Y^{24}_{\alpha\beta}, Y^{24}_{\gamma\delta}\rangle$, and

(2) $\langle Y^{42}_{\alpha\beta}, Y^{42}_{\gamma\delta}\rangle = w_3(\beta,\alpha) w_1(\delta,\gamma) \langle Y^{31}_{\alpha\beta}, Y^{31}_{\gamma\delta}\rangle$.

In addition to those conditions in Definition 2.1 posed over ${}^tW_1 \circ W_3$, ${}^tW_2 \circ W_4$, $W_1W_3 = W_3W_1$ and $W_2W_4 = W_4W_2$, some more relationship over similar products ${}^tW_1 \circ W_1$, ${}^tW_3 \circ W_3$, ${}^tW_2W_2$, $W_2{}^tW_2$, ${}^tW_4W_4$, $W_4{}^tW_4$ are given in the next lemma for later reference, in particular in Corollary 4.6.

Lemma 3.2

(1) ${}^tW_4W_4 = W_4\, {}^tW_4 = a{}^tW_3 \circ (W_1W_1)$,
${}^tW_2W_2 = W_2\, {}^tW_2 = \frac{1}{a}\, {}^tW_1 \circ (W_3W_3)$;

(2) ${}^tW_1 \circ W_1 = \frac{a}{D}W_2(W_4 \circ W_4) = \frac{a}{D}(W_4 \circ W_4)W_2$,
${}^tW_3 \circ W_3 = \frac{1}{Da}(W_2 \circ W_2)W_4 = \frac{1}{Da}W_4(W_2 \circ W_2)$;

(3)
$$\begin{aligned} D/aW_2 \circ W_2 &= W_2(W_3 \circ {}^tW_3) = (W_3 \circ {}^tW_3)W_2, \\ &= \tfrac{1}{Da}W_4(W_2 \circ W_2)W_2 = \tfrac{1}{Da}W_2(W_2 \circ W_2)W_4; \\ DaW_4 \circ W_4 &= W_4(W_1 \circ {}^tW_1) = (W_1 \circ {}^tW_1)W_4, \\ &= \tfrac{a}{D}W_2(W_4 \circ W_4)W_4 = \tfrac{a}{D}W_4(W_4 \circ W_4)W_2. \end{aligned}$$

Lemma 3.3 *$\{Y^{ij}_{\alpha\beta} \mid \beta \in X\}$ is a set of linear independent vectors with respect to a fixed $\alpha \in X$, and $i, j = 1, 2, 3, 4$.*

Let $C_r(W_i)$, $R_s(W_j)$ be the r-th column of W_i and the s-th row of W_j respectively. For a column vector Y, let $\Delta(Y)$ be the diagonal matrix with entries of Y along its main diagonal. The following lemma follows easily.

Lemma 3.4

(1) $(\Delta(C_r(W_3))W_2)^{-1} \cdot D^{-1}W_1 \cdot (\Delta(C_r(W_3))W_2) = \Delta(C_r(W_4))$,

(2) $(W_1\Delta(R_r(W_4))) \cdot D^{-1}W_3 \cdot (W_1\Delta(R_r(W_4)))^{-1} = \Delta(C_r(W_2))$.

Theorem 3.5 *Each column (respectively, each row) of W_4 is a permutation of the multiset D^{-1}Spectrum(W_1).*

The above theorem sheds some light on the combinatorial nature of W_4. As for W_1, we shall show that W_1 can be decomposed into product of diagonal matrices with some other matrices with specific properties which in turn shed some light on the algebraic nature of W_1.

Lemma 3.6 *For each $x \in X$,*

(1) $Y^{11}_{\alpha\beta}(x) = D^{-1}w_1(\alpha,\beta)\sum_r \dfrac{w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)}{w_4(\gamma,x)}$, and

(2) $w_1(\alpha,\beta) = \frac{w_1(\alpha,x)}{w_1(\beta,x)} \frac{a\sum_r w_4(\gamma,\beta)^2/w_4(\gamma,x)}{\sum_r w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)/w_4(\gamma,x)}$.

Based on this lemma, we shall show that W_1 can be decomposed in two ways. With respect to a fixed point x in X, we consider the matrix $H_x = [H_x(\alpha,\beta)]_{\alpha,\beta\in X}$, where

$$H_x(\alpha,\beta) = \frac{a\sum_{r\in X} w_4(\gamma,\beta)^2/w_4(\gamma,x)}{\sum_{r\in X} w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)/w_4(\gamma,x)}.$$

Note that the above expression of $H_x(\alpha,\beta)$, appear in Lemma 3.6(2), involves entries of W_4 only. Let H, $H(\alpha,\beta)$ denote H_x and $H_x(\alpha,\beta)$ respectively when there is no confusion. Clearly, $H(\alpha,\alpha) = H(\alpha,x) = a$ for each $\alpha \in X$, and $W_1 = \Delta H \Delta^{-1}$ by Lemma 3.6(2) where Δ is the diagonal matrix $diag(w_1(\alpha,x))_{\alpha\in X}$. The decomposition $W_1 = \Delta H \Delta^{-1}$ can be further decomposed as follows: Let c_α be a complex number such that

$$c_\alpha^2 = \frac{a}{D}\sum_{\gamma\in X}\frac{w_4(\gamma,\alpha)^2}{w_4(\gamma,x)}$$

and let $b_\alpha = w_1(\alpha,x)/c_\alpha$ for each $\alpha \in X$. Furthermore, let $B = diag(b_\alpha)_{\alpha\in X}$, and $C = diag(c_\alpha)_{\alpha\in X}$. Then $\Delta = BC$ and $W_1 = B(CHC^{-1})B^{-1}$. Let $S = CHC^{-1}$, both $H = \Delta^{-1}W_1\Delta$ and $S = B^{-1}W_1B$ will be called scalings of W_1 respectively later in Section 5. It is interesting to note that

$$S(\alpha,\beta) = \frac{c_\alpha}{c_\beta}H(\alpha,\beta) = \frac{D}{a}\frac{c_\alpha c_\beta}{\sum_{\gamma\in X}\frac{w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)}{w_4(\gamma,x)}}$$

for each $\alpha,\beta \in X$, and hence S is symmetric. The above observations are summarized in the following theorem.

Theorem 3.7 *With respect to a fixed point x in X, let $H = [H(\alpha,\beta)]_{\alpha,\beta\in X}$ be the matrix with*

$$H(\alpha,\beta) = \frac{a\sum_{r\in X} w_4(\gamma,\beta)^2/w_4(\gamma,x)}{\sum_{r\in X} w_4(\gamma,\alpha)w_4(\gamma,\beta)/w_4(\gamma,x)}.$$

Moreover, let $\Delta = diag(w_1(\alpha,x))_{\alpha\in X}$, $B = diag(b_\alpha)_{\alpha\in X}$ and $C = diag(c_\alpha)_{\alpha\in X}$ where $b_\alpha = w_1(\alpha,x)/c_\alpha$ and c_α a complex number such that $c_\alpha^2 = \frac{a}{D}\sum_{\gamma\in X}\frac{w_4(\gamma,\alpha)^2}{w_4(\gamma,x)}$. Then $S = CHC^{-1}$, and $W_1 = \Delta H\Delta^{-1} = BSB^{-1}$.

These two decompositions of W_1 given in Theorem 3.7 will be further studied in Section 5, in terms of a symmetric Bose-Mesner algebra derived in the next section, which leads to some algebraic constraints over W_1.

4 Related Bose-Mesner algebras

Inspired by the works of Bannai and Bannai [3] and by the technique introduced by Nomura in [16, 13], we will show that ${}^tW_4W_4 = W_4{}^tW_4$ and $W_1 \circ {}^tW_1$ are in a symmetric Bose-Mesner algebra in terms of the eigenvalues and corresponding eigenvectors of $W_2{}^tW_2 = {}^tW_2W_2$, $W_4{}^tW_4 = {}^tW_4W_4$ derived from star-triangle conditions and their equivalent forms. This certainly poses restrictions over W_1 and W_4, in particular on the distributions of the multiset $D^{-1}Spectrum(W_1)$ over rows and columns of W_4 as stated in Theorem 3.5.

As shown in [16, 13], some Bose-Mesner algebras can be associated with the type II matrices W_1 and W_4. For $(i,j) = (1,3), (3,1), (2,4)$ and $(4,2)$, let

$$\mathcal{N}_{ij} \;=\; \{A \mid A \in M_X(C) \text{ with } Y^{ij}_{\alpha\beta} \text{ as eigenvectors for all } \alpha, \beta \in X\}.$$

Indeed, they are $\mathcal{N}_{31} = \mathcal{N}(W_1)$, $\mathcal{N}_{13} = \mathcal{N}'(W_1)$, $\mathcal{N}_{24} = \mathcal{N}(W_4)$, $\mathcal{N}_{42} = \mathcal{N}'(W_4)$ as given in [13, Theorem 1], and hence they are commutative Bose-Mesner algebras.

Proposition 4.1 *$\mathcal{N}_{13} = \mathcal{N}_{31}$, $\mathcal{N}_{42}$, $\mathcal{N}_{24}$ are Bose-Mesner algebras.*

Furthermore, let

$$S\mathcal{N}_{ij} = \{A \mid A \in \mathcal{N}_{ij} \text{ is symetric}\},$$

for $(i,j) =$ (3,1), (1,3), (2,4) and (4,2). Indeed, $S\mathcal{N}_{ij}$ is the *symmetrization* of the Bose-Mesner algebra $\mathcal{N}_{ij}$. Let $\{A_0\ (= I), A_1, \cdots, A_d\}$ be a base of Hadamard idempotents of $\mathcal{N}_{ij}$, clearly, $S\mathcal{N}_{ij}$ is a symmetric Bose-Mesner algebra with Hadamard idempotents A_i for all i with ${}^tA_i = A_i$, and $A_i + {}^tA_i$ with $A_i \neq {}^tA_i$.

The associate classes of those Bose Mesner algebras $S\mathcal{N}_{ij}, \mathcal{N}_{ij}$ can be described in terms of the following two graphs. Following [13, 14], let G_{ij}, for $(i,j) =$ (1,3), (3,1), (2,4) and (4,2), be the graph defined on $X \times X$ such that $(\alpha,\beta), (\gamma,\delta) \in X \times X$ being adjacent if and only if the usual scalar product $\langle Y^{ij}_{\alpha\beta}, Y^{ij}_{\gamma\delta}\rangle$ is nonzero. Furthermore, let G^2_{ij} denote the distance two graph associated with G_{ij}; *i.e.*, G^2_{ij} is defined on $X \times X$ such that $(\alpha,\beta), (\gamma,\sigma) \in X \times X$ being adjacent if and only if their common neighborhood in G_{ij} is non-empty. The following lemma follows immediately from the remarks after Lemma 3.1.

Lemma 4.2 *The graphs G_{24} and G_{13} are identical; as well as G_{42} and G_{31}.*

The following lemma follows from Lemma 3.1 and Theorem 5 in [13, p12].

Lemma 4.3 [13, p12] *For $(i,j) = (1,3), (3,1), (2,4)$ and $(4,2)$,*

(a) the associate classes of the symmetric association scheme corresponding to the Bose-Mesner algebra $S\mathcal{N}_{ij}$ are identical with the connected components of G_{ij}.

(b) the associate classes of $\mathcal{N}_{ij}$ the association scheme corresponding to the Bose-Mesner algebra are identical with the connected components of G^2_{ij}.

Furthermore, components of G_{ij} are identical with those of G^2_{ij} if W_1 is symmetric.

Theorem 4.4 *The symmetric Bose-Mesner algebras $S\mathcal{N}_{42}, S\mathcal{N}_{31}, S\mathcal{N}_{13}$ and $S\mathcal{N}_{24}$ are identical, denoted by $\mathcal{U}$, which contains ${}^tW_4W_4 = W_4{}^tW_4$, ${}^tW_2W_2 = W_2{}^tW_2$, $W_1 \circ {}^tW_1$ and $W_3 \circ {}^tW_3$.*

Since type II matrices W_1 and W_4 are interacted further by additional star triangle conditions, the Bose-Mesner algebras $\mathcal{U}$ as defined in Theorem 4.4, and $\mathcal{N}_{ij}$

for $(i,j) = (1,3)$, $(3,1)$, $(4,2)$, $(2,4)$ can be made more precisely. For every A in $\mathcal{N}_{ij}$, let $\psi_{ij}(A)(\beta,\gamma)$ be the eigenvalue of A with eigenvectors $Y^{ij}_{\beta\gamma}$, *i.e.*,

$$AY^{ij}_{\beta\gamma} = \psi_{ij}(A)(\beta,\gamma)Y^{ij}_{\beta\gamma},$$

and let $\psi_{ij}(A)$ be the matirx $[\psi_{ij}(A)(\beta,\gamma)]_{\beta,\gamma\in X}$ with all these eigenvalues as entries. The following lemma gives explicit expressions for ψ_{ij}, $(i,j) = (1,3)$, $(3,1)$, $(4,2)$ and $(2,4)$, in terms of W_1, W_2, W_3 and W_4.

Lemma 4.5

(1) $\psi_{24}(A) = \frac{1}{aD}{}^tW_4({}^tW_2 \circ (AW_4))$
$= \frac{a}{D}({}^tW_4 \circ (W_2{}^tA)){}^tW_2$
$= \frac{a}{D}W_2(W_4 \circ ({}^tA{}^tW_2))$ for each $A \in \mathcal{N}_{24}$;

(2) $\psi_{31}(A) = \frac{1}{a}{}^tW_1 \circ (W_3({}^tA \circ W_1))$
$= a{}^tW_3 \circ ((A \circ W_3)W_1)$ for each $A \in \mathcal{N}_{31}$;

Corollary 4.6 can be proved by substituting $W_4{}^tW_4 = {}^tW_4W_4$, $W_2{}^tW_2 = {}^tW_2W_2$, $W_1 \circ {}^tW_1$, $W_3 \circ {}^tW_3$, I and J into the expressions given in Lemma 4.5 and following by some simplification in terms of Lemma 3.2.

Corollary 4.6 *For (i,j) = (1,3), (3,1), (4,2), and (2,4), $\psi_{ij}(W_4{}^tW_4) = nW_1\circ{}^tW_1$, $\psi_{ij}(W_2{}^tW_2) = nW_3\circ{}^tW_3$, $\psi_{ij}(W_1\circ{}^tW_1) = W_4{}^tW_4$, $\psi_{ij}(W_3\circ{}^tW_3) = W_2{}^tW_2$, $\psi_{ij}(I) = J$, and $\psi_{ij}(J) = nI$.*

Clearly, $\psi_{ij} : \mathcal{N}_{ij} \mapsto \mathcal{M}_X$ is a linear operator for (i,j) =(1,3), (3,1), (4,2) and (2,4). We further let Ψ_{24}: $\mathcal{N}_{24} \mapsto \mathcal{M}_X$ by $\Psi_{24}(A) = {}^t(\psi_{24}(A))$, which is also a linear map. Let τ_{ij} be the restriction of the transposition map on $\mathcal{N}_{ij}$.

Theorem 4.7 *Both ψ_{42}: $\mathcal{N}_{24} \longmapsto \mathcal{N}_{24}$, and $\Psi_{24} = {}^t\psi_{24}$: $\mathcal{N}_{42} \longmapsto \mathcal{N}_{42}$ are dualities respectively such that $\psi_{42}(\mathcal{N}_{42}) = \mathcal{N}_{24}$, $\Psi_{24}(\mathcal{N}_{24}) = \mathcal{N}_{42}$, $\psi_{42}\Psi_{24} = n\tau_{24}$, and $\Psi_{24}\psi_{42} = n\tau_{42}$, Hence $(\mathcal{N}_{42},\mathcal{N}_{24})$ is a dual pair of Bose-Mesner algebras.*

Replacing $(Y^{24}, Y^{42}, \mathcal{N}_{24}, \mathcal{N}_{42}, \Psi_{24}, \psi_{42})$ by $(Y^{31}, Y^{13}, \mathcal{N}_{31}, \mathcal{N}_{13}, \Psi_{31}, \psi_{13})$ in the proof of Theorem 4.7, where $\Psi_{31}(A) = {}^t(\psi_{31}(A))$ for $A \in \mathcal{N}_{31}$, similar results hold for W_1 and W_3.

Theorem 4.8 *$\mathcal{N}_{31} = \mathcal{N}_{13}$ is a self-dual Bose-Mesner algebra, and so is $\mathcal{SN}_{31} = \mathcal{SN}_{13}$.*

Though ${}^tW_4W_4 = W_4{}^tW_4$, ${}^tW_2W_2 = W_2{}^tW_2$, $W_1 \circ {}^tW_1$, $W_3 \circ {}^tW_3$ are in the single symmetric Bose-Mesner algebra $\mathcal{U}$ as given in Theorem 4.4, it is interesting to indicate that W_1 and W_4 need not be necessarily contained in any Bose-Mesner algebra. However, it was known [13, Proposition 9] that $W_1 \in \mathcal{N}_{31}$ (respectively $W_4 \in \mathcal{N}_{24}$) if and only if (W_1, W_3) (respectively (W_4, W_2)) is a two-weight spin model of Jones type.

5 Further properties of W_1 and W_4

Following Theorems 3.5 and 3.7 on some algebraic and combinatorial natures of W_1, W_4 respectively and Theorem 4.4 on a symmetric Bose-Mesner algebra $\mathcal{U}$ containing $W_4{}^tW_4 = {}^tW_4W_4$, $W_1 \circ {}^tW_1$, we will further study W_1, W_4 in this section in terms of the transformations of scaling and permutations respectively.

Suppose $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$ is a four-weight spin model. Consider the following transformations on W_1 and W_4 respectively:

(1) $W_1 \longrightarrow \widetilde{W}_1 = \Delta^{-1}W_1\Delta$, where Δ is a diagonal matrix, and

(2) $W_4 \longrightarrow \widetilde{W}_4 = PW_4Q$, where P and Q are permutation matrices.

Note that $\widetilde{W}_1 = H$ in Theorem 3.7 if $\Delta = diag(w_1(\alpha, x))_{\alpha \in X}$ with respect to a fixed $x \in X$. As in [13], we call $\Delta^{-1}W_1\Delta$ is obtained from W_1 by *scaling*, and PW_4Q is obtained from W_4 by *permutation*. The notions of scaling and permutation mentioned here were identical with those given by Jaeger *et. al.* in [13], which include the gauges transformations of types I and II introduced by Deguchi [7] as a special case. Since W_1, W_4 are type II matrices, clearly $\widetilde{W}_1 = \Delta^{-1}W_1\Delta$ and $\widetilde{W}_4 = PW_4Q$ are also type II matrices. Let $\widetilde{W}_i = [\tilde{w}_i(\alpha, \beta)]_{\alpha,\beta \in X}$ for $i = 1, 2, 3$ and 4, where $\widetilde{W}_2$, $\widetilde{W}_3$ are defined by $\widetilde{W}_3 \circ {}^t\widetilde{W}_1 = \widetilde{W}_2 \circ {}^t\widetilde{W}_4 = J$. With respect to $(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2, \widetilde{W}_3, \widetilde{W}_4)$, $\widetilde{Y}^{ij}_{\alpha\beta}$ is defined to be the column vector indexed by X with $\widetilde{Y}^{ij}_{\alpha\beta}(x) = \tilde{w}_i(\alpha, x)\tilde{w}_j(x, \beta)$ as its x-entry, and as before, $\mathcal{N}_{ij} = \{A \mid A \in \mathcal{M}_X(C)$ with all $Y^{ij}_{\alpha\beta}$ as eigenvectors $\}$ for (i,j)=(1,3), (3,1), (4,2) and (2,4), then $\widetilde{\mathcal{N}}_{31} = \mathcal{N}_{31}$ and $\widetilde{\mathcal{N}}_{31} = \mathcal{N}_{13}$ can be proved by a technique similar to that used in Proposition 4.1.

Lemma 5.1 [13, Propositions 2 and 3] *Both $\widetilde{W}_1$ and $\widetilde{W}_4$ are type* II *matrices. Furthermore, $\widetilde{\mathcal{N}}_{31} = \mathcal{N}_{31}$, $\widetilde{\mathcal{N}}_{13} = \mathcal{N}_{13}$, and $\widetilde{\mathcal{N}}_{24}$, $\widetilde{\mathcal{N}}_{42}$ are combinatorially isomorphic to $\mathcal{N}_{24}$, $\mathcal{N}_{42}$ respectively.*

Theorem 5.2 *If $(X; W_1, W_2, W_3, W_4)$ is a four-weight spin model, then $(X; \widetilde{W}_1, W_2, \widetilde{W}_3, W_4)$ is also a four-wieght spin model with identical Bose-Mesner algebras.*

From now on, we assume $\widetilde{W}_1 = \Delta^{-1}W_1\Delta$ where $\Delta = diag(w_1(\alpha, x))_{\alpha \in X}$ with respect to a fix $x \in X$, *i.e*, $\widetilde{W}_1 = H$ given in Theorem 3.7. Let $(X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ be the symmetric association scheme corresponding to the symmetric Bose-Mesner algebra $\mathcal{U}$ $(= \mathcal{SN}_{13} = \mathcal{SN}_{31} = \mathcal{SN}_{42} = \mathcal{SN}_{24})$ given in Theorem 4.4. Moreover, let A_i be the adjacency matrices of its i-th relation R_i, $0 \le i \le d$, and let $R_i(x) = \{y \mid y \in X \text{ and } (x, y) \in R_i\}$. Since $W_1 \circ {}^tW_1 \in \mathcal{U}$, let

$$W_1 \circ {}^tW_1 = \sum_{i=0}^{d} \eta_i A_i$$

for some complex numbers η_i, $0 \le i \le d$. In order to provide a suitable framework to describe $\widetilde{W}_1$ in terms of the partition $\{R_i(x) \times R_j(x) \mid 0 \le i, j \le d\}$ of $X \times X$, the Bose-Mesner algebra $\mathcal{U}$ will be enlarged to its subconstituent algebra $\mathrm{T}(\mathcal{U})$.

Lemma 5.3 *Let $\widetilde{W}_1$ be as given above with respect to a fixed $x \in X$,*

(1) $\widetilde{W}_1 \circ {}^t\widetilde{W}_1 = W_1 \circ {}^tW_1 \in \mathcal{U}$,

(2) $\tilde{w}_1(\alpha,\beta) \;/\; \tilde{w}_1(\beta,\alpha) = \tilde{w}_1(x,\beta) \;/\; \tilde{w}_1(x,\alpha)$, and

(3) $\tilde{w}_1(\alpha,x) = \tilde{w}_1(\alpha,\alpha) = a$ *for all* $\alpha \in X$, *and* $\tilde{w}_1(x,\alpha) = \eta_i/a$ *if* $(x,\alpha) \in R_i$.

Theorem 5.4 $\widetilde{W}_1 \circ \widetilde{W}_1 = \sum_{0\le i,j,k\le d} \frac{\eta_k\eta_i}{\eta_i} E_i^* A_k E_j^*$ *lies in the subconstituent algebra $T(\mathcal{U})$ of $\mathcal{U}$.*

The previous theorem shows that $\widetilde{W}_1 \circ \widetilde{W}_1$ is uniquely determined by the coefficients $\{\eta_i \mid 0 \le i \le d\}$ in $W_1 \circ {}^tW_1 = \sum_{i=0}^{d} \eta_i A_i$ together with the partition $\{(R_i(x) \times R_j(x)) \cap R_k \mid 0 \le i,j,k \le d\}$ of $X \times X$, and consequently the entries of W_1 are uniquely determined up to parities.

If $(\alpha,\beta) \in R_i$, $(\beta,\gamma) \in R_j$, $(\gamma,\alpha) \in R_k$. Let $F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{w_1(\alpha,\beta)w_1(\beta,\gamma)}{w_1(\alpha,\gamma)}$ then $F(\alpha,\beta,\gamma)^2 = \frac{\eta_i\eta_j}{\eta_k}$, note that the values of the function $F(\alpha,\beta,\gamma)$, independent of α,β,γ, depends on the relationship among α,β,γ only.

Acknowledgments: Both authors would like to thank Professor Eiichi Bannai for his continuing support and for several stimulating conversations during this research.

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I, Association schemes*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.

[2] E. Bannai, *Algebraic Combinatorics - recent topics on association schemes*, Sugaku 45 (1993) 55-75 (in Japanese). English translation in Sugaku Expositions, 7, no. 2 (1994) 181-207.

[3] E. Bannai and E. Bannai, *Generalized spin models and association schemes*, Mem. Fac. Science Kyushu Univ. A, 47, no.2 (1993), 397-409.

[4] E. Bannai and E. Bannai, *Generalized generalized spin models (four-weight spin models)*, Pacific J. of Math. 170 (1995) 1-16.

[5] E. Bannai, E. Bannai, and F. Jaeger, *On spin models, modular invariance, and duality*, J. of Algebraic Combinatorics, to appear.

[6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[7] T. Deguchi, *Generalized generalized spin models associated with exactly solvable models*, to appear in "Progress in Algebraic Combinatorics", ed., E. Bannai and A. Munemasa, 1996.

[8] H. T. Guo, *Classification of spin models up to 10 vertices*, Kyushu Journal of Mathematics, to appear.

[9] D. G. Higman, *Coherent algebras*, Linear Algebra Appl. 93(1987), 209-239.

[10] F. Jaeger, *Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial*, Geom. Dedicata, 44 (1992), 23-52.

[11] F. Jaeger, *Spin models for link invariants*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 218, (1995) 71-101. ed., P. Rowlinson.

[12] F. Jaeger, *On spin models, triply regular association schemes, and duality*, J. of Algebraic Combinatorics 4(1995), 103-144.

[13] F. Jaeger, M. Matsumoto and K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related with type II matrices and spin models*, RIMS-1057 Kyoto University, December 1995.

[14] V. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, Pacific J. Math, 137(1989), 311-334.

[15] K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, *Generalized spin models*, J. of Knot Theory and its Ramifications 3(1994), 465-475.

[16] K. Nomura, *An algebra associated with a spin model*, J. of Algebraic Combinatorics, to appear.

[17] K. Nomura, *Twisted extensions of spin models*, J. Algebraic Combinatorics 4 (1995) 173-182.

[18] P. Terwilliger, *The Subconstituent Algebra of an association scheme*, I, II, III, J. Algebraic Combinatorics 1(1992), 363-388; 2(1993), 73-103, 177-210.

[19] M. Yamada, *Hadamard matrices and spin models*, J. of Stat. Planning and Inference, 51(1996) 309-321.

[20] M. Yamada, *The construction of four-weight Spin models by using Hadamard matrices and M-structures*, Australasian J. of Combinatorics, 10(1994), 237-244.

ON THE MOLIEN SERIES OF $4 * 2_+^{1+8}.Sp(8,2)$

Manabu Oura

Graduate School of Mathematics
Kyushu University

1. Introduction.
Several authors study connections among codes, lattices, the invariant ring of finite groups, and automorphic forms (See [BE], [Eb], [Sl], etc.). In this section, we describe a connection between the invariant ring of certain finite group and the ring of Siegel modular forms, based on the papers [R1], [R2], and [R3] which are the starting points of our work.

Let H_g be the finite subgroup of $Gl(2^g, \mathbb{C})$ with $H_g \cong 4 * 2_+^{1+2g}.Sp(2g,2)$. H_g acts on the polynomial ring $R := \mathbb{C}[x_a$ with $a \in \mathbb{Z}_2^g]$. The Molien series $\Phi_{H_g}(t)$ of H_g is defined by $\Phi_{H_g}(t) := \sum_{d\geq 0}(\dim R_d^{H_g})t^d$, where $R^{H_g} := \{f \in R | \sigma f = f, {}^\forall\sigma \in H_g\}$ and $R_d^{H_g}$ denotes the d-th homogeneous part of R^{H_g}. It is interesting to note that H_1 and H_2 are the unitary reflection groups No.8 and No.31 in [ST], respectively. We have

$$\Phi_{H_1}(t) = \frac{1}{(1-t^8)(1-t^{12})},$$

and

$$\Phi_{H_2}(t) = \frac{1}{(1-t^8)(1-t^{12})(1-t^{20})(1-t^{24})}.$$

See [ST] for unitary reflection groups. For $g \geq 3$, H_g is free of reflection and $\Phi_{H_3}(t)$ was given in [R3].

Let Γ_g be the Siegel modular group of degree g and $A(\Gamma_g)_{(2)}$ the ring of modular forms of *even* weight for Γ_g, i.e.,

$$\Gamma_g := Sp(2g, \mathbb{Z}),$$

and

$$A(\Gamma_g)_{(2)} := \bigoplus_{2|s} [\Gamma_g, s],$$

where $[\Gamma_g, s]$ denotes the vector space of modular forms of weight s for Γ_g. We denote by $\Psi_{\Gamma_g}(t)$ the Poincaré series of $A(\Gamma_g)_{(2)}$, that is, $\Psi_{\Gamma_g}(t) := \sum_{2|s}(\dim[\Gamma_g, s])\,t^s$. For $g \leq 3$, the structure of $A(\Gamma_g)_{(2)}$, as well as $\Psi_{\Gamma_g}(t)$, were given and we refer the reader to [Eb], [Se] for $g=1$, [I1], [I2] for $g=2$, and [R2], [R3], [T] for $g=3$. See also [D] and [Huf].

On the other hand, Runge showed that $A(\Gamma_g)_{(2)}$ can be obtained from the invariant ring of the finite group H_g described above. More precisely, let the f_a be the theta constants of second order.

(1.1) (Corollary 3.17 [R2])

$$A(\Gamma_g)_{(2)} = \left(\mathbb{C}[f_a \text{ with } a \in \mathbb{Z}_2^g]^{H_g}\right)^N,$$

where N denotes the normalization in its field of fractions and "relations" are the theta relations. □

For $g = 1, 2$, no relation and no normalization are necessary. As a consequence, the invariant ring of H_g for $g = 1, 2$ is isomorphic to $A(\Gamma_g)_{(2)}$ for $g = 1, 2$, respectively. For $g = 3$, we need a relation but no normalization and two rings are slightly different (See [R2] and [R3] for details).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

We shall see the phenomena above from a different point of view. We remark that the degree of a polynomial in the invariant ring is two times the weight as a modular form. We have

$$\Phi_{H_1}(t) = \Psi_{\Gamma_1}(t^2),$$
$$\Phi_{H_2}(t) = \Psi_{\Gamma_2}(t^2),$$

and

$$\Phi_{H_3}(t) = \frac{1}{(1-t^{16})}\Psi_{\Gamma_3}(t^2).$$

The purpose of this paper is to study the Molien series of the finite group H_4. Our result will be useful for investigating not only the invariant ring R^{H_4} but also the ring of modular forms of degree four.

2. Invariant theory of finite groups.

In this section, we recall some facts on invariant theory of finite groups. See [Sl], [Sta] and [Stu] for details.

Let G be a finite subgroup of $Gl(n,\mathbb{C})$. Then G naturally acts on the polynomial ring $R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, i.e.

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(\sum_k a_{1k}x_k, \dots, \sum_k a_{nk}x_k)$$

for $f(x_1, \dots, x_n) \in R$ and $\sigma = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in G$. One of the fundamental problems of the invariant theory is to determine the structure of the invariant ring $R^G := \{f \in R | \sigma f = f, {}^\forall\sigma \in G\}$ (for a fixed G), but it is difficult in general. One approach is, roughly speaking, to count the invariants.

A set $\{\theta_i\}_{1\le i\le n}$ is called a homogeneous system of parameters (h.s.o.p.) if R^G is finitely generated module over $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$. A basic result of commutative algebra, known as the *Noether normalization lemma*, implies that an h.s.o.p. for R^G always exists. R^G is Cohen-Macauley and we have the decomposition

$$(2.1) \qquad {}^\exists\eta_1(=1), \dots, \eta_\delta \in R^G \text{ s.t. } R^G = \bigoplus_{j=1}^{\delta} \eta_j \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n],$$

called the Hironaka decomposition.

The Molien series $\Phi_G(t)$ of G is defined by $\Phi_G(t) = \sum_{d\ge 0}(\dim R_d^G)t^d$, where R_d^G denotes the d-th homogeneous part of R^G. Under (2.1), the Molien series is

$$\Phi_G(t) = \frac{\sum_{1\le i\le \delta} t^{\deg \eta_i}}{\prod_{1\le j\le n}(1-t^{\deg \theta_j})}.$$

The converse statement is false, that is, if $\Phi_G(t)$ can be written in the form

$$\Phi_G(t) = \frac{\sum_{1\le i\le \delta} t^{e_i}}{\prod_{1\le j\le n}(1-t^{d_j})},$$

we cannot always find the appropriate invariants θ_k's and η_j's with degrees $d_1, \dots, d_n$ and $e_1, \dots, e_\delta$, respectively ([St] p.481). But if one can find polynomials $\theta_1, \dots, \theta_n$ of degree $d_1, \dots, d_n$ with only finitely many common zeros, there also exist $\eta_1, \dots, \eta_\delta$ which generate the invariant ring as a free module over the ring $\mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$.

Molien showed that the series can be calculated by the identity below.

(2.3) (Molien, Theorem 2.1 [Sta], Theorem 2.2.1. [Stu])

$$\Phi_G(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\frac{1}{\det(1-t\sigma)}. \qquad \square$$

But if the size of the group G is quite large, (2.3) is useless without simplification. Next we describe the simplification which we use in this paper.

Let G be as above and let H be another finite group (H is expected to have *nice* properties). Assume we have a surjective homomorphism

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

with $N :=$ Ker φ and representatives $\{c_i\}_{0\le i\le k-1}$ of the conjugacy classes of H. Let z_i $(0\le i\le k-1)$ be elements of G with $\varphi(z_i)=c_i$. Then, using the bar convention, $\{\bar{z}_i\}_{0\le i\le k-1}$ forms a set of representatives of conjugacy classes of $\bar{G}$, where $\bar{G} := G/N$ (Note $\bar{G}\cong H$). Let Z_i denote the conjugacy classes of $\bar{G}$ containing $\bar{z}_i$.

(2.4)

$$\Phi_G(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{0\le i\le k-1}\sum_{n\in N}\frac{|Z_i|}{\det(1-t\,z_i\,n)}.$$

Proof. It suffices to show

$$\{\det(1-t\,a\,n)\,|\,n\in N\} = \{\det(1-t\,b\,n)\,|\,n\in N\}$$

as sets if $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are conjugate elements in $\bar{G}$. By an assumption, there exists an element $\bar{c}\in\bar{G}$ such that $\bar{a}=\bar{c}^{-1}\bar{b}\bar{c}$. Since N is a normal subgroup of G, we have $a=c^{-1}bcn'$ for some $n'\in N$. Then

$$\begin{aligned}\{\det(1-t\,a\,n)\,|\,n\in N\} &= \{\det(1-t\,(c^{-1}bcn')\,n)\,|\,n\in N\}\\ &= \{\det(1-t\,c^{-1}bnc)\,|\,n\in N\}\\ &= \{\det(1-t\,bn)\,|\,n\in N\}.\end{aligned}$$

This proves the lemma. $\square$

Our computation is done under (2.4).

3. On the group H_g.

In this section, we study the group H_g. This group has been studied by several authors in addition to Runge. For example, see [CCKS], [D], [Gl], and [KL].

Let V be the g-dimensional vector space over a field of two elements, i.e. $V := \mathbb{Z}_2^g$. For $x, y\in V$, let $x\cdot y$ denote the usual dot product. We equip $\mathbb{C}^{2^g}$ with the usual hermitian inner product. Label the standard basis of $\mathbb{C}^{2^g}$ as e_v, $v\in V$. Set

$$T_g := \left(\frac{1+i}{2}\right)^g [(-1)^{a\cdot b}]_{a,b\in V},$$

and for a binary symmetric $g\times g$ matrix S,

$$D_S := \text{ diag } (i^{S[a]} \text{ with } a\in V),$$

where $S[a] := aS\,{}^t a$. Let

$$H_g := \langle T_g, D_S \mid S \text{ runs over all binary symmetric } g \times g \text{ matrices} \rangle$$

be the subgroup of $Gl(2^g, \mathbb{C})$ generated by the elements T_g and D_S's.

It is easy to see that D_S^2 and $T_g^{-1} D_S^2 T_g$ depend only on the diagonal entries of S. For $a \in V$ with $b = S_0$, we may set

$$X(a) := T_g^{-1} D_S^2 T_g,$$

and

$$Y(a) := D_S^2,$$

where S_0 means to take the row vector determined by the diagonal entries of S. Direct calculation shows

$$e_v X(a) = e_{v+a},$$

and

$$e_v Y(a) = (-1)^{v \cdot a} e_v.$$

We have the identity

$$Y(b)X(a) = (-1)^{a \cdot b} X(a) Y(b).$$

Set

$$E_g := \langle D_S^2, T_g^{-1} D_S^2 T_g \rangle$$

and we have the equality of groups

$$E_g = \langle X(a), Y(b) | a, b \in V \rangle.$$

(3.1) (Lemma 2.1 [CCKS]) *The group E_g is an extraspecial 2-group of order 2^{1+2g}, and the center is $\langle -1 \rangle$. Moreover, every element of E_g can be uniquely written in the form $X(a)Y(b)(-1)^\gamma$ for some $a, b \in V$ and $\gamma \in \mathbb{Z}_2$.* $\square$

Let $v_1, \ldots, v_g$ denote the standard basis of $V = \mathbb{Z}_2^g$. Since $\langle -X(v_i)Y(v_i), Y(v_i) \rangle \cong D_8 (1 \le i \le g$ and D_8 is a dihedral group of order 8), we have $E_g \cong \underbrace{D_8 * \cdots * D_8}_{g}$, i.e., E_g is of positive type and is denoted by 2_+^{1+2g}.

Set

$$N_g := \langle i, E_g \rangle,$$

then N_g is the central product of $\langle i \rangle$ and E_g, or $N_g \cong 4 * 2_+^{1+2g}$ where 4 denotes a cyclic group of order 4 and $4 \cong \langle i \rangle$. (But it is known that $4 * 2_+^{1+2g} \cong 4 * 2_-^{1+2g}$, where 2_-^{1+2g} denotes the extraspecial 2-group of order 2^{1+2g} of negative type. See [Hup] p.361). We have $Z(N_g) = \langle i \rangle$, and N_g is no longer extraspecial. Since every element of $\bar{N}_g := N_g / Z(N_g)$ is of order 2, $\bar{N}_g$ is a vector space of dimension $2g$ over $\mathbb{Z}_2$. Let $x_j = \bar{X}(v_j)$ and $y_j = \bar{Y}(v_j)$. Then $x_1, \ldots, x_g$ and $y_1, \ldots, y_g$ are dual basis of $\bar{X}(V)$ and $\bar{Y}(V)$, and $x_1, \ldots, x_g, y_1, \ldots, y_g$ is a basis of $\bar{N}_g$.

For $A \in Gl(V)$, we define the unitary transformation $\widetilde{A}$ of $\mathbb{C}^{2^g}$ by $e_v \widetilde{A} := e_{vA}$ and we will identify $Gl(V)$ with $\{\widetilde{A} | A \in Gl(V)\}$.

(3.2) (i) *$Gl(V)$ is a subgroup of H_g.*

(ii) *For $A \in Gl(V)$, $\widetilde{A}$ induces $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t(A^{-1}) \end{bmatrix}$ on $\bar{N}_g$.*

(3.3) *D_S induces* $\begin{bmatrix} 1_g & S \\ 0 & 1_g \end{bmatrix}$ *on* $\tilde{N}_g$.

(3.4) *T_g induces* $\begin{bmatrix} 0 & 1_g \\ 1_g & 0 \end{bmatrix}$ *on* $\tilde{N}_g$.

Summerizing the lemmas above, we have the equality of groups

$$H_g = \langle N_g, Gl(V), T_g, D_S \mid S \text{ runs over all binary symmetric } g \times g \text{ matrices } \rangle$$

and the surjective homomorphism

$$\varphi : H_g \longrightarrow Sp(2g,2)$$

defined by

$$\begin{aligned} \varphi(B) &:= 1_{2g} && \text{for } B \in N_g, \\ \varphi(\widetilde{A}) &:= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t(A^{-1}) \end{bmatrix} && \text{for } A \in Gl(V), \\ \varphi(T_g) &:= \begin{bmatrix} 0 & 1_g \\ 1_g & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

and
$$\varphi(D_S) := \begin{bmatrix} 1_g & S \\ 0 & 1_g \end{bmatrix}.$$

(3.3) (Lemma 2.1 [R1]) *One has an exact sequence*

$$0 \longrightarrow N_g \hookrightarrow H_g \xrightarrow{\varphi} Sp(2g,2) \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Finally we list the sizes of groups.

$$|N_g| = 2^{2+2g},$$
$$|Sp(2g,2)| = 2^{g^2}(2^{2g}-1)\cdots(2^2-1),$$

and
$$|H_g| = |N_g| \times |Sp(2g,2)| = 2^{2+2g+g^2}(2^{2g}-1)\cdots(2^2-1).$$

In our case ($g=4$),

$$|N_4| = 1{,}024 = 2^{10},$$
$$|Sp(8,2)| = 47{,}377{,}612{,}800 = 2^{16}3^5 5^2 \cdot 7 \cdot 17,$$

and
$$|H_4| = 48{,}514{,}675{,}507{,}200 = 2^{26}3^5 5^2 \cdot 7 \cdot 17.$$

4. On $Sp(8,2)$ and its conjugacy classes.

In this section, we study the symplectic group $Sp(8,2)$. This is identified with the Chevalley group of type (C_4) over the field of two elements. We give all the characteristic polynomials of elements in H_4. We remark that we cannot read off representatives of the conjugacy classes of $Sp(8,2)$ from Atlas[3] although it is the good reference for the finite simple groups.

As is said, $Sp(8,2)$ is one of the Chevalley groups. The properties of such groups are known and we describe what we need. Let $\Delta = \{\pm 2\xi_i, \pm\xi_i \pm \xi_j \ (i<j) \mid 1 \le i, j \le 4\}$ be the root system of type (C_4), and choose $a = \xi_1 - \xi_2, b = \xi_2 - \xi_3, c = \xi_3 - \xi_4, d = 2\xi_4$ for a fundamental system Π of roots. We denote by Δ^+ the set of positive roots with respect to Π. We write an element $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ of Δ^+ as $\alpha\beta\gamma\delta$. For example, we write 1023 for $a + 2c + 3d$.

E_{ij} is the elementary matrix of size 8×8 with 1 in the (i, j)-entry. For $1 \leq i, j \leq 4$,

$$\begin{aligned}
x_{\xi_i+\xi_j} &:= 1 + E_{i,4+j} + E_{j,4+i}, \\
x_{\xi_i-\xi_j} &:= 1 + E_{i,j} + E_{4+j,4+i} && (i < j), \\
x_{2\xi_i} &:= 1 + E_{i,4+i}, \\
x_{-r} &:= {}^t x_r && (r \in \Delta).
\end{aligned}$$

Then $Sp(8, 2)$ is generated by x_r $(r \in \Delta)$ and is known to be one of the finite simple groups(*cf.* [3]).

Let X_r be the group generated by x_r and put $B = X_{0100}X_{0010}X_{0110}X_{0001}X_{0011}X_{0111}X_{0021}\ X_{0121}\ X_{0221}\ X_{1000}X_{1100}X_{1110}X_{1111}X_{1121}X_{1221}X_{2221}$. Then B is a Sylow 2-subgroup of $Sp(8,2)$ and is normal in $Sp(8,2)$.

Put $n_r = x_r x_{-r} x_r$ and $N = \langle n_r \mid r \in \Delta \rangle$. N is isomorphic to the Weyl group of type (C_4). We fix the following correspondence:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &\longleftrightarrow \underline{1} := [1,0,0,0,0,0,0,0], \\
\xi_2 &\longleftrightarrow \underline{2} := [0,1,0,0,0,0,0,0], \\
\xi_3 &\longleftrightarrow \underline{3} := [0,0,1,0,0,0,0,0], \\
\xi_4 &\longleftrightarrow \underline{4} := [0,0,0,1,0,0,0,0], \\
-\xi_1 &\longleftrightarrow \underline{-1} := [0,0,0,0,1,0,0,0], \\
-\xi_2 &\longleftrightarrow \underline{-2} := [0,0,0,0,0,1,0,0], \\
-\xi_3 &\longleftrightarrow \underline{-3} := [0,0,0,0,0,0,1,0], \\
-\xi_4 &\longleftrightarrow \underline{-4} := [0,0,0,0,0,0,0,1].
\end{aligned}$$

An element of N is uniquely determined by its natural action on $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}$. If $n \in N$ satisfie s $\underline{1}n = \underline{\alpha}$, $\underline{2}n = \underline{\beta}$, $\underline{3}n = \underline{\gamma}$, $\underline{4}n = \underline{\delta}$, then we denote n by $n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. For example, we have

$$n(2,3,-1,-4) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

(4.4) *Including the identity class, the group G contains 81 classes. The following list gives representatives and the orders of the centralizers in G. (m-elements means conjugacy classes of elements of order m. $A, B, \ldots, I$ appeared in the boxes below are available only in these boxes.)*

1-elements	1	47377612800

2-elements	x_{0001}	185794560
	x_{0100}	8847360
	$x_{0100}x_{0121}$	2949120
	$x_{0100}x_{0121}x_{1110}$	49152
	$x_{0100}x_{1110}$	737280
	$x_{0100}x_{0001}$	147456

3-elements	$n(2,3,1,4)$	12960
	D^5	77760
	$x_{0001}n(1,2,3,-4)$	4354560
	$x_{0001}n(-2,3,-1,-4)$	3888

4-elements	$x_{0001}x_{1110}$	92160
	$x_{0001}x_{1000}x_{1110}x_{1111}$	92160
	$x_{0100}x_{0121}x_{1100}x_{2221}$	36864
	$x_{0100}x_{0121}x_{1100}$	12288
	$x_{0100}x_{0001}x_{1110}$	6144
	$x_{0100}x_{0001}x_{1110}x_{1111}$	6144
	$x_{0100}x_{0121}x_{1000}$	3072
	$x_{0100}x_{0001}x_{1121}$	3072
	$x_{0100}x_{0010}x_{0011}x_{2221}$	1024
	$x_{0100}x_{0010}x_{1000}$	768
	$x_{0100}x_{0010}x_{0011}x_{1110}$	512
	$x_{0100}x_{0010}x_{0011}x_{1110}x_{2221}$	512

5-elements	$x_{0001}x_{0011}n(1,2,-4,3)$	3600
	$x_{0010}x_{0111}n(-4,-3,-1,-2)$	300

6-elements	$n(-4,-2,-1,3)$	864
	$n(-4,-1,-3,-2)$	96
	$n(-4,2,1,3)$	288
	$x_{0011}x_{0021}n(2,-4,3,-1)$	288
	$x_{0001}x_{0011}x_{0021}n(1,-2,-4,3)$	4608
	$x_{0021}n(1,4,-3,2)$	13824
	$x_{0001}x_{0011}x_{0021}n(-4,-3,-2,1)$	288
	$x_{0010}x_{0001}x_{0121}n(1,4,3,-2)$	4320
	$x_{0121}n(-1,-3,2,-4)$	1152
	$x_{0001}x_{0011}x_{0111}x_{0021}x_{0121}n(1,2,3,-4)$	69120
	$x_{0001}x_{0111}x_{0021}x_{0121}n(3,-4,-2,1)$	864
	$x_{0001}x_{0011}x_{0111}x_{0021}x_{0121}n(4,-2,-1,-3)$	144
	F^3	1296
	B^2	432
	A^2	288
	C^2	1728

7-elements	$x_{0011}n(-4,2,1,-3)$	42

8-elements	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}$	384
	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}x_{1111}$	128
	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}x_{1000}$	32
	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}x_{0011}$	384
	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}x_{0011}x_{1000}$	32
	$x_{0100}x_{0010}x_{0001}x_{0011}x_{1110}x_{1111}x_{2221}$	128

9-elements	$x_{0001}n(-4,-1,3,-2)$	54
	$x_{1111}x_{1121}n(-4,-1,-3,-2)$	27

10-elements	$x_{0011}n(-4,-2,-1,-3)$	80
	$x_{0011}n(-4,-1,-3,-2)$	20
	$x_{0011}n(-4,2,-1,-3)$	240
	$x_{0001}x_{0011}n(2,1,4,-3)$	240

12-elements	$x_{0001}n(-4,-3,2,1)$	48
	$x_{0001}n(-2,1,-3,-4)$	96
	$A := x_{0001}n(4,1,-2,3)$	24
	$x_{0011}x_{0021}n(-4,-1,3,-2)$	48
	$x_{0111}x_{0021}n(2,3,1,-4)$	144
	$B := x_{0001}x_{0011}x_{0111}x_{0121}n(1,-4,2,3)$	72
	$x_{0001}x_{0011}x_{0121}n(-1,-2,4,-3)$	24
	$x_{0011}x_{0111}x_{0021}x_{0121}n(1,3,-2,-4)$	576
	$x_{0111}x_{0121}n(1,4,3,-2)$	576
	$x_{0001}x_{0011}x_{0111}x_{0121}n(4,-3,1,-2)$	144
	G^2	152
	H^2	384
	$C := x_{0010}x_{0011}x_{0111}x_{0021}x_{0121}n(-2,-4,1,3)$	144

14-elements	$x_{0011}n(-4,-2,1,-3)$	14

15-elements	$x_{0011}n(-4,2,-3,1)$	90
	I^2	90
	$D := x_{0011}n(-4,-1,-2,-3)$	15

17-elements	$E := x_{0001}x_{0011}n(-4,-1,-2,3)$	17
	E^3	17

18-elements	$F := x_{0001}n(-4,-2,-1,-3)$	18

20-elements	$x_{0001}x_{0011}n(-2,1,-4,3)$	40
	$x_{1111}x_{1121}n(-4,-1,3,-2)$	40

21-elements	$x_{0001}x_{0011}n(-4,-1,-3,-2)$	21

24-elements	$G := x_{0001}x_{0011}x_{0021}n(-4,-1,-2,-3)$	48
	$H := x_{0111}x_{0021}n(-4,-2,-3,-1)$	48

30-elements	$I := x_{0011}x_{0021}n(2,-4,-1,-3)$	30
	$x_{0011}n(-4,-2,-3,1)$	30

Proof. We have to show

(i) No two elements in the list are conjugate in G,

(ii) $\sum_{0\le i\le 80} |G|/|C_G(c_i)| = |G|$,

where $C_G(c_i)$ denotes the centralizer group of c_i in G. These are proved by GAP [Sc]. □

Remark 4.5. The determination of the conjugacy classes of Chevalley groups were studied by several authors. For example, see [Ch], [En], and [Sh].

5. Main result.
We have obtained the surjective homomorphism

$$\varphi : H_4 \longrightarrow Sp(8,2)$$

with $\mathrm{Ker}\varphi = N_4$ and a set $\{c_i\}_{0\le i\le 80}$ of representatives of conjugacy classes of $Sp(8,2)$ in the preceding section. In this section, we choose $z_i \in H_4$ with $\varphi(z_i) = c_i$ $(0 \le i \le 80)$ to compute 1024×81 determinants of 16×16 size, and finally we obtain our main result.

First we consider how to write down z_i explicitly from c_i.
e_{ij} is the elementary matrix of size $g \times g$ with 1 in the (i,j)-entry. Set

$$\begin{aligned} X_{\xi_i+\xi_j} &:= D_{e_{i,j}+e_{j,i}}, \\ X_{\xi_i-\xi_j} &:= \widetilde{1+e_{i,j}} && (i \ne j), \\ X_{2\xi_i} &:= D_{e_{i,i}}, \\ X_{-r} &:= T_4 X_r T_4 && (r \in \Delta^+), \\ W_r &:= X_r X_{-r} X_r && (r \in \Pi), \end{aligned}$$

then we have $\varphi(X_{\xi_i+\xi_j}) = x_{\xi_i+\xi_j}$, $\varphi(X_{\xi_i-\xi_j}) = x_{\xi_i-\xi_j}$, $\varphi(X_{2\xi_i}) = x_{2\xi_i}$, $\varphi(X_{-r}) = x_{-r}$, and $\varphi(W_r) = \omega_r$. Now we can write down z_i's as elements of H_4 explicitly.

Moreover for the simplicity of our computation, set

$$\begin{aligned} N(2,1,3,4) &:= W_{1000}, \\ N(1,3,2,4) &:= W_{0100}, \\ N(1,2,4,3) &:= W_{0010} \\ N(-1,2,3,4) &:= (W_{0001}W_{1000}W_{0100}W_{0010}W_{0100}W_{1000})^2 W_{0001}, \\ N(1,-2,3,4) &:= (W_{0001}W_{0100}W_{0010}W_{0100})^2 W_{0001}, \\ N(1,2,-3,4) &:= (W_{0001}W_{0010})^2 W_{0001}, \\ \text{and} \qquad N(1,2,3,-4) &:= W_{0001}, \end{aligned}$$

and we have $\varphi(N(2,1,3,4)) = n(2,1,3,4)$, $\varphi(N(1,3,2,4)) = n(1,3,2,4)$, $\varphi(N(1,2,4,3)) = n(1,2,4,3)$, $\varphi(N(-1,2,3,4)) = n(-1,2,3,4)$, $\varphi(N(1,-2,3,4)) = n(1,-2,3,4)$, $\varphi(N(1,2,-3,4)) = n(1,2,-3,4)$, and $\varphi(N(1,2,3,-4)) = n(1,2,3,-4)$.

For example, since we have

$$\begin{aligned} c_{23} &= x_{0001}x_{0011}n(4,-1,-2,3) \\ &= x_{0001}x_{0011}n(4,1,2,3)n(-1,2,3,4)n(1,-2,3,4) \\ &= x_{0001}x_{0011}n(4,2,3,1)n(3,2,1,4)n(2,1,3,4)n(-1,2,3,4)n(1,-2,3,4) \\ &= x_{0001}x_{0011} \\ &\quad \times n(2,1,3,4)n(1,3,2,4)n(1,2,4,3)n(1,3,2,4)n(2,1,3,4) \\ &\quad \times n(2,1,3,4)n(1,3,2,4)n(2,1,3,4) \\ &\quad \times n(2,1,3,4) \\ &\quad \times n(-1,2,3,4) \\ &\quad \times n(1,-2,3,4), \end{aligned}$$

we may take

$$\begin{aligned} z_{23} &= X_{0001}X_{0011} \\ &\quad \times N(2,1,3,4)N(1,3,2,4)N(1,2,4,3)N(1,3,2,4)N(2,1,3,4) \\ &\quad \times N(2,1,3,4)N(1,3,2,4)N(2,1,3,4) \\ &\quad \times N(2,1,3,4) \\ &\quad \times N(-1,2,3,4) \\ &\quad \times N(1,-2,3,4). \end{aligned}$$

Using the identity (2.3), after calculating 81×1024 determinants by computer, we have,

(5.1)(Main Result) *The Molien series of H_4 is given by N/D, where*

$$\begin{aligned} D = {} & (1-t^{12})(1-t^{20})(1-t^{24})^4(1-t^{28})(1-t^{36})(1-t^{48})(1-t^{56})(1-t^{60})(1-t^{68})(1-t^{72}) \\ & (1-t^{80})(1-t^{84})(1-t^{120}), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} N = {} & 1 + t^8 + 2t^{16} + t^{20} + 2t^{24} + 3t^{28} + 12t^{32} + 16t^{36} + 35t^{40} + 55t^{44} + 120t^{48} + 191t^{52} + 378t^{56} \\ & + 656t^{60} + 1251t^{64} + 2196t^{68} + 4050t^{72} + 7059t^{76} + 12589t^{80} + 21542t^{84} + 37016t^{88} + 61753t^{92} \\ & + 102468t^{96} + 165916t^{100} + 266033t^{104} + 417796t^{108} + 648407t^{112} + 988060t^{116} + 1486996t^{120} \\ & + 2201834t^{124} + 3220176t^{128} + 4641333t^{132} + 6610593t^{136} + 9292179t^{140} + 12915647t^{144} \\ & + 17738608t^{148} + 24107604t^{152} + 32407941t^{156} + 43140814t^{160} + 56856867t^{164} + 74252203t^{168} \\ & + 96081397t^{172} + 123273568t^{176} + 156821288t^{180} + 197918327t^{184} + 247819297t^{188} \\ & + 308000248t^{192} + 379985097t^{196} + 465529950t^{200} + 566411793t^{204} + 684637731t^{208} \\ & + 822192456t^{212} + 981273286t^{216} + 1163994772t^{220} + 1372649504t^{224} + 1609369149t^{228} \\ & + 1876413630t^{232} + 2175788465t^{236} + 2509562823t^{240} + 2879447531t^{244} + 3287143281t^{248} \\ & + 3733883106t^{252} + 4220812055t^{256} + 4748501510t^{260} + 5317360486t^{264} + 5927129487t^{268} \\ & + 6577323698t^{272} + 7266714833t^{276} + 7993805363t^{280} + 8756308386t^{284} + 9551648238t^{288} \\ & + 10376448521t^{292} + 11227056306t^{296} + 12099045430t^{300} + 12987756456t^{304} + 13887826003t^{308} \\ & + 14793733744t^{312} + 15699362572t^{316} + 16598543359t^{320} + 17484652622t^{324} + 18351142336t^{328} \\ & + 19191179590t^{332} + 19998148599t^{336} + 20765335130t^{340} + 21486388917t^{344} + 22155054630t^{348} \\ & + 22765579729t^{352} + 23312494737t^{356} + 23790956699t^{360} + 24196576271t^{364} + 24525685598t^{368} \\ & + 24775216091t^{372} + 24942881066t^{376} + 25027102035t^{380} + 25027102035t^{384} + 24942881066t^{388} \\ & + 24775216091t^{392} + 24525685598t^{396} + 24196576271t^{400} + 23790956699t^{404} + 23312494737t^{408} \\ & + 22765579729t^{412} + 22155054630t^{416} + 21486388917t^{420} + 20765335130t^{424} + 19998148599t^{428} \\ & + 19191179590t^{432} + 18351142336t^{436} + 17484652622t^{440} + 16598543359t^{444} + 15699362572t^{448} \\ & + 14793733744t^{452} + 13887826003t^{456} + 12987756456t^{460} + 12099045430t^{464} + 11227056306t^{468} \\ & + 10376448521t^{472} + 9551648238t^{476} + 8756308386t^{480} + 7993805363t^{484} + 7266714833t^{488} \\ & + 6577323698t^{492} + 5927129487t^{496} + 5317360486t^{500} + 4748501510t^{504} + 4220812055t^{508} \\ & + 3733883106t^{512} + 3287143281t^{516} + 2879447531t^{520} + 2509562823t^{524} + 2175788465t^{528} \\ & + 1876413630t^{532} + 1609369149t^{536} + 1372649504t^{540} + 1163994772t^{544} + 981273286t^{548} \\ & + 822192456t^{552} + 684637731t^{556} + 566411793t^{560} + 465529950t^{564} + 379985097t^{568} \\ & + 308000248t^{572} + 247819297t^{576} + 197918327t^{580} + 156821288t^{584} + 123273568t^{588} \\ & + 96081397t^{592} + 74252203t^{596} + 56856867t^{600} + 43140814t^{604} + 32407941t^{608} + 24107604t^{612} \\ & + 17738608t^{616} + 12915647t^{620} + 9292179t^{624} + 6610593t^{628} + 4641333t^{632} + 3220176t^{636} \\ & + 2201834t^{640} + 1486996t^{644} + 988060t^{648} + 648407t^{652} + 417796t^{656} + 266033t^{660} \\ & + 165916t^{664} + 102468t^{668} + 61753t^{672} + 37016t^{676} + 21542t^{680} + 12589t^{684} + 7059t^{688} \\ & + 4050t^{692} + 2196t^{696} + 1251t^{700} + 656t^{704} + 378t^{708} + 191t^{712} + 120t^{716} + 55t^{720} + 35t^{724} \\ & + 16t^{728} + 12t^{732} + 3t^{736} + 2t^{740} + t^{744} + 2t^{748} + t^{756} + t^{764}. \qquad \square \end{aligned}$$

References

[A] M.Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge Uni. Press, Cambridge, 1986.

[BE] M. Broué and M. Enguehard, *Polynômes des poids de certains codes et fonctions thêta de certains réseaux*, Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. 5 (1972), 157–181.

[BO] E. Bannai and M. Ozeki, *Construction of Jacobi forms from certain polynomials*, to appear in Proc. Japan Acad. J. (1996).

[BMO] E. Bannai, S. Minashima and M. Ozeki, *On Jacobi forms of weight 4*, to appear in Kyushu J. Math..

[Bor] A.Borel et al., *Seminar on algebraic groups and related finite groups*; Lecture Notes in Mathematics 131, 1970.

[Bou] N.Bourbaki, *Groups et algebras de Lie, Ch.4,5 and 6*, Herrmann, Paris, 168.

[CCKS] A. R. Calderbank, P.J.Cameron, W.M.Kantor, and J.J.Seidel, $\mathbb{Z}_4$-*Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal Euclidean line-sets*, preprint (1994).

[Ca] Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley & Sons Ltd, 1989.

[CCNPW] Conway, Curtis, Norton, Parker and Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, 1985.

[Ch] B.Chang, *The conjugate classes of Chevalley groups of type* (G_2), J.Algebra 9 (1968), 190–211.

[D] W.Duke, *On codes and Siegel modular forms*, Int.Math.Research Notices, 125–136.

[Eb] W. Ebeling, *Lattices and Codes, A course partially based on lectures by F. Hirzeburch*, Vieweg, 1994.

[En] H.Enomoto, *The conjugacy classes of Chevalley groups of type* (G_2) *over finite fields of characteristic 2 or 3*, J.Fac.Soc. Univ.Tokyo Sect.IA (1970), 497–512.

[F] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren Math. Wiss. 254, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[Gl] S. P. Glasby, *On the faithful representations, of degree* 2^n, *of certain extensions of 2-groups by orthogonal and symplectic groups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 58 (1995), 232–247.

[Gr] R.Griess, *Automorphisms of extra special groups and nonvanishing degree 2 cohomology*, Pac.J.math. 48(2) (1973), 402–422.

[Huf] W. C. Huffman, *The biweight enumerator of selforthogonal binary codes*, Disc. Math. 26 (1979), 129–143.

[Hup] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1967.

[HS] W. C. Huffman and N. J. A. Sloane, *Most primitive groups have messy invariants*, Adv. in Math. 32 (1979), 118–127.

[I1] J. Igusa, *On Siegel modular forms of genus two*, Amer. J. Math. 86 (1964), 219–246.

[I2] ———, *On Siegel modular forms of genus two (II)*, Amer. J. Math. 88 (1966), 221–236.

[KL] P. Kleidman and M. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups*, LMS Lecture Note Series 129, Cambridge University Press, 1990.

[R1] B.Runge, *Codes and Siegel modular forms*, Disc. Math. 148 (1996), 175–204.

[R2] ———, *On Siegel modular forms, part I*, J.Reine angew.Math. 436 (1993), 57–85.

[R3] ———, *On Siegel modular forms, part II*, Nagoya Math.J. 138 (1995), 179–197.

[Sc] M. Schönert, et.al., *GAP: Groups, Algorithms and Programing*, Lehrstuhl D für Mathemtik, RWTH Aachen, 1994.

[Se] J. -P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer, New York etc., 1973.

[ST] G. C. Shephard and J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. 6 (1954), 274–304.

[Sh] K.Shinoda, *The conjugacy classes of Chevalley groups of type* (F_4) *over finite fields of characteristics 2*, J.Fac.Sci. Univ.Tokyo 21 (1974), 133–159.

[Sl] N. J. A. Sloane, *Error-correcting codes and invariant theory:New applications of a nineteenth-century technique*, Amer. Math. Mathly 84 (1977), 82–107.

[Sta] Richard P. Stanley, *Invariants of finite groups and their applications to combinatorics*, Bull. Amer. Math. Soc. 1 (1979), 475–511.

[Stu] Bernd Sturmfels, *Algorithms in invariant theory*, Springer-Verlag, 1993.

[Su] M. Suzuki, *Yugen-tanjun-gun (Japanese)*, Kinokuniya, 1987.

[T] S. Tsuyumine, *On Siegel modular forms of degree three*, Amer.J.Math. 108 (1986), 755–862.

Hakozaki 6-10-1, Higashi-ku, Fukuoka, 812, Japan
E-mail address: ohura@math.kyushu-u.ac.jp

コンピュータを用いた小さなサイズの association schemes の分類

花 木 章 秀
宮 本 泉

Let $(X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ be an association scheme. Let $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ be the set of vertices. Then the association schemes with at most 17 vertices are classified.

number of vertices	number of isomorphism classes	number of vertices	number of isomorphism classes
4	4	11	4
5	3	12	59
6	8	13	6
7	4	14	16
8	21	15	25
9	12	16	222 new
10	13	17	5 new

adjacency matrix の満たす条件：

$(X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を association scheme とする。A_0, $A_1, \cdots, A_d$ をその adjacency matrix とする。

1. A_i は $\{0, 1\}$−行列で、各行各列の 1 の個数は一定である。その個数 v_i を *valency* という。A_0 =単位行列 である。
2. $A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J$(all 1 matrix)
3. ${}^tA_i = A_{i'}$ となる i' が存在する。

4. $A_iA_j = \sum_{0\le k\le d} p_{ij}^k A_k$ となる定数 p_{ij}^k が存在する。

relation matrix の定義

$$A := 0A_0 + 1A_1 + 2A_2 + \cdots + dA_d$$

を association scheme の *relation matrix* という。

以下、relation matrix が A となる association scheme を簡単に association scheme A ともいうことにする。

Association scheme の同型性

association scheme を書き表すとき、incidence R_i の番号の付け方、つまり、adjacency matrix $A_1, A_2, \cdots, A_d$ の番号付けと、頂点 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の番号の付け方に自由度がある。この2つの番号付けを適当に変えて association scheme A と B が一致するとき、これらを同型という。

$\{1, 2, \cdots, d\}$ 上の置換 g と 置換行列 P を適当に選べば

$$P^{-1}A^gP = B$$

となることである。ここで A^g は A の各成分の値 (incidence 番号) i を i^g に変えた行列である。

Assocation scheme の automorphism

$P^{-1}AP = A$ となる置換行列 P またはそれを与える置換を assocation scheme の *automorphism* という。
A の automorphism 全体のなす群を $Aut(A)$ で表す。

分類の手順

1. 頂点集合のサイズを決めて、簡単な同型を除いて relation matrix をすべて発生させる。

2. 同型判定を行なう。

3. 結果を整理して表にまとめる。例えば、subscheme として表す。

relation matrix の作り方

valency と 転置 incidence の列

$$[v_1, v_2, \cdots, v_d], [1', 2', \cdots, d']$$

を適当な規則、例えば $v_1 \le v_2 \le \cdots \le v_d$、にしたがって並べ、これが異なる association scheme は非同型となる様にする。この並べ方にしたがって A の第一行を決める。

$$
\begin{pmatrix}
0 & \overbrace{1\cdots 1}^{v_1\text{個}} & \overbrace{2\cdots 2}^{v_2\text{個}} & \ldots & \overbrace{d\cdots d}^{v_d\text{個}} \\
 & 0 & \longrightarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \\
{}^tA_i = A_{i'}\text{により} & & \ddots & \cdots & \vdots \\
\text{右上より決まる} & & & & \\
 & & \cdots & & 0
\end{pmatrix}
$$

$(2,3)$ 成分から順に incidence 番号を入れてすべての場合を尽くす。すべての場合の尽くし方として、矢印の順に incidence 番号を読んでいって出てくる数が小さい順に発生させるようにしている。その際、一つ成分を入れるごとに計算できる p_{ij}^k を計算して、association scheme にならない場合を調べる。さらに、簡単な同型について $P^{-1}A^gP$ を計算して、その中に発生の順序が前になるような relation matrix が入っているかどうかを調べる。このようなことを毎回調べること自体が手間のかかることであるが、これらを調べて早く次の場合に移る様にするのが良い方法であった。

［命題］ valency 1 の adjacency matrix は置換行列となり、それ全体は頂点集合上 semiregular な群をなす。

これから、m を valency 1 の adjacency matrix の個数、n =頂点数、s を valency k の adjacency matrix の個数とすると、$m|n$ や $m|sk$ という条件がでる。これにより、$[v_1,\ v_2, \cdots,\ v_d]$ の候補を減らすことができる。

同型の構成法

頂点番号の置換は (colored) graph の同型の標準的な構成法。

incidence 番号の置換もほぼ同様な考え方でできる。ただし、$p_{i,j}^k$ は３次元配列なので適当な２次元の切口を利用している。

同型判定の結果、頂点数１６の場合２０８個の association scheme が得られた。ただし発生のとき、位数１６の群の regular representation のなす association scheme １４個を除外してあるので、合計は２２２個になる。

Subscheme として表す方法

association scheme A の頂点集合 $\{0, 1, 2, \cdots, d\}$ が集合 $T_0, T_1, T_2, \cdots, T_D$ の disjoint union （ただし $T_0 = \{0\}$）になり、$B_j = \sum_{i \in T_j} A_i$ として $B = 0B_0 + 1B_1 + 2B_2 + \cdots + DB_D$ が association scheme となるとき B を A の subscheme という。

[補題] B が A の subsheme のとき、 $Aut(A) \subseteq Aut(B)$.

[系] association scheme A の automrphism group に regular な部分群が含まれていることと、association scheme A が regular な部分群の regular representation のなす association scheme B の subscheme になることは同値。

頂点数１６のとき、この原理で調べると、automorphism group が transitive にならない場合が７個、regular な部分群を含まない場合が１１個出てきた。最後に、これらの間の subsheme 関係をしらべて、結局、頂点数１６の２２２個の全ての association scheme は、位数１６の regular な群からできる１４個、automorphism group が intransitive な場合の５個、regular な部分群を含まない場合の６個、の計２５個の association scheme のどれかの subscheme となることがわかった。

頂点数１７のときは cyclotomic scheme の５個のみという結果であった。

頂点数１５までの得られている結果と比較したときにも正しい結果が得られていた。

頂点数１６の場合、regular な群からできる association scheme を除いて計算して得られた１番から２０８番までの association scheme のうちで、次に示す組はそれぞれ同じ $p^k_{i,j}$ であった。

[8, 9], [34, 35], [36, 37, 38, 39], [50, 51], [53, 54], [57, 58], [61, 62], [65, 66], [79, 80], [84, 85], [91, 92, 93], [97, 98, 99], [172, 173], [175, 176], [183, 184]

頂点数が素数のとき１９点で初めて cyclotomic でない association scheme が存在した。

頂点数２４で４次対称群の group association scheme と同じ $p^k_{i,j}$ の association scheme は全部で３個であることを確認した。正確には、入力データ

$$[v_1, v_2, v_3, v_4] = [3, 6, 6, 8], \quad [1', 2', 3', 4'] = [1, 2, 3, 4]$$

に対して association scheme の同型類は３個になり、それらは全て４次対称群の group association scheme と同じ $p^k_{i,j}$ をもつことを確認した。

Attempt to Prove a Theorem of Williams Not Using the Classification of Finite Simple Groups

Michio Suzuki

Introduction We begin with some definitions. Let G be a finite group and let $\pi(G)$ be the set of prime numbers dividing the order $|G|$ of the group G. *The prime graph* $\Gamma(G)$ is a graph Γ with vertex set $V(\Gamma) = \pi(G)$. Two elements p and q of $V(\Gamma)$ are joined by an edge if and only if $p \neq q$ and G contains an element of order pq.

A subgroup H of the group G is said to be *isolated* if it satisfies the following two conditions:

(1) $H \cap H^g = 1$ or H for all $g \in G$, and

(2) if $x \in H - \{1\}$, then $C_G(x) \subsetneq H$.

The theorem of Williams [3] referred to in the title is the following.

Theorem Let G be a nonabelian simple group of finite order with disconnected prime graph. Let ρ be a connected component of the prime graph not containing the prime 2. Then, G contains a nilpotent Hall ρ-subgroup which is isolated.

This report contains an approach to proving the theorem *without using the classification of finite simple groups.* The original proof of Williams depends on the analysis of the simple groups in the list to determine how a connected component not containing the prime two arises in the prime graph.

The converse of the theorem is obviously true. Thus, *if a nonabelian simple group contains an isolated nilpotent Hall π–subgroup, then $\pi \cap \pi(G)$ is a connected component of the prime graph.*

Actually, the concept of the prime graph arose in the work of Gruenberg–Roggenkamp [2] on the question of when the augmentation ideal of the group ring $\mathbb{Z}G$ is not indecomposable as a right $\mathbb{Z}G$–module. They considered three properties on a (not necessarily simple) group G:

(1) The group G contains an isolated proper subgroup;

(2) The augmentation ideal of $\mathbb{Z}G$ is not indecomposable as a right $\mathbb{Z}G$–module; and

(3) The prime graph of G is not connected.

They proved that $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3)$. The theorem stated here asserts that $(3) \Longrightarrow (1)$ *for a nonabelian simple group G*. In fact, Williams showed that the classification of finite simple groups yields $(3) \Longrightarrow (1)$ *for an arbitrary finite group G*. This generalized form of Williams' theorem might be proved also without the classification, but I have not been able to do so.

§1 **Starting Point** We need some definitions. If σ is a set of prime numbers, a finite group H is called a *σ–group* if $\pi(H) \subseteq \sigma$. A subgroup K is called a *σ–local subgroup* if $K = N_G(H)$ for some σ–subgroup $H \neq 1$ of G. For any subgroup U, let $O_\sigma(U)$ denote the maximal normal σ–subgroup of the subgroup U. By definition, $O_\sigma(K) \neq 1$ for any σ–local subgroup K.

Suppose that G is a finite group with disconnected prime graph $\Gamma(G)$ and let ρ be a connected component of the graph $\Gamma(G)$.

Assume that $2 \notin \rho$.

Then, any ρ–subgroup is of odd order.

Since ρ is a component in the prime graph, we have the following proposition.

Proposition 1 If H is a ρ–subgroup $\neq 1$, then so is $C_G(H)$.

The following proposition takes care of the case when some ρ–local subgroups are of even order.

Proposition 2 If there is a ρ–local subgroup K of even order, G contains an abelian Hall ρ–subgroup that is isolated.

Proof We have $V = O_\rho(K) \neq 1$. An involution t of K acts on V as $v^t = v^{-1}$ for every $v \in V$. In particular, V is abelian. If $v \in V - \{1\}$, then the element t acts on $A = C_G(v)$. Since A is a ρ–group by Proposition 1, t acts regularly on A. It follows that A is abelian; in fact, it is a maximal abelian ρ–subgroup. If $a \in A - \{1\}$, the repeat argument proves that $C_G(a)$ is abelian, so $C_G(a) = A$. Thus, A is isolated. An isolated subgroup is always a Hall subgroup. Thus, G contains an isolated Hall ρ–subgroup. □

Thus, to prove the theorem, *we may assume that all ρ–local subgroups are of odd order.*

§2 **Method of Bender–Glauberman** In a recent publication [1], Bender–Glauberman streamlined the group–theoretical portion of the Feit–Thompson proof of solvability of groups of odd order. We can apply their method to study the set $\mathcal{M}$ of all the maximal ρ–local subgroups of G.

The set $\mathcal{M}$ has many properties similar to those of the set of all maximal subgroups in [1]. All subgroups in $\mathcal{M}$ are of odd order. Another example is the following.

Proposition 3 If $M \in \mathcal{M}$, then $M = N_G(M)$. If $M \in \mathcal{M}$ normalizes a ρ–subgroup H, $H \subsetneq M$.

Propositions in the chapter *II* and after in [1] are properties of the set of maximal subgroups. We can interpret them as propositions on the set $\mathcal{M}$ of all the maximal ρ–local subgroups.

Assertion All propositions of [1] hold with proper modification in hypotheses and conclusions when we interpret them as propositions on the set $\mathcal{M}$.

§3 **Some Differences** Since the set $\mathscr{M}$ involves only ρ–local subgroups, we have no control over other subgroups which are not ρ–local. Thus, when Bender–Glauberman discuss the normalizers of p–subgroups, we have to assume that those primes are in the set ρ. If $M \in \mathscr{M}$, the group M has odd order. It is not necessarily a ρ–subgroup, but $R = O_\rho(M) \neq 1$.

Proposition 4 Let H be a ρ–subgroup and let A be a noncyclic group of order p^2 for some prime p such that $A \subsetneq N_G(H)$. Then, $p \in \rho$.

Proof If $p \in \pi(H)$, then $p \in \rho$. If $p \notin \pi(H)$, A normalizes some Sylow q–subgroup Q of H. Then, $Q = < C_Q(x) \mid x \in A - \{1\} >$ by Proposition 1.16 of [1]. Thus, p and q are connected in the prime graph of G. Since $q \in \rho$, we have $p \in \rho$. □

Proposition 5 If P is a Sylow p–subgroup of $M \in \mathscr{M}$, then either $p \in \rho$ or P is cyclic.

Proof Let $M \in \mathscr{M}$ and $p \in \pi(M)$. If a Sylow p–subgroup P is not cyclic, then P contains a noncyclic subgroup A of order p^2. By Proposition 4, we get $p \in \rho$. □

In the analysis of the structure of a subgroup $M \in \mathscr{M}$ in [1], the set σ of prime numbers in $\pi(M)$ defined by

$$\sigma = \{\ p \in \pi(M) \mid \text{for some Sylow } p\text{–subgroup } P \text{ of } M,\ N_G(P) \subsetneq M\ \}$$

plays an important role. It is proved that M contains a normal Hall σ–subgroup M_σ. *In our case, the set $\sigma_0 = \sigma \cap \rho$ plays the corresponding role.* Each $M \in \mathscr{M}$ contains a normal Hall σ_0–subgroup which in most cases coincides with the maximal nilpotent Hall subgroup of M.

§4 **After Group Theoretical Discussions** Let G be a nonabelian simple group and let ρ be a connected component of the prime graph such that $2 \notin \rho$. Let $\mathscr{M}$ be the set of all maximal ρ–local subgroups and assume that every $M \in \mathscr{M}$ is of odd order. *We have theorems* *corresponding to Theorems I and II in* § *16 of [1].* The only major difference is to allow in Theorem *I (d)* S or T may be not a ρ–group in which case it is a 2–step Frobenius group in the sense of [3].

We will report on the character theoretical part of the proof in another occasion. It is hoped that the character theory provides a proof of the theorem of Williams.

§5 **Conclusion** A significant point of this work may be the realization that the wonderful method of Bender–Glauberman on the hypothetical minimal simple group of odd order can be applied to a real case involving a simple group with disconnected prime graph. This is a very restricted case, but it may be hoped that the method would be applicable to other situations (with suitable changes).

References

[1] Bender H. and Glauberman G. *Local Analysis for the Odd Order Theorem,* London Math. Soc. LNS 188 (1995)

[2] Gruenberg K. and Roggenkamp K. Decomposition of the augmentation ideal and of the related modules of a finite group, Proc. London Math. Soc. 31 (1975) 149–166

[3] Williams J.S. Prime Graph Components of Finite Groups, J. of Algebra 69 (1981) 487–513

Department of Mathematics
University of Illinois at Urbana–Champaign
1409 West Green St.
Urbana, IL 61801
suzuki@math.uiuc.edu

アーベル群のＰＵＲＩＦＩＡＢＬＥ部分群とＡＤＥ群について

鳥羽商船高専　奥山 京

序

一般のアーベル群 (mixed group) Ｇには最大の torsion 部分群Ｔがただ１つ存在する．このときＧ／Ｔは torsion-free 群となる．そこでＧは，torsion 群Ｔの torsion-free 拡大群とみることができる．Ｇ／Ｔがランク１の torsion-free 群となるとき，height-matrix という概念を導入すると群Ｇの分類ができる．しかしそれ以外の場合については今のところ何もわかっていない．

また，Ｔが直和因子となるとき，Ｇは分解するという．しかしすべての群Ｇが分解するとは限らない．Ｔはｐ群の直和の形になるが，各ｐに対してそのｐパートが有限群であっても，Ｔが有限群でないときは，分解しない例がある．そこで分解に関して少し研究されたが，決定的なものはまだない．従ってこの方面の研究は，まだほんの初歩の段階といっていいだろう．

そこで，今までｐ群について考察してきた，purifiable 部分群を一般のアーベル群について考えてみた．まず［ＢＩ］の中の，ｐ群における almost-dense 部分群の概念を一般のアーベル群に拡張し，pure [p-pure] hull の構造を決定した．また［ＢＯ］で与えた，ｐ群における purifiable 部分群となるための必要条件も拡張した．［ＢＣＭ］で，ｐ群において maximal vertical 部分群の概念を導入し，上の必要条件が必要十分となる群Ｇを決定している．同様の試みを一般のアーベル群について行ってみたが，現在のところ部分解答を得たに留まっている．しかし，［ＨＭ］で，すべての部分群が purifiable となるｐ群を決定しているが，これについては拡張に成功した．前半の最後に purifiable 部分群と p-purifiable 部分群の関係について述べている．

後半では，Ｇを torsion-free 部分群の torsion 拡大という見方をして考察してみた．Ｔと共通部分のない極大な部分群を Ｔ-high 部分群という．この部分群は必ず存在するが，もちろん一意的ではないし，同型であるとは限らない．Ａを１つの Ｔ-high 部分群としたとき，ＧはＡの torsion 拡大になる．しかしこれだけではあまりにも一般的で，非常に難しいので，Ａに１つの条件を付けて考察してみた．即ち，ＡがＧの almost-dense 部分群であるとき．［Ｆ］のパート２，ｐ１８６の例２がその一番単純な群になっている．この例については本文で詳しく述べる．このような群ＧをＡＤＥ群 (almost-dense extension group) と名付ける．つまり，Ａを torsion-free 群とし，Ａがその拡大群Ｇで almost-dense かつ T-high であるとき，ＧをＡのＡＤＥ群といい，Ａを moho 部分群と呼ぶ．

Ｔの取り方が一意的でないように，Ａの取り方もたくさんある．またＡの取り方によって，Ｇ／Ａの群も必ずしも同型でないことがわかる．

そこで上に述べた例をモデルとした最も単純なＡＤＥ群について，構造定理・存在定理・分類定理を与えた．即ち，Ａがランク１の torsion-fre 群で，各素数ｐに対してＴのｐパートが巡回群となる場合．このようなＡＤＥ群を（１，１）型ＡＤＥ群と呼ぶことにする．

また，上に述べた例は，分解しない群の例として挙げられている．一方，ＡＤＥ群において，Ｔが有限群のときＧが分解することはよく知られている．そこで，前半で述べた結果を使って，（１，１）型ＡＤＥ群の分解性の特徴付けを与えた．

1. Purifiable subgroup について

群はすべてアーベル群とする．また，特に断わらない限り，Ｇをアーベル群，Ａをその部分群とする．また，ＴをＧの最大の torsion 部分群とし，G_pをＴのｐパートとする．まず基本的な定義を述べる．

定義１．１．＜neat 部分群＞　次の条件を満たす部分群ＡをＧの neat 部分群という．
各素数ｐに対して，$A \cap pG = pA$が成立．□

Ｇの任意の部分群に対して，その部分群を含む極小の neat 部分群が存在することはよく知られている．

定義１．２．＜p-pure 部分群＞　次の条件を満たす部分群ＡをＧの p-pure subgroup という．
すべての非負整数ｎに対して，$A \cap p^n G = p^n A$．□

定義１．３．＜pure 部分群＞　次の条件を満たす部分群ＡをＧの pure subgroup という．
各素数ｐに対して，ＡがＧの p-pure 部分群である．□

定義１．１から明かに pure 部分群は neat 部分群である．またＧの任意の部分群に対して，その部分群を含む極小の pure 部分群は必ずしも存在しない．そこで次のような定義を与える．

定義１．４．＜purifiable [p-purifiable] 部分群＞　部分群Ａを含む極小の pure [p-pure] 部分群Ｈが存在するとき，ＡをＧの purifiable [p-purifiable] 部分群という、またこの pure [p-pure] 部分群ＨをＡのＧにおける pure [p-pure] hullという。□

（１）ｐ群について

まずｐ群について，purifiable 部分群の特徴付け問題は下記のことまで解明された。そこでまず，定義を２つ挙げる。

定義１．５．＜almost-dense 部分群＞　次の条件を満たすＡをｐ群Ｇの almost-dense 部分群という．Ａを含むＧの任意の pure 部分群Ｋに対して，G/K は可除群になる．なお，加除群とは，すべての素数ｐに対して，$pG = G$となる群Ｇをいう．□

なお，almost-dense 部分群については，［ＢＩ］で次のように表現できることを示している．

命題１．６．Ａがｐ群Ｇで almost-dense であることと，次のことは同値である．
すべての非負整数ｎに対して，$p^n G[p] < A + p^{n+1} G$が成立．□

定義１．７．すべての非負整数 n に対して，Ａの n-th overhang を次のように定義する．

$$V_n(G, A) = \frac{(A + p^{n+1}G) \cap p^n G[p]}{(p^n G[p] \cap A) + p^{n+1} G[p]} \quad \square$$

p群における pure hull の構造は次のようになる．

命題１．８．（［ＨＭ］，［ＢＩ］，［ＢＯ］）Ａがｐ群Ｇの purifiable 部分群であるとき，その pure hull Ｈは次のような構造になっている．

（１）ある非負整数ｍが存在して，ｎ≧ｍとなるすべての整数ｎに対して，

$$V_n(G, A) = V_n(H, A) = 0 \text{が成り立つ.}$$

（２）Ｈ＝Ｍ⊕Ｎ，ただし，Ｍ，Ｎ，はＨの部分群．

（３）Ｍ［ｐ］＝Ａ［ｐ］，Ｎは bounded であって m が $p^m N = 0$ となる最小の非負整数となる．従って，$p^m H[p] < A$．

（４）ＡがＨの almost-dense 部分群である．

なお，Ｇ［ｐ］＝｛ｐ∈Ｇ｜ｐｇ＝０｝で，これをＧの socle という．□

命題１．８の（１）の条件を満足する部分群ＡをＧの eventually vertical 部分群という．また，m = 0 のとき，ＡをＧの vertical 部分群という．しかし命題７の（１）条件が，必要十分でない例が存在する．そこでこれが必要十分となる部分群に次のような場合である。

定理１．９．Ａをｐ群Ｇの almost-dense 部分群とする．そこでＡがＧの purifiable 部分群となるための必要十分条件は，ＡがＧの eventually vertical 部分群となることである．□

上述の必要条件が必要十分となるｐ群は次のように特徴付けられた．その前に定義を１つ述べる．

定義１．１０．<maximal vertical 部分群>　Ａをｐ群Ｇの vertical 部分群とするとき，Ａを含み socle がＡ［ｐ］となる極大な vertical 部分群が存在する．この部分群をＡを含む maximal vertical 部分群という．この部分群の存在は，Ｚｏｒｎの補題で保証されている．□

命題１．１１．（［ＢＣＭ］）ｐ群Ｇに対して，次の３つの事柄はすべて同値である．

（１）Ｇの reduced パートは，quasi-complete ｐ群である．

（２）Ｇのすべての eventually vertical 部分群は，purifiable 部分群である．

（３）Ｇのすべての maximal vertical 部分群は，pure 部分群である．□

一般のアーベル群Ｇは，Ｇ＝Ｒ⊕Ｄと書ける．ただしＤは加除部分群である．このＤは一意的に存在し，直和因子になる．このときのＲをＧの reduced パートという．

また，ｐ群Ｇが quasi-complete であるとは，Ｇに p-adic topology を入れたとき，すべてのＧの pure 部分群に対して，その closure がまた pure 部分群となることである．一方，すべての pure 部分群の closure が直和因子となるとき，ｐ群Ｇを torsion-complete という．直和因子は pure になるので，torsion-complete 全体は quasi-complete 全体に含まれる．

また一般のアーベル群Ｇについて，Ｔが quasi-complete [torsion-complete] であるとは，Ｔの各ｐパートが quasi-complete [torsion-complete] ｐ群であるときをいう．

一方，すべての部分群が purifiable となるｐ群Ｇは，［ＨＭ］の中で次のように特徴付けされている．

命題1．12．すべての部分群が purifiable となるp群Gは，有界群と加除群の直和となるときに限る．

（2）一般のアーベル群（mixed group）について

そこで一般のアーベル群（mixed group）について前述のことを考察してみた．まず，almost-dense の概念を次のように拡張した．

定義1．13．<almost-dense 部分群>　ある素数pを固定したとき，次の条件を満たすAをGの p-almost-dense 部分群という．Aを含む任意のGの p-pure 部分群Kに対して，G/K の torsion パート（T(G/A)と書く）はp可除群になる．そして各素数pに対して，AがGで p-almost-dense となるとき，AはGで almost-dense であるという．即ち，Aを含む任意のGの pure 部分群Kに対して，T(G/A)は可除群になることである．なおp加除群とは，固定された素数pに対して $pG=G$ となる群Gをいう．□

p群のときと同様に，次のように表現できる．

命題1．14．AがGで almost-dense [p-almost-dense] であることは，次のことと同値である．各素数p［素数p］とすべての非負整数nに対して，$p^nG[p] < A + p^{n+1}G$ が成立．□

n-th overhang を n-th p-overhang として，次のように定義した．

定義1．15．すべての非負整数 n に対して，Aの n-th p-overhang を次のように定義する．

$$V_{n,p}(G,\ A) = \frac{(A+p^{n+1}G) \cap p^nG[p]}{(p^nG[p] \cap A) + p^{n+1}G[p]}$$

同様に，ある非負整数mが存在して，$n \geqq m$ となるすべての整数nに対して，$V_{n,p}(G,\ A)=0$ が成り立つとき，AはGで eventually p-vertical 部分群であるといい，$m=0$ のとき単に p-vertical 部分群という．また，各素数pに対して，AがGで p-vertical であるとき，AはGで vertical であるという．

これらを使って pure [p-pure] hull の構造を次のように決めることができる．

命題1．16．AがGの purifiable [p-purifiable] 部分群であるとき，その pure [p-pure] hull Hは次のような構造になっている．

（1）各素数p［素数p］に対して，$n \geqq m(p)$ となるすべての整数nに対して，$V_{n,p}(G,\ A)=V_{n,p}(H,\ A)=0$ が成り立つ非負整数 m(p) が存在する（各素数pに対して，eventually p-vertical［素数pに対して，eventually p-vertical］である）．

（2）AがHの almost-dense [p-almost-dense] 部分群である．

（3）H/A は torsion ［p］群となる．

（4）$p^{m(p)}H[p] < A$．

maximal vertical [p-vertical] 部分群の概念は次のように拡張する．これを使うと以下の結果が導ける．

定義１．１７．<maximal vertical [p-vertical] 部分群>　ＡをＧの vertical [p-vertical] 部分群とするとき，Ａを含む vertical [p-vertical] 部分群Ｃで，C/A が torsion [p] 群となる部分群の極大なものが存在する．この部分群を，Ａを含む maximal vertical [p-vertical] 部分群という．この部分群の存在も，Ｚｏｒｎの補題で保証されている．□

命題１．１６．の（１）が，ＡがＧで purifiable [p-purifiable] であるための必要条件になっている。ｐ群のときと同様に，Ａが almost-dense [p-almost-dense] のときは，この条件は必要十分条件になる．

定理１．１８．ＡをＧの almost-dense [p-almost-dense] 部分群とする．そこでＡがＧの purifiable [p-purifiable] 部分群となるための必要十分条件は，各素数ｐ［素数ｐ］に対して，ＡがＧで eventually p-vertical 部分群となることである．

定理１．１９．すべての部分群が purifiable [p-purifiable] となるＧは，各素数ｐ［素数ｐ］に対して，G_pが有界群と加除群［ｐ加除群］の直和になるときに限る．

ｐ群のときと同様に，上で述べた必要条件が必要十分条件となる群Ｇを決定する問題が提起される．［ＢＣＭ］から，そのような群ＧのＴは，quasi-complete になることは導ける．しかしその逆が成り立つかどうかが不明である．そこでもう少しＧの条件を強めて，Ｔが torsion-complete のときは逆が成り立つことが証明できる．即ち次のような部分解答を得た．

定理１．２０．T(G) [G_p] が torsion-complete のとき，各素数ｐ［素数ｐ］に対して，eventually p-vertical となるＧの部分群は，purifiable [p-purifiable] 部分群となる．□

なお，purifiable 部分群と p-purifiable 部分群については，下記のような関係がある．

定理１．２１．Ｇの部分群Ａが，purifiable 部分群となることと，各素数ｐに対して，Ａが p-purifiable 部分群となることは同値である．□

定理１．２２．Ｈを purifiable 部分群Ａの pure hull とするとき，ＨはＡを法として，Ａの p-pure hull の直和になる．□

ｐ群の場合，pure hull は必ずしも同型にならないことは，よく知られている．そこで，pure [p-pure] hull の同型性について次のような結果を得た．

定理１．２３．ＡをＧの purifiable [p-purifiable] 部分群とするとき，Ａが torsion-free かつ vertical [p-vertical] ならば，すべてのＡの pure [p-pure] hull は同型になる．□

本章の最後に，torsion-free かつ purifiable 部分群の例を挙げる．この例が次章で述べるＡＤＥ群の例であり，ＡＤＥ群の発見への手がかりとなった．

例．p_k（$k=1, 2, \cdots$）を異なる素数とし，$\langle a_k \rangle$を位数p_kの巡回群とする．

$$T=\oplus\langle a_k\rangle$$

とすると，Tは $X=\Pi\langle a_k\rangle$の最大の torsion 部分群となる．そこで

$$b_0=(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$$

とし，b_kを次のように定義する．

j（$\neq k$）成分を $p_k x=a_j$ となる解とし，k成分は0とする．

このとき

$$p_k b_k=b_0-a_k$$

という関係式が成り立つ．そこで

$$G=\langle T, b_k : k=1, 2, \cdots\rangle$$

とおく．この群が分解しないことは，よく知られている．このとき次のことが成り立つ．

（1）$G=\langle b_k : k=0, 1, 2, \cdots\rangle$と書ける．

（2）$B_k=\langle b_k\rangle$とおくとき，B_kは T-high 部分群となる．

（3）B_0はGで almost-dense 部分群となる．しかし，B_kは素数p_j（$k\neq j$）に対して，p_j-almost-dense 部分群となるが，p_k-almost-dense とはならない．

（4）GはB_0の pure hull となる．

次に$C_k=\langle b_0, b_k\rangle$とおくと次のことが成り立つ．

（5）C_kはAの p_k-pure hull となり，$G/B_0=\oplus C_k/B_0\simeq\oplus Z(p_k{}^2)$ となる．

（6）$G=G_k\oplus\langle a_k\rangle$と書ける．ただし，$G_k$は$B_k$ の pure hull である．

（7）B_kはG_kで $T(G_k)$-high 部分群となり，G_kは$p_k B_k$の pure hull でもある．

次に$A_{rk}=\langle p_r{}^k b_0+a_k\rangle$とおくと，次のことが成り立つ．

（8）A_{rk}はGで T-high subgroup となる．

（9）GはA_{rk}の pure hull となる．

（10）$G/A_{rk}\simeq\oplus_{j\neq k}Z(p_j{}^2)\oplus Z(p_k{}^{r+2})$ となる．□

2．Torsion-free群について

ＡＤＥ群に入る前に，少し torsion-free 群の基本的な概念を紹介する．

Xを torsion-free 群とし，pを素数とする．xをXの元とするとき，

$$p^k y=x$$

を満たすyがXの元として存在する最大整数kをxの p-hight といい，$h_p(x)$ と書く．最大整数が存在しないとき$h_p(x)=\infty$と定義する．そこで，$p(1)$，$p(2)$，$\cdots$，$p(n)$，$\cdots$をすべての素数の列とするとき，xの各 $p(n)$-hight の列を次のように書く．

$$\chi(x)=(h_{p(1)}(x), h_{p(2)}(x), \cdots, h_{p(n)}(x), \cdots).$$

この$\chi(x)$をxの characteristic 又は，height-sequence という．

またこれは，非負整数と∞からなる ordered sequence である．

2つの characteristic が等しいことを対応する成分がそれぞれ等しいと定義する．

また $(k(1), k(2), \cdots)$ と $(m(1), m(2), \cdots)$ を2つの characteristic とするとき，すべてのnに対して，$k(n)\geq m(n)$ のとき $(k(1), k(2), \cdots)\geq(m(1), m(2), \cdots)$．さらに $(k(1), k(2), \cdots)\cup(m(1), m(2), \cdots)=(\max(k(1), m(1)), \max(k(2), m(2)), \cdots)$

$(k(1), k(2), \cdots) \cap (m(1), m(2), \cdots) = (\min(k(1), m(1)), \min(k(2), m(2)), \cdots)$
と定義すると，characteristic の集合は，束になる．

有理数体Ｑを加法についてのアーベル群と見る．そこでＱの次のような部分群Ｒを考える．

$$R = \langle p(n)^{-m(n)} : m(n) \leqq k(n),\ n = 1,\ 2,\ \cdots \rangle.$$

このときＲの中の元「１」は $(k(1), k(2), \cdots)$ という characteristic をもつ．従ってＸにおいて，Ｘの元ｘが　$\chi(x) = (k(1), k(2), \cdots)$　ならば，Ｘの中でｘから生成される部分群を　$Rx = \langle x \rangle_*$ と書く．

次に２つの characteristic の同値性を定義する．
$(k(1), k(2), \cdots)$ と $(m(1), m(2), \cdots)$ を２つの characteristic とするとき，有限値をとる有限個の成分を除いて，対応する成分が等しいとき，この２つは同値であると定義する．即ち

$$k(n) < \infty,\ m(n) < \infty,\ k(n) \neq m(n) \text{ となる } n \text{ は有限個である．}$$

または　$\Sigma_n | k(n) - m(n) | < \infty$　ただし，$\infty - \infty = 0$ と定義する．
characteristic の同値類をタイプと呼ぶ．タイプの集合も束になる．

タイプ τ は，$\tau = (k(1), k(2), \cdots)$ と書くことができる．そこで，$\chi(x)$ が τ に入るとき，$\tau(x) = \tau$ と書く．また，タイプ τ，κ の中にそれぞれ $(k(1), k(2), \cdots)$，$(m(1), m(2), \cdots)$ となる characteristic があって，
$(k(1), k(2), \cdots) \geqq (m(1), m(2), \cdots)$ を満たすとき，$\tau \gtrsim \kappa$ と定義する．またこのときタイプ τ，κ のそれぞれの中から任意に characteristic　$(t(1), t(2), \cdots)$，$(s(1), s(2), \cdots)$ を取ったとき，必ずしもすべてのｎに対して，$t(n) \gtrsim s(n)$ とはならない．
Ｘの元 x，y について，$mx = ny$ となるとき，$\tau(x) = \tau(y)$ となる．故にランク１の torsion-free 群はすべての元が同じタイプをもつ．従ってタイプでその群を表現することができる．一方タイプの同じランク１の torsion-free 群は同型である．またランク１の torsion-free 群は，Ｑの部分群と同型であることは，よく知られている．

ランク１の torsion-free 群の直和となる群を完全可約群（completely decomposable group 略してＣＤ群）という．この群は同型性を除いて分解は一意的である．
有限ランクのＣＤ群の有限拡大群をＡＣＤ群（almost completely decomposable group）という．ＡＣＤ群の研究が現在世界の主流で多くの研究がされている．

ＡＣＤ群Ｇについて，拡大される群を regulating subgroup といい，Ａと書くと，Ａのとり方によって G/A の形が変わってくることがある．
ハワイ大学のマーダー氏は，G/A が巡回ｐ群となるときについて，構造定理・存在定理・分類定理を与えた．

3. ADE群について

定義４．１．＜ＡＤＥ群＞　Ａを torsion-free 群とするとき，次の２つの条件を満たすＡの拡大群ＧをＡの almost-dense 拡大群（略してＡＤＥ群）という．

（１）ＡはＧで almost-dense 部分群である．

（２）ＡがＧの Ｔ-high 部分群となる．

このときＡをＧの moho 部分群と呼ぶ．□

前述の例において，ＧはB_0を moho 部分群とするＡＤＥ群である．（２）と（３）から必ずしもすべての Ｔ-high subgroup が moho 部分群とはならないことがわかる．また，G_kは，B_kかつp_kB_kの pure hull となっている．つまり moho 部分群の部分群が almost-dense 部分群になることもある．従って torsion 部分群が出るためには（２）の条件が必要となる．

また，ＧにおいてB_0を moho 部分群にとったときと，A_{rk}を moho 部分群にとったときでは，G/A の形が変わってくることがわかる．

補題４．２．G_pのランクと$(G/A)_p$のランクは等しい．□

そこで一番単純なＡＤＥ群を考える．Ｇの moho 部分群Ａのランクを１とし，G_pを巡回ｐ群とする．このような群を（１，１）型ＡＤＥ群と呼ぶことにする．このとき G/A のｐパートは巡回ｐ群となるか，ランク１の加除群（プリュファー群）になる．そして G/A ，Ｔは

$$G/A = \bigoplus_p (G/A)_p\ ,\qquad T = \bigoplus_p \langle y_p \rangle$$

という形に書ける．

Ａのタイプは上述のように，非負整数と∞の列で書ける．これをＧの moho 要素と呼び，M(G) と書く．同様にＴも，各素数ｐについて，その位数の指数をとると，非負整数の列で表すことができる．これを torsion 要素と呼び，T(G) と書く．また G/A についても，各素数ｐについて，その位数の指数をとる．ただしプリュファー群となるときは∞とする．これを巡回要素と呼び，C(G) と書く．またこれらの要素を総称して，ＣＴＭシステムと呼ぶ．

従って上の例の群は次のように表現できる．

B_0が moho subgroup のとき　　　A_{rk}が moho subgroup のとき

$$\begin{pmatrix} 2, & 2, & \cdots \\ 1, & 1, & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2, \cdots, 2, & r+2, & 2, \cdots \\ 1, \cdots, 1, & 1, & 1, \cdots \\ 0, \cdots, 0, & 0, & 0, \cdots \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{巡回要素} \\ \leftarrow \text{torsion 要素} \\ \leftarrow \text{moho 要素} \end{array} \\ \uparrow & \\ k\text{成分} & \end{array}$$

また，各要素のｐ成分をそれぞれ，M(G)(p), T(G)(p), C(G)(p) と書く．

構造定理　Gを（1，1）型ADE群とするとき，Gは次の条件を満たすCTMシステムをもつ．

$G_p=0$ となる素数pに対して，$T(G)(p)=C(G)(p)=0$.　　・・・（1）

$G_p\neq 0$ となる素数pに対して，$M(G)<\infty$ かつ $T(G)(p)<C(G)(p)$.　・・・（2）

具体的には，次のように書ける．

$T=\oplus_p\langle y_p\rangle$　ただし　$\langle y_p\rangle$の位数は$p^{T(G)(p)}$

$(G/A)_p=G(p)/A$ と書くとき，

$G(p)=\langle g_p, A : y_p=a_p+p^{C(G)(p)-T(G)(p)}g_p,\ a_p\in A\rangle$

または　$G(p)=\langle g_k, A : y_p=a_p+p\,g_{T(G)(p)},\ a_p\in A,\ p\,g_{k+1}=g_k,\ k=0,1,2,\cdots\rangle$

となる．□

存在定理　C，M，を非負整数と∞からなる characteristic の列とし，Tを非負整数のみからなる characteristic の列とする．これらが構造定理の（1），（2）をみたすとき，これらをCTMシステムとしてもつ（1，1）型ADE群が存在する．□

分類定理　（1，1）型ADE群GとHが同型であるための必要十分条件は次の3つの条件を同時に満足することである．

（1）M(G) と M(H) は同値である．（moho 部分群は同型）

（2）T(G)=T(H)．(最大 torsion 部分群は同型)

（3）C(G) と C(H) は同値である．□

例の群は分解しないが，Tが有限群のときは分解することはよく知られている．．そこで分解について次のような結果を得た．

分解定理　（1，1）型ADE群Gが分解するための必要十分条件は

$$M(G)\ \geq\ T(G).\ \square$$

（注）このときの大小関係は，すべての素数pに対して，$M(G)(p)\geq t(G)(p)$ということではなく，タイプの大小関係を指す．即ち，次の条件を満たす a　A が存在することである．

$$\chi(a)\geq T(G).$$

Tが有限群となる（1，1）型ADE群は次のように書いて一般性を損なわない．

$$\begin{pmatrix} C(1),C(2),\cdots,C(n),C(n+1),c(n+2),\cdots \\ T(1),T(2),\cdots,T(n),\ \ 0,\ \ \ \ 0,\ \ \cdots \\ M(1),M(2),\cdots,T(n),T(n+1),T(n+2),\cdots \end{pmatrix}$$

このときAには，moho 要素を characteristic とする元xが存在する．そこで

$$m=\prod_{i=1}^{n}\ |M(i)-T(i)|$$

とおき，a＝mxとすると，χ（a）≧T(G)となる．

参考文献

[BCM] K.Benabdallah, B.Charles, and A.Mader, Vertical subgroups of primary abelian groups. Can. J. Math. 43(1) (1991), 3-18.

[BI] K.Benabdallah and J.Irwin, On minimal pure subgroups. Publ. Math. Debrecen 23 (1976), 111-114.

[BO] K.Benabdallah and T.Okuyama, On purifiable subgroups of primary abelian groups. Comm. Algebra 19(1)(1991), 85-96.

[F] L.Fuchs, Infinite Abelian Groups, I, II. Academic Press, 1970 ans 1973.

[HM] P.Hill and C.Megibben, Minimal pure subgroups in primary abelian groups. Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 251-257.

[O] T.Okuyama, On purifiable subgroups in arbitrary abelian groups. Preprint.

[O] T.Okuyama, On almost-dense extension groups of torsion-free groups. Preprint.

ムーンシャインVOAの超?単純構成法

宮本雅彦

筑波大学数学

頂点作用素代数（略して VOA ）はボーチャードやフレンケル、レポウスキー、ミュアマン（略して、 FLM）が最初に与えた定義が非常に難しいために、多くの方に難解なものだと思われています。実際、頂点作用素代数は２次元の共形場理論そのものであり、完全に理解しようとすると難解なのは当然で、すべての頂点作用素代数を扱う場合にはこれらの定義を理解する必要があります。しかしながら、頂点作用素代数の研究は始まったばかりであり、特に組み合わせ論や有限群の立場から考えたとき、すべての頂点作用素代数ではなく、これら有限のものと関係した一部の頂点作用素代数を研究することも重要な価値を含んでいると思います。もっと、強く述べるなら、逆に、このような、有限性を持った頂点作用素代数の方が、現実の世界を表す理論物理にとって重要な理論のはずです。特に、これから述べる頂点作用素代数は、モジュラー関数と密接な関係があるメロモルフィックと呼ばれるもので知られているものをほとんど含んでおり、もっとも興味あり、有名なムーンシャイン頂点作用素代数もこの仲間です。ここで扱う頂点作用素代数は内部にアイジング模型と呼ばれるよく知られた共形場理論のテンソル積を含んでおり、この良く知られた頂点作用素代数の性質を使う事によって、頂点作用素代数の難解な定義を無視しようというのがこの講演の目的の一つです。述べている結果の証明に関しては、[M1], [M2], [M3] を参照してください。
話を大体５つに分けます。
(1) 目的
(2) Intertwining operator と Fusion rule の意味
(3) 設定
(4) Hamming code VOA とその表現
(5) 構成の概略

1 目的

最初にこれからの話の動機と利点を述べておきましょう。動機は当然、ムーンシャイン頂点作用素代数の構成です。FLM の本は難しかったので、それを簡単にしようというのが僕の目的です。トライアリティなどの自己同型の構成は一昨年の結果で、アイシング模型から自然に定義されるものであるもとを証明しました。残りはムーンシャイン頂点作用素代数そのものの意味のある構成です。その意味で今回の結果で当初の目的をほぼ達したと思うのですが、この結果は思いもかけない発展を与えてくれています。

一般に VOA を構成する場合、空間の定義はそれほど難しくはありません。それは単なるベクトル空間です。問題は各元に対する頂点作用素をどのように定義するかです。FLM

のムーンシャイン VOA の構成は、ラティスから構成された部分は分かりやすく表示していますが、それ以外の twisted 部分は、目に見えるような形では与えられておりません。これから紹介する方法は最初に組み合わせ論的な設定とそれに対応するある種の頂点作用素代数とその加群の集まりを与えると、そこから構成される頂点作用素代数が、ある意味で一意的に決まってしまっているような構成法なのです。フレンケル、FLM の本の中で不変内積を定義していますが、その定義する意味も、定義の仕方もこの構成法なら自然と一意的に決まっていまいます。その意味でタイトルに超単純構成と書いてあります。

大きな進展が期待出来るというのは、タイトルにムーンシャイン VOA の構成法と書いてありますが、多分この構成法はムーンシャイン VOA 代数だけでなく、多くの場合に適用できるのではないかと言う事です。ムーンシャイン VOA の様に、ランクが２４で、$V=\sum V_n$ と V を次数付き空間に分解すると、character

$$\sum \dim V_n q^{n-1}$$

がモジュラー関数

$$j(z)=q^{-1}+c+196884q+\cdots, \qquad q=e^{2\pi iz}$$

となるものがムーンシャイン頂点作用素を含めて 71 個だろうと予想されており、その characters がすべて計算されております。現在のところ、ラティスから構成したものと、そのツイストしたものとあと数個含めて ４０個程が知られているだけで、３０個程が全く分かっていません。これから述べる構成法を今年の５月に原田先生が主催されたモンスターコンファランスで発表したさい、この残りの頂点作用素代数のほとんどに対してもこの構成法が使えるのではないかと Tuite や Mason 氏が述べております。

2 フュージョン規則

頂点作用素代数の理論はヴィラソロ代数の拡張と言われており、ヴィラソロ代数の表現で成り立つ事が頂点作用素代数で成り立つかどうか、例えばテンソル積が定義できるかどうかなどがレポウスキーやその周辺の研究者によって研究されています。

僕自身の考え方はどちらかと言うと、ヴィラソロ代数の表現達を含めたものが頂点作用素代数だと考えています。即ち、レポウスキー達の様に頂点作用素代数の外部に加群を考えるよりは、頂点作用素代数（またはその拡張）の内部で物事を考える方が自然だという感覚です。

頂点作用素代数の加群を研究するときに重要なものに Fusion rule と呼ばれるものがあります。

これは頂点作用素代数を可換代数だと考えると分かりやすいものになります。しかも頂点作用素を理解する上で非常に役立つので、少し説明します。これから述べる解釈はグライス代数のある種のベキ等元が頂点作用素代数の位数２の自己同型を自然に定義するという一昨年の僕の論文の中で始めて述べたものです。

まず、任意の数 n と自然数 i に対して、２項係数 $\binom{n}{i}$ を

$$\binom{n}{i}=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

と定義し、2 項展開 $(x-z)^n$ を

$$(x-z)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^{n-i}(-z)^i$$

として定義します。注意することは n が自然数でない限り、$(x+y)^n$ と $(y+x)^n$ は異なります。次に、係数が $End(V)$ であるような 2 つの形式的ベキ級数 $a(z)=\sum a_n z^n$ と $b(z)=\sum b_n z^n$ に対して n 番目の正規積を

$$a(z)_n b(z) = Res_x\{(x-z)^n a(x)b(z) - (-z+x)^n b(z)a(x)\}$$

で定義します。ここで、$Res_x(\sum d_n x^n) = d_{-1}$ とします。これは自由場と呼ばれる量子場で定義されていた正規積を厳密に定義したものになっています。ここでは、形式的ベキ級数 $a(z)=\sum a_n z^n$ は任意の $v \in V$ に対して、十分大きな N を取ると $n > N$ に対しては $a_n v = 0$ となると言う条件を満足するものだけを扱います。この性質が無限和が出てくる形式的ベキ級数の積を定義可能にしてくれます。

まず、頂点作用素代数の本質を簡単に説明すると、物理の状態全体を表すフォック空間と呼ばれる各ホモジニアス空間 V_n が有限次元である次数付きの無限次元のベクトル空間 $V=\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ があり、各 $v \in V$ に対して、頂点作用素と呼ばれる係数が V の線形変換 v_n であるような形式的ベキ級数 $Y(v,z)=\sum v_n z^{-n-1}$ が対応して、
(1) 微分　$[L(-1), Y(v,z)] = \frac{d}{dz}Y(v,z)$
(2) 局所可換性:　2 つの v, u に対して、十分大きな自然数 N があって、

$$(z_1-z_2)^N\{Y(v,z_1)Y(u,z_2) - Y(u,z_2)Y(v,z_1)\} = 0$$

(3) 結合律:

$$Y(u_n v, z) = Y(u,z)_n Y(v,z)$$

が成り立つ事です。ここで、$L(-1)$ はヴィラソロ元と呼ばれる特殊な元 $\mathbf{w}$ の作用素 w_0 を表します。それ以外に、真空元 **1** の存在や、ヴィラソロ元の定義がありますが、ここでは省きます。詳細は、頂点作用素代数に関する文献を参照してください。

これは量子場理論の中で意味を全て持っており、例えば、(2) の局所可換性は特殊相対性理論の中の光速度不変（因果律）を意味しているものです。即ち、光速以上に離れた関係なら互いに情報は伝えないということになり、2 点での観測は順序に関係なく決まる、即ち、2 点での観測が可換（局所可換）となるというものです。

頂点作用素代数に置いては、局所可換性と微分の性質から結合律が出てくる事が知られていますが、以後の加群や Intertwining operator との関係を見るために加えて置きます。

頂点作用素代数の加群というのは次数付きのベクトル空間 $M=\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ で $v \in V$ に加群の頂点作用素と呼ばれる係数が M の線形変換 v_n^M であるような形式的ベキ級数

$$Y^M(v,z) = \sum v_n^M z^{-n-1}$$

が対応しており、
(1) 微分

$$[L(-1), Y^M(v,z)] = \frac{d}{dz}Y^M(v,z)$$

(2) 局所可換
$u, v \in V$ に対して

$$(z_1 - z_2)^N \{Y^M(v, z_1)Y^M(u, z_2) - Y^M(u, z_2)Y^M(v, z_1)\} = 0$$

(3) 結合律

$$Y^M(v_n u, z) = Y^M(v, z)_n Y^M(u, z)$$

が成り立つものです。
即ち、頂点作用素代数の頂点作用素の係数が $End(V)$ から $End(M)$ に変化したものと考えられます。

そして、3つの加群 $(M^1, Y^{M^1}), (M^2, Y^{M^2}), (M^3, Y^{M^3})$ に対して、Intertwining operator とは $u \in M^1$ の元に対して M^2 から M^3 への線形変換 $u'_n \in Hom(M^2, M^3)$ を係数とする形式的ベキ級数 $I(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{C}} u'_n z^{-n-1}$ であって、
(1) 微分

$$[L(-1), I(u, z)] = \frac{d}{dz} I(u, z)$$

(2) 局所可換
$v \in V, u \in M^1$ に対して、十分大きな N があって、

$$(z_1 - z_2)^N \{I(u, z_1)Y^{M_2}(v, z_2) - Y^{M_3}(v, z_2)I(u, z_1)\} = 0$$

(3) 結合律 $v \in V, u \in M^1$ に対して、

$$\begin{aligned} &I(v_n^1 u, z) = Y(v, z)_n I(u, z) \\ &= Res_x\{(x - z)^n Y^{M^3}(v, x)I(u, z) - (-z + a)^n I(u, z)Y^{M^2}(v, x)\} \end{aligned}$$

を満たすものである。ここで $Y^{M^1}(v, z) = \sum v_n^1 z^{-n-1}$ とします。

ここで、述べたいのは、頂点作用素代数の頂点作用素、加群の頂点作用素、Intertwining operator はほとんど同じだという事です。それでいながら、これから述べるように、Intertwining operator はそれほど多くない、即ち、頂点作用素は決して多くないという事です。

M^1, M^2, M^3 を固定すると、 Intertwining operators 全体はベクトル空間となります。これを $I\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ で表し、その元をタイプ $\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix}$ の Intertwining operator と呼びます。また、この線形空間の次元を $N_{M^1\ M^2}^{M^3}$ で表します。2つの既約加群 M^2, M^3 に対して、この次元を全て表示するために、

$$M^2 \times M^3 = \sum_W N_{W\ M^2}^{M^3} W$$

と表示します。ここで、 W は全ての既約加群を動くとします。

一般論はこれぐらいにしておきましょう。

これの応用を説明しておきましょう。(W,Y) を大きな頂点作用素代数とし、V を頂点作用素部分代数とします。$v,u\in V$ とすると、$Y(v,z)\in End(W)[[z,z^{-1}]]$ で、可換性を満たしているので、W は V の加群となります。話を簡単にするために、直既約だと仮定します。もし、W の中に V の部分加群として、M^1,M^2,M^3 をとってきます。このとき、M^1 は W の部分空間ですから、$u\in M^1$ に対して頂点作用素 $Y(u,z)\in End(W)[[z,z^{-1}]]$ があるのですが、これを M^2 の元だけに作用させ、しかも像を M^3 に制限した写像 $I(u,z)\in Hom(M^2,M^3)[[z,z^{-1}]]$ を考えます。これが先ほどのべた intertwining operator となることを一昨年証明しました [M1]。

この intertwining operator というのはそれほどあるわけではありません。一般理論では intertwining operator の次元は幾らでも大きくなのですが、大半は係数（次元）が 1 以下なのです。

例えば もっとも小さい頂点作用素代数の一つとして、2 次元可解格子模型の一つであるイジング模型 $L(\frac{1}{2},0)$ と呼ばれるものがあります。これは 中心電荷 $\frac{1}{2}$ の単純ヴィラソロ代数の表現に対応しています。これは既約加群は 3 つ $L(0),L(\frac{1}{2}),L(\frac{1}{16})$ しかなく、全ての加群はそれらの直和となることが知られています。また、その fusion rule は良く知られており、

$$\begin{aligned}&L(0)\times L(0)=L(0),\quad L(0)\times L(\tfrac{1}{2})=L(\tfrac{1}{2}),\quad L(0)\times L(\tfrac{1}{16})=L(\tfrac{1}{16})\\&L(\tfrac{1}{2})\times L(\tfrac{1}{2})=L(0),L(\tfrac{1}{2})\times L(\tfrac{1}{16})=L(\tfrac{1}{16})\\&L(\tfrac{1}{16})\times L(\tfrac{1}{16})=L(0)+L(\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

です。

これらはすべて係数が 0 または、1 ですし、特に上の 2 つはでてくる成分も 1 つです。

今 V を大きな頂点作用素代数とし、$L(\frac{1}{2},0)$ が内部にあるとしましょう。そうすると、V は $L(0)$ と $L(\frac{1}{2})$ と $L(\frac{1}{16})$ それぞれの homogeneous 空間 W^1,W^2,W^3 の直和に分解します。$W^i=\oplus U^i_j$ を $L(\frac{1}{2},0)$-既約加群の直和とします。0 でない intertwining operator を一つづつ固定してとって置きます。

$$I^i_{jk}(*,z)$$

$v\in W^c$ とすると、$Res_{|U^a_i}Y(v,z)_{|U^b_j}$ は intertwining operator となるので、最初に fusion rule の係数が 1 ですから、$I^a_b(v,z)$ のスカラー倍 $\lambda_{i,j}$ として書ける訳で、$Res_{W^a}Y(v,z)_{|W^b}$ は $(\lambda_{i,j})\otimes I^a_b(v,z)$ の形を取ります。

ですから、 v の頂点作用素は さきに intertwining operator を固定しておけば、各 v に対して 単なる行列 (λ_{ij}) が対応しているという行列表現の問題に変わります。

可換性も intertwining operators 同士の交換に関する関係を行列で解決できるかという問題に変わります。

3 設定

FLM の本一冊に相当することを説明しようとするわけですから、少し難しくなります。ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ を使って説明しますが、このような構造を持つものすべてに対して同じ様なことが成り立ちます。

$V^\natural$ は central charge (rank) が 2 4 ですが、この中に、中心電価 $\frac{1}{2}$ の互いに直交した 48 個の conformal vectors $e^1, ..., e^{48}$ があり、 $e^1 + ... + e^{48}$ が $V^\natural$ のヴィラソロ元となっています。中心電荷 $\frac{1}{2}$ の conformal vector e があると、それを含む最小の部分頂点作用素代数は $L(\frac{1}{2}, 0)$ と同型になります。言い替えると、$V^\natural$ の中に4 8個の $L(\frac{1}{2}, 0)$ のテンソル積 $W = \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$ が入っています。通常の代数の様に、代数のテンソル積 W の既約加群 Tは各 $L(\frac{1}{2}, 0)$ の既約加群のテンソル積なので、

$$L = \otimes_{i=1}^{48} L(h_i)$$

の形を持ちます。ここで h_i は $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ のどれかです。この順序付き数列 $(h_1, ..., h_{48})$ を W の highest weight row と呼ぶ事にしましょう。

一昨年に発表したように、中心電荷 $\frac{1}{2}$ の conformal vector e が存在すると、$L(0), L(\frac{1}{2})$ と同型な部分空間の上で 自明に作用し、$L(\frac{1}{16})$ と同型な部分空間の上で -1 倍として作用する線形変換τ_e を定義すると、これが頂点作用素代数の自己同型となります。

今の場合、互いに直交した 48 個の conformal vectors があるわけで、それから互いに可換な位数 2 の自己同型 τ_{e_i} がでてきます。それらが生成する自己同型群 を $P = < \tau_{e_i} : i = 1, ..., 48 >$ と置きましょう。ムーンシャイン頂点作用素代数の場合、P は位数 2^7 の elementary Abelian 2-group となっています。

一般に 頂点作用素代数 V が可換な自己同型群 P を持つと、次の様な固有空間への分解があります。

$$V = \oplus_{\chi \in ch(P)} V^\chi$$

ここで、$ch(P)$ は P の既約表現（一次表現）の集合で $V^\chi = \{v \in V : g(v) = \chi(g)v\}$ でその固有空間を表します。特に、 $V^{1_P} = V^P$ が P の元によって固定される元全体であり、V の頂点作用素部分代数となっており、V^χ はすべて V^P の既約加群となることが Dong, Mason によって示されています [DM]。

まず、この V^P の構造を見てみましょう。当然 $W = \oplus L(\frac{1}{2}, 0)$ は含まれているわけですが、τ_{e_i} の定義が $L(\frac{1}{16})$ の上で -1 倍なので、V^P は highest weight 行に $\frac{1}{16}$ がでてこない、即ち、 $h^i = 0, \frac{1}{2}$ だけのものからなっています。この場合 fusion rule を思い出してもらうと、ちょうど位数2の元と同じ関係ですし、 intertwining operator も簡単に $u, v \in L(\frac{1}{2})$ の場合には それ同士が skew commutativity

$$Y(u, z)Y(v, z) = -1Y(v, z)Y(u, z)$$

それ以外は可換となっているので、昨年発表したように、ある 頂点作用素超代数 $M = L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の 24 個のテンソル積の部分代数として構成できます。即ち、ある even linear binary code D があって

$$M_D = \oplus_{d=(d_1, ..., d_{48}) \in D} \otimes L(d_i/2)$$

として構成してくるのです [M2]。

本当は D の中心拡大が必要となりますがここでは、省いておきます。詳細は [M2] を参照してください。

ムーンシャイン頂点作用素代数の場合を考えます。まず、Miracle Octad Generator を使って構成したゴーレイコードを使って、リーチラティスを表示し、これから、48個の conformal vectors e^i を構成します。上で述べたように、これらから自己同型 τ_{e^i} が定義され、それら全体が生成する自己同型群を P とします。このとき、$(V^\natural)^P$ は性質のよい binary even linear code D がとれて、$(V^\natural)^P \cong M_D$ となります。このコード D のことを Moonshine Generator Code を呼び、MGC で表します。

3.1 MGC の構成

まず、D を与えましょう。これにより、頂点作用素代数 M_D が構成できます。

Lemma 3.1 MGC は 41 次元 *even linear code* で *minimal weight* は 4 である。MGC の直交補空間は *reflections* の半空間 4 つと 3 つの *colored block* と呼ばれる 16 点集合 4×4 *blocks, Bl, Gr, Rd* からなる。

実際には、

$$\mathrm{MGC}^\perp = <(1^{16}0^{32}), (0^{16}1^{16}0^{16}), (0^{32}1^{16}), (1^8 0^8)^3, (1^4 0^4)^6, (1^2 0^2)^{12}, (10)^{24}>$$

となります。

3.2 加群の highest weight rows

次に V^χ の部分を考えてみます。$\otimes L(\frac{1}{2},0)$-加群として分解して highest weight row $h = (h^1, ..., h^{48})$ を見ると、V^χ の定義から

$$\chi(\tau_{e_i}) = -1 \leftrightarrow h^i = \frac{1}{16}$$

であることがわかります。即ち、$h = (h^1, ..., h^{48})$ に対して、binary codeword $\tilde{h} = (\tilde{h}^i)$ を

$$h^i = \frac{1}{16} \to \tilde{h}^i = 1, h^i = 0, \frac{1}{2} \to \tilde{h}^i = 0$$

と定義すると、即ち、$\frac{1}{16}$ の場所を binary codeword で表示すると、V^χ の中の highest weight row は同じ binary codewords をもっており $\alpha_\chi = (a_i)$ で $\chi(\tau_{e^i}) = (-1)^{a_i}$ となっています。

$\chi \in ch(P)$ を動くと、binary code $B = \{\alpha_\chi : \chi \in ch(P)\}$ がでてくるのですが、intertwining operator の性質より、

Theorem 3.1 *B と MGC は直交している。*実際には、$B = \mathrm{MGC}^\perp$ であることが分かります。

Remark 1 MGC の直交補空間の *codeword* が $V^\natural$ における T-既約加群の $\frac{1}{16}$ の位置を与える。

4 つの reflections に注目し、一つの colored block MGC(1) だけに注目すると、$V^\natural$ は１６個の以下のタイプに分かれます。

				*	*			*		*			*	*	
*	*	*	*			*	*		*		*	*			*
*	*	*	*			*	*		*		*	*			*
				*	*			*		*			*	*	
				*	*			*		*			*	*	
*	*	*	*			*	*		*		*	*			*
				*	*			*		*			*	*	
*	*	*	*			*	*		*		*	*			*
				*	*			*		*			*	*	
				*	*			*		*			*	*	
*	*	*	*			*	*		*		*	*			*
*	*	*	*			*	*		*		*	*		*	*
				*	*			*		*			*	*	
				*	*			*		*			*	*	
				*	*			*		*			*	*	
				*	*			*		*			*	*	

4×4 点ブロックは上の形または その補集合の $*$ の位置に$\frac{1}{16}$ を持つ。上の 16 個の配置を 配置ブロックと呼ぶ事にします。

MGC の直交補空間の 1つの codeword に $\frac{1}{16}$ を持った空間は一次元ラティス $\mathbb{Z}a$: $(a,a)=1$ を使って $\mathbb{Z}(a/2)$ から構成した

$$(L(\frac{1}{2},0)+L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))\otimes(L(\frac{1}{2},0)+L(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))+L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})+L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})\otimes L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$$

の性質から $\{a_1,...,a_n\}$ を正規直交基底として、$< a_i+a_j, \frac{1}{2}(\sum a_i) >$ で張られる ラティスから構成される頂点作用素超代数の内部に構成できます。

4 ハミングコード VOA

コード VOA の中で、ムーンシャイン VOA を構成する上で最も重要なものは [8,4,4]-ハミングコード H_8 から構成されたもの M_{H8} です。これは非常にきれいな性質を持っており、特に、フュージョン規則が単純です。

Theorem 4.1 M_{H8} の既約加群 W の最高次ウエイトが$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ の中に入るとする。このとき、W は以下の *32* 個のどれかとなる。
(1) $H(\frac{1}{2},\alpha)$ $\quad\alpha\in\mathbb{Z}_2^8/H_8$
(2) $H(\frac{1}{16},\alpha)$ $\quad\alpha\in\mathbb{Z}_2^8/H_8$

Theorem 4.2 M を既約 M_{H8}-加群とすると、フュージョン積 $H(*,\alpha)\times M$ は既約加群となる。

この意味は非常に重要であり、$H(*,\alpha)$ を内部に含むとすると、頂点作用素代数や加群の頂点作用素がスカラー倍を除いて一意的に決まるという事です。特に、M_D からの作用が与えられた場合には、自由にスカラー倍がとれないので、頂点作用素代数としての構造は $V^P = M_D$ とその加群 V^χ 達から一意的に決まってしまうことを意味しています。

それ故、頂点作用素代数の構成の問題は、最初のコード D とその直交補空間 $D^\perp$ の生成系 $\{\alpha^i : i \in I\}$ に対して、適切な M_D-加群 $\{V^{\alpha^i} : i \in I\}$ を見つける問題に変わります。

5 MGC の自己同型

当然の事に、MGC は 4 つの reflections と 3 colored blocks の置換で不変である。ここで、1 colored block に制限して考える。これを MGC(1) とする。

Lemma 5.1 2 つの *reflections* ϕ_i, ϕ_j に対して、ϕ_i の上半平面に対してのみ ϕ_j を行う変換を ϕ_{ij} と書く。このとき、ϕ_{ij} は MGC を不変にする。

この変換は 4 次元空間上の線形変換を与え、全体は線形変換全体 $GL(4,2)$ を引き起こす。

これは 4 8 点集合の 4×4 上に対しても、$\frac{1}{16}$ の位置に関する 16 blocks に対しても線形変換を引き起こしている。

W を 既約 $M_{\rm MGC}$-加群で、$\frac{1}{16}$ の位置に関するコード β は MGC に直交しているとする。この時、次が成り立つ。

Lemma 5.2 ワード α に対して、

$$\delta_\alpha : \begin{cases} u^i \to -u^i \ for\ i \in \alpha \\ u^j \to u^j \ for\ j \notin \alpha \end{cases}$$

と定義すると、δ_α は $M_{\rm MGC}$ の自己同型となる。

特に、block の半空間 α に対する δ_α は $M_{\rm MGC}$ の自己同型としては自明な自己同型を与えるので、

Theorem 5.1 上記の ϕ_{ij} と δ_α 全体で、$Aut(M_{\rm MGC(1)}) \cong 2^6 GL(4,2)$ を生成する。

5.1 ラティス頂点作用素代数との対応

ハミングコード VOA を使っての構造の一意性から、容易に、$V^\natural$ の１６分割のうち、８個からなる部分がリーチラティス頂点作用素代数の部分代数となることや、４個からなる部分がリーチラティスと A_1^{24}型のラティスの共通部分の頂点作用素代数の部分代数となること、2 個からなる部分はさらにその部分代数であり、1 個はさらに部分代数であることが分かります。それ故、8 個を固定する適切な自己同型の集まりで、MGC(1) に制限して、$2^3GL(3,2)$ となるものを構成することができます。最後に、上の $2^3GL(3,2)$ を含む $GL(4,2)$ と同型な $Aut(M_{\rm MGC(1)}$ の部分群 G があることを示す。

5.2 自己同型を使っての構成

上の自己同型群 G を使って、リーチラティス VOA の部分代数として構成された 8 個の M_{MGC} の加群の中の一つ V^1 を固定し、さらに 8 個の加群を $(V^1)^g : g \in G$ によって構成する。上の性質から、$gh^{-1} \in 2^3GL(3,2)$ ならば、$(V^1)^g = (V^1)^h$ となるので、実際に、$\{(V^1)^g : g \in G\}$ は全部で１６個からなり、予定していた $M_{\mathrm{MGC(1)}}$ の１６個の既約 $M_{\mathrm{MGC(1)}}$-加群を与えます。

5.3 頂点作用素代数であることの証明

頂点作用素の定義を与えよう。

１６個配置ブロックから 2 ブロック u,v をとる。上の自己同型の元 g によってこの2元 u^g, v^g は左下の 2×2 ブロックに入っているとしてよい。ここは a_1^{24} 型のラティスから構成される頂点作用素代数の部分代数 $W_{a_1^{24}}$ として取ってこれることがわかるので、$u_n v$ の定義を $(u^g_n v^g)^{g^{-1}}$ として定義する。この $W_1 a_1^{24}$ は 48 個の conformal vectors に関する上の自己同型群のうち、この 2×2 ブロックを不変にするものを 自己同型として持つ事が簡単にわかるので、積 $u_n v$ の定義が g の取り方に依存しないことがわかる。

　局所可換の確認

１６個の配置ブロックから 3 ブロック u,v,w を取る。上の自己同型の元 g によって u^g, v^g, w^g は 4×2 ブロックに入っているとして良い。ここは先の頂点作用素の定義によって Leech lattice から定義される頂点作用素代数の untwisted part と一致する事がわかる。それ故、局所可換性が成り立っている。故に、u^g と v^g の w^g への作用が局所可換性を保っているので u と v の w への作用も局所可換である。証明終わり

5.4 ムーンシャイン VOA であることの証明

上で構成した頂点作用素代数 V は構成より、V_1 の部分が 0 であることが分かります。また、character は構成から分かるように、簡単に計算でき、ムーンシャイン頂点作用素代数と同じ、character を持つ事がわかります。この頂点作用素代数は内部にリーチラティス頂点作用素代数の部分代数 (untwisted 部分) を含んでいるので、それの conformal vectors が生成する自己同型を V は持っております。しかも、$M_{\mathrm{MGC(1)}}$ に制限すると $GL(4,2)$ となる自己同型も持っているので、$2^{1+24}.0$ 以上の自己同型を持つことが分かります。それ故、Hamming code VOA による表現が一致する事が確認できるので、頂点作用素の一意性より、ムーンシャイン VOA と同じものであることが証明できます。

6 まとめ

頂点作用素代数に興味を持たれた方の為に、上の構成に関して、色々関係した問題が考えられるので、思いつくままに書いてみます。

(1) Ising model 以外の minimal series unitary Virasoro VOA も有限個しか既約加群をもっておらず、その fusion rule も知られています。これらに関しても同じような方法を使って新しい VOA を構成出来ないでしょうか？

(2) また、今の設定では、ヴィラソロ元が central charge 1/2 の conformal vectors の和と

なっていますが、少しぐらい少なくても、なにか方法はないでしょうか？
(3) スーパー VOA に関してもなにか結果が出てくると思うのですが、この場合、 meromorphic であること（character が モジュラー不変）であることと、構造の関係を決定できるでしょうか？
(4) 上の方法により、数多くの有限自己同型群を持つ頂点作用素代数が構成できます。これらの自己同型群を決定してください。特に、散在型有限単純群を自己同型群として持つ頂点作用素代数を構成してください。
(5) ウエイトが必ず 8 の倍数であるような線形コード S を決定してください。
(6) 上のコードの生成元にどの様に、既約 $M_{S^\perp}$-加群を対応させると頂点作用素代数が構成できるのか、そのマニュアルを構成してください。
(7) 一つのコード S に対して、幾つの頂点作用素代数が構成出来るのかを決定してください。
(8) コードの包含関係と頂点作用素代数との間にどんな関係があるかを示してください。
(9) 上の方法で構成された頂点作用素代数が同型であるかどうかを判定する方法を示してください。

References

[CS] J. H. Conway and N. J. A. Sloane: "*Sphere Packings, Lattices and Groups*", Springer-Verlag, 1988

[DM] C. Dong and G. Mason, On quantum Galois theory, preprint..

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc.* **56** II (1994), 295-316.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, 1988.

[M1] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179**, (1996) 523-548

[M2] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. algebra* **181**, (1996) 207-222

[M3] M. Miyamoto, Representation theory of Code VOA and construction of VOAs, preprint.

Hadamard Matrices の作り方と Dihedral groups

木村 浩
愛媛大学理学部

Hadamard 行列に興味を持つのは次の事からのように思える。1つは Hadamard 行列の応用からくる興味。もう1つは desgin の研究からくるものでる。私の動機は後者のようである。

Desgin の研究において、存在定理と分類定理がまず求められるのはとうぜんである。(v,k,λ) を symmetric 2-design のパラメターとする。$n=k-\lambda$ と置く。次の v,n の関係式は良く知られている。

$$4n-1 \leq v \leq n^2+n+1$$

そこで、はじめにこの式の等号が成り立つ時の design を研究する事はごく自然である。この2つの場合を特に、Hadamard design, projective design と呼ぶ。Hadamard design の存在と Hadamard 行列の存在は同等である。

Design

Symmetric 2-Design

Hadamard Design	Projectiv Design
$v=4\alpha-1$	$v=\alpha^2+\alpha+1$
$k=2\alpha-1$	$k=\alpha+1$
$\lambda=\alpha-1$	$\lambda=1$

$\boxed{\text{Hadamard Design}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{Hadamard Matrix}}$

n 次の行列 $H = (\pm)$ が $H \cdot H^t = nI$ (I : *identy matrix*) を満たすとき H を n 次の Hadamard 行列という。定義より H の行の置換を行っても、-1 をかけても、Hadamard 行列である。(このようにして移り得る2つの行列を同値であると定義する) $n(>2)$ 次の Hadamard 行列が存在すれば n は4の倍数であることは容易に確かめることが出来る。

Hadamard 予想 4の倍数であるすべての n に対して n 次の Hadamard が存在する。

現在、存在の知られていない最小の n は $428(=53 \cdot 8+4)$ である。
分類問題 $n \leq 28$ のときできている。

n	1	2	4	8	12	16	20	24	27
# classes	1	1	1	1	1	5	3	60	487

$n=28$ のときの分類で幾つかの興味深い事実がわかった。自己同形群が自明なものが沢山存在する。Dihedral group of order 6 から構成されていると考える事ができる行列がある。後者を一般化した構成法が話の主題である。

以下は論文 [8] の抜粋である。

1 Observation of Hadamard matrices of order 28

A Hadamard matrix H of order n is an $n \times n$ matrix of $\pm 1's$ with $HH^t = nI$. It is well known that n is necessarily 1, 2 or a multiple of four. We say that two matrices M_1 and M_2 of same size are equivalent if there exists a signed permutation g of rows and columns of M_1 with $M_1^g = M_2$. A matrix which is equivalent to a Hadamard matrix is also a Hadamard matrix. We say that a set of four rows of H is a Hall set if the submatrix consisting of the four rows is equivalent to the following matrix:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + & J_m & J_m & J_m & J_m \\ + & + & - & - & J_m & J_m & -J_m & -J_m \\ + & - & + & - & J_m & -J_m & J_m & -J_m \\ + & - & - & + & -J_m & J_m & J_m & -J_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where J_m is the all $1's$ row vector of dimension $(n-4)/4$.

Let J be the square matrix of all $1's$. In this paper we say that $(H+J)/2$ is a Hadamard matrix and identify this with H. That is, a Hadamard matrix H of order n is an $n \times n$ matrix of $0, 1's$ such that the number of 1 contained in the sum of every two rows of H equals $n/2$.

The equivalence classes of Hadamard matrices of order ≤ 28 have been determined by Hall, Ito-Leon-Longyear and the author([2], [3], [4], [5], [6] and [7]). There are exactly 486 inequivalent Hadamard matrices of order 28 with Hall sets.

Let $D_{2p} = < x, y : |x| = p, |y| = 2, yxy = x^{-1} >$ be a dihedral group of order $2p$, where p is an odd integer. Let ZD_{2p} be the group ring of D_{2p} over the ring Z of integers. It is clear that ZD_{2p} is isomorphic to the factor ring of the non-commutative ring of two variable X, and Y over Z by the ideal generated by $X^p - 1, Y^2 - 1$ and $YXY - X^{p-1}$. We identify the natural images of X and Y in the factor ring with x and y, respectively. Furthermore we identify elements of ZD_{2p} with the corresponding matrices in the regular representation of ZD_{2p}. If $a = \sum_{g\in G} a_g g$ is an element of the group ring and A is its matrix representation, then A^T is the matrix that represents $\sum_{g\in G} a_g g^{-1}$.

The Hadamard matrix H_{450} of order 28 in [?] is equivalent to the following matrix

$$\begin{pmatrix}
1111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 111 \\
1100 & 111 & 111 & 111 & 111 & 000 & 000 & 000 & 000 \\
1010 & 111 & 111 & 000 & 000 & 111 & 111 & 000 & 000 \\
1001 & 000 & 000 & 111 & 111 & 111 & 111 & 000 & 000 \\
 & & & & & & & & \\
1110 & 110 & 000 & 101 & 001 & 101 & 010 & 101 & 100 \\
1110 & 011 & 000 & 110 & 100 & 110 & 001 & 110 & 010 \\
1110 & 101 & 000 & 011 & 010 & 011 & 100 & 011 & 001 \\
1110 & 000 & 101 & 010 & 110 & 001 & 110 & 100 & 110 \\
1110 & 000 & 110 & 001 & 011 & 100 & 011 & 010 & 011 \\
1110 & 000 & 011 & 100 & 101 & 010 & 101 & 001 & 101 \\
 & & & & & & & & \\
1101 & 010 & 110 & 110 & 000 & 101 & 100 & 010 & 101 \\
1101 & 001 & 011 & 011 & 000 & 110 & 010 & 001 & 110 \\
1101 & 100 & 101 & 101 & 000 & 011 & 001 & 100 & 011 \\
1101 & 101 & 001 & 000 & 101 & 100 & 110 & 110 & 001 \\
1101 & 110 & 100 & 000 & 110 & 010 & 011 & 011 & 100 \\
1101 & 011 & 010 & 000 & 011 & 001 & 101 & 101 & 010 \\
 & & & & & & & & \\
1011 & 010 & 101 & 010 & 011 & 110 & 000 & 101 & 001 \\
1011 & 001 & 110 & 001 & 101 & 011 & 000 & 110 & 100 \\
1011 & 100 & 011 & 100 & 110 & 101 & 000 & 011 & 010 \\
1011 & 110 & 001 & 011 & 001 & 000 & 101 & 010 & 110 \\
1011 & 011 & 100 & 101 & 100 & 000 & 110 & 001 & 011 \\
1011 & 101 & 010 & 110 & 010 & 000 & 011 & 100 & 101 \\
 & & & & & & & & \\
1000 & 101 & 100 & 010 & 101 & 101 & 001 & 001 & 111 \\
1000 & 110 & 010 & 001 & 110 & 110 & 100 & 100 & 111 \\
1000 & 011 & 001 & 100 & 011 & 011 & 010 & 010 & 111 \\
1000 & 100 & 110 & 110 & 001 & 010 & 110 & 111 & 010 \\
1000 & 010 & 011 & 011 & 100 & 001 & 011 & 111 & 001 \\
1000 & 001 & 101 & 101 & 010 & 100 & 101 & 111 & 100
\end{pmatrix} \qquad (2)$$

This Hadamard matrix contains the following submatrix of size 24:

$$\begin{pmatrix}
A & B & C & D \\
\overline{B} & A & D & \overline{C} \\
\overline{C} & \overline{D} & A & B \\
D & \overline{C} & B & \overline{A}
\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

where A, B, C and D are submatrices of size 6, $\overline{A} = J - A$, $\overline{B} = J - B$, $\overline{C} = J - C$ and $\overline{D} = J - D$. Furthermore A, B, C and D can be considered as elements of ZD_{2p}, with $p = 3$.

Thus the following problem arises.

Problem 1 *Find elements A, B, C and D of ZD_{2p} such that*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & J_{2p} & J_{2p} & J_{2p} & J_{2p} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & J_{2p} & J_{2p} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & J_{2p} & 0 & J_{2p} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & J_{2p} & J_{2p} & 0 \\ J_{2p}^t & J_{2p}^t & J_{2p}^t & 0 & A & B & C & D \\ J_{2p}^t & J_{2p}^t & 0 & J_{2p}^t & \overline{B} & A & D & \overline{C} \\ J_{2p}^t & 0 & J_{2p}^t & J_{2p}^t & \overline{C} & \overline{D} & A & B \\ J_{2p}^t & 0 & 0 & 0 & D & \overline{C} & B & \overline{A} \end{pmatrix} \tag{4}$$

is a Hadamard matrix.

In (4) A is a sum of $p-1$ elements, B, C, and D are sums of p elements of D_{2p}, respectively, since the fifth row is orthogonal to the first four rows. It is trivial that the matrix in Problem 1 is a Hadamard matrix if and only if the following conditions are satisfied:

Condition 2

$$AA^t + BB^t + CC^t + DD^t = (2p+1)I + (2p-2)J, \tag{5}$$

$$A\overline{B}^t + BA^t + CD^t + D\overline{C}^t = (2p-1)J, \tag{6}$$

$$A\overline{C}^t + B\overline{D}^t + CA^t + DB^t = (2p-1)J \tag{7}$$

and

$$AD^t + B\overline{C}^t + CB^t + D\overline{A}^t = 2pJ, \tag{8}$$

where $J = \sum_{g \in D_{2p}} g$ and $\overline{A} = J - A$.

For $p = 3$ the following elements:

$$\begin{cases} A = & 1 + x, \\ B = & 1 + x^2 + x^2 y, \\ C = & 1 + x^2 + xy, \\ D = & 1 + x^2 + y, \end{cases} \tag{9}$$

and

$$\begin{cases} A = & 1 + x, \\ B = & 1 + y + x^2 y, \\ C = & 1 + xy + x^2 y, \\ D = & 1 + y + xy, \end{cases} \tag{10}$$

satisfy Condition 2

2 Conditions for A, B, C and D

Let $\phi : ZD_{2p} \to Z(D_{2p}/ < x >)$ be the canonical homomorphism given by $g \mapsto \overline{g}$ and let $\phi(A) = a_1\overline{1} + a_2\overline{y}$, $\phi(B) = b_1\overline{1} + b_2\overline{y}$, $\phi(C) = c_1\overline{1} + c_2\overline{y}$ and $\phi(D) = d_1\overline{1} + d_2\overline{y}$. Then since $y^{-1} = y$ the image of equation (5) under ϕ is

$$(a_1\overline{1}+a_2\overline{y})^2+(b_1\overline{1}+b_2\overline{y})^2+(c_1\overline{1}+c_2\overline{y})^2+(d_1\overline{1}+d_2\overline{y})^2 = (2p+1)\overline{1}+(2p-2)p\overline{1}+(2p-2)p\overline{y}.$$

Simplifying this expression and equating coefficients of $\overline{1}$ and $\overline{y}$ yields the following proposition.

Proposition 3 *The equations :*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = p - 1, \\ b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = d_1 + d_2 = p, \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + d_1^2 + d_2^2 = 2p^2 + 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = p(p-1) \end{cases} \tag{11}$$

must be satisfied.

For $p \leq 27$, we have the following parameters.

図 1: a_i, b_i, c_i, d_i for $p \leq 27$

p	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	p	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2
3	2	0	1	2	1	2	1	2	19	12	6	9	10	9	10	9	10
5	2	2	1	4	3	2	3	2		10	8	7	12	11	8	9	10
7	4	2	5	2	3	4	3	4	21	12	8	13	8	11	10	11	10
9	6	2	5	4	5	4	5	4		12	8	9	12	9	12	9	12
	4	4	3	6	3	6	5	4		10	10	13	8	9	12	9	12
11	6	4	7	4	7	4	5	6	23	14	8	13	10	11	12	11	12
13	8	4	5	8	7	6	7	6		12	10	9	14	13	10	13	10
	6	6	9	4	7	6	7	6	25	14	10	15	10	11	14	13	12
	6	6	5	8	5	8	5	8		12	12	15	10	15	10	13	12
15	8	6	9	6	9	6	9	6		12	12	9	16	13	12	13	12
	8	6	5	10	7	8	7	8	27	16	10	15	12	15	12	13	14
17	10	6	7	10	7	10	9	8		14	12	17	10	13	14	13	14
	8	8	11	6	7	10	9	8		14	12	11	16	11	16	13	14

We consider several cases. For example, suppose $p = 5$ and $n = 44$.
In this case the following matrix is a submatrix of Hadamard matrix of order 44 which is the first row in (3):

$$(A, B, C, D) = \begin{pmatrix} 00110 & 01001 & 10000 & 01111 & 11001 & 01001 & 11001 & 01001 \\ 00011 & 10100 & 01000 & 10111 & 11100 & 10100 & 11100 & 10100 \\ 10001 & 01010 & 00100 & 11011 & 01110 & 01010 & 01110 & 01010 \\ 11000 & 00101 & 00010 & 11101 & 00111 & 00101 & 00111 & 00101 \\ 01100 & 10010 & 00001 & 11110 & 10011 & 10010 & 10011 & 10010 \\ 01001 & 00110 & 01111 & 10000 & 01001 & 11001 & 01001 & 11001 \\ 10100 & 00011 & 10111 & 01000 & 10100 & 11100 & 10100 & 11100 \\ 01010 & 10001 & 11011 & 00100 & 01010 & 01110 & 01010 & 01110 \\ 00101 & 11000 & 11101 & 00010 & 00101 & 00111 & 00101 & 00111 \\ 10010 & 01100 & 11110 & 00001 & 10010 & 10011 & 10010 & 10011 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

A, B, C and D express the following elements of ZD_{10}, respectively.

$$\begin{cases} A = & & +x^2 & +x^3 & & +xy & & & +x^4y, \\ B = & 1 & & & & +xy & +x^2y & +x^3y & +x^4y, \\ C = & 1 & +x & & +x^4 & +xy & & & +x^4y, \\ D = & 1 & +x & & +x^4 & +xy & & & +x^4y. \end{cases} \tag{13}$$

In this case the following assumption is also satisfied.

Assumption 4

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 \textit{ and } D_2 \textit{ are central elements in } ZD_{2p}. \tag{14}$$

In the general case we consider Problem 1 under this assumption. It seems that this assumption is not so strong.

Theorem 5 *If $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ and D_2 are central elements in ZD_{2p}, then Condition* **??** *simplifies to the following:*

$$A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2 + D_1^2 + D_2^2 = (2p+1) + (2p-2)J_1, \tag{15}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = (p-1)J_1, \tag{16}$$

where $J_1 = \sum_{g \in <x>} g$.

Proof Since $A_1^t = A_1, A_2^t = A_2$ and so on, it is easy to show that equation (5) is obtained from equations (15) and (16). Since $A\overline{B}^t = A(J-B)^t = A(J-B) = (a_1+a_2)J - AB$, we have

$$A\overline{B}^t + BA^t = (a_1 + a_2)J = (p-1)J,$$

$$CD^t + D\overline{C}^t = (d_1 + d_2)J = pJ.$$

This implies equation (6). Equations (7) and (8) are similarly obtained. □

3 Examples of Hadamard matrices

In this section we give some examples of Hadamard matrices for some p. Unfortunately we can not find a general solution of Problem 1. However the following examples show the success of this technique. For each example we write coefficients of elements in ZD_{2p}. For example, for $p = 7$ (A_1 : 0 0 1 1) represents $A_1 = x^2 + x^3 + x^{-3} + x^{-2}$ and (B_1 : 1 1 0 1) represents $B_1 = 1 + x^1 + x^3 + x^{-3} + x^{-1}$.

Example 1. $p = 7$ and $n = 8 \cdot 7 + 4 = 60$.

$$\begin{cases} A_1 : 0\ \ 011 & A_2 : 0\ \ 100 \\ B_1 : 1\ \ 101 & B_2 : 0\ \ 100 \\ C_1 : 1\ \ 010 & C_2 : 0\ \ 110 \\ D_1 : 1\ \ 100 & D_2 : 0\ \ 110 \end{cases}$$

Example 2. $p = 9$ and $n = 8 \cdot 9 + 4 = 76$.

$$\begin{cases} A_1 : 0\ \ 0111 & A_2 : 0\ \ 0100 \\ B_1 : 1\ \ 1001 & B_2 : 0\ \ 0101 \\ C_1 : 1\ \ 0101 & C_2 : 0\ \ 1100 \\ D_1 : 1\ \ 1010 & D_2 : 0\ \ 1100 \end{cases}$$

Example 3. $p = 13$ and $n = 8 \cdot 13 + 4 = 108$.

$$\begin{cases} A_1 : 0\ \ 10011\ \ 1 & A_2 : 0\ \ 01100\ \ 0 \\ B_1 : 1\ \ 00010\ \ 1 & B_2 : 0\ \ 11101\ \ 0 \\ C_1 : 1\ \ 01001\ \ 1 & C_2 : 0\ \ 01001\ \ 1 \\ D_1 : 1\ \ 10110\ \ 0 & D_2 : 0\ \ 10110\ \ 0 \end{cases}$$

Example 4. $p = 17$ and $n = 8 \cdot 17 + 4 = 140$.

$$\begin{cases} A_1 : 0\ \ 11010\ \ 001 & A_2 : 0\ \ 11010\ \ 001 \\ B_1 : 1\ \ 11101\ \ 001 & B_2 : 0\ \ 10000\ \ 110 \\ C_1 : 1\ \ 01000\ \ 110 & C_2 : 0\ \ 11111\ \ 000 \\ D_1 : 1\ \ 01101\ \ 001 & D_2 : 0\ \ 10111\ \ 000 \end{cases}$$

Example 5. $p = 41$ and $n = 8 \cdot 41 + 4 = 332$.

$$\begin{cases} A_1 : 0\ \ 10000\ \ 10111\ \ 01101\ \ 10001 \\ A_2 : 0\ \ 01111\ \ 01000\ \ 10010\ \ 01110 \\ B_1 : 1\ \ 01000\ \ 11101\ \ 10100\ \ 11111 \\ B_2 : 0\ \ 10111\ \ 00010\ \ 01011\ \ 00000 \\ C_1 : 1\ \ 10010\ \ 10001\ \ 00011\ \ 11110 \\ C_2 : 0\ \ 10010\ \ 10001\ \ 00011\ \ 11110 \\ D_1 : 1\ \ 10110\ \ 01001\ \ 11100\ \ 10100 \\ D_2 : 0\ \ 10110\ \ 01001\ \ 11100\ \ 10100 \end{cases}$$

$p = 3.5.7.9.11.17.19.21.25.29.37.41.47.61$ のとき、ここでの方法で Hadamard 行列が構成できている。

参考文献

[1] M. Hall,Jr., *Combinatorial Theory*, Ginn(Blaisdell) Boston, 1967.

[2] ——, Hadamard matrices of order 16, *J. P. L. Research Summary, 36–10,* Vol. 1(1961), pp. 21–26.

[3] ——, Hadamard matrices of order 20, *J. P. L. Technical Report,* pp. 32–761(1965).

[4] N. Ito, J. S. Leon and J. Q. Longyear, Classification of 3-(24,12,5) designs and 24-dimensional Hadamard matrices, *J. Combin. Theory(A),* Vol. 27(1979), pp. 289–306.

[5] H. Kimura, New Hadamard matrix of order 24, *Graphs and Combin.,* Vol. 5(1989), pp. 236–242.

[6] ——, Classification of Hadamard matrices of order 28 with Hall sets, *Discrete Math.,* Vol. 128(1994), pp. 257–268.

[7] ——, Classification of Hadamard matrices of order 28, *Discrete Math.* Vol. 133(1994), pp. 171–180.

[8] ——, Hadamard matrices and dihedral groups, *Design, Codes and Cryptography,* Vol. 9(1996), pp. 1–7.

The determinant of a hypergeometric period matrix

ANTOINE DOUAI

Unité associée au CNRS 168, Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2 FRANCE

HIROAKI TERAO *

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo, 060 JAPAN

1 Introduction

Let $f_1, \ldots, f_p$ be polynomials with real coefficients of degree one which define an arrangement $\mathcal{A}$ of hyperplanes in $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$. Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ complex numbers. Let $U_\alpha = f_1^{\alpha_1} \cdots f_p^{\alpha_p}$. Varchenko ([V1, Theorem 1.1], [V2]) calculated, for arrangements of hyperplanes in general position, the determinant of a (period) matrix $\mathsf{PM}(\mathcal{A}, \alpha)$ whose entries are (hypergeometric) integrals $\int_\Delta U_\alpha \phi$, where Δ runs over the set $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ of bounded connected components of $\mathbb{R}^n - \bigcup_{i=1}^p \{f_i = 0\}$ and the n-form ϕ runs over the set $\Phi^p(\mathcal{A}) = \{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} df_{i_1}/f_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_n}/f_{i_n} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_n \leq p\}$. Since $|\mathsf{Ch}(\mathcal{A})| = |\Phi^p(\mathcal{A})| = \binom{p-1}{n}$, the period matrix $\mathsf{PM}(\mathcal{A}, \alpha)$ is of size $\binom{p-1}{n} \times \binom{p-1}{n}$. The formula by Varchenko expresses the determinant of $\mathsf{PM}(\mathcal{A}, \alpha)$ by the product of critical values and a certain function, called the Beta function $B(\mathcal{A}, \alpha)$ of the arrangement. The Beta function $B(\mathcal{A}, \alpha)$ is explicitly given as an alternating product of Gamma functions whose arguments are appropriate linear combinations of the parameters α_i. In the general case, Varchenko conjectured an analogous explicit formula [V2, 6.3 Fundamental conjecture] and proved it for normal-crossing arrangements [V1, Theorem 1.4] and arrangements in general position at infinity [V2, Theorem 6.1]. Note that this determinant can also regarded as "Wronskian" of a certain system of partial differential equations (cf. for example [Ki]).

More recently, F. Loeser and C. Sabbah ([LS]), gave a general formula for such a determinant. In this formula enters the characteristic polynomial of some monodromies associated with the family $f_1, \cdots, f_p$ of polynomials. Since the bases of cycles and forms are not specified, there are some unknowns in their result and our purpose is to remove them. In order to do that, we use the βnbc-bases of the cohomology defined in [FT, Theorem 3.9] using Ziegler's β**nbc**-bases [Z, 1.3]. The calculation of the determinant of the period matrix in a β**nbc**-basis can be done by using recurrence (deletion-restriction) and by studying zeros and poles of the determinant in terms of the non-resonance set. In the end, we show that the conjecture announced by Varchenko is true for any arrangement for an arbitrary βnbc-basis.

*second author partially supported by NSF Grant DMS9504457

2 Arrangements

In this section we review results from [FT].

2.1

Let $f_1, \ldots, f_p$ be linear polynomials defined on the n-dimensional complex affine space V. Let I denote $\{1, \ldots, p\}$ and $\mathcal{A}$ be the arrangement $\{H_i\}_{i \in I}$ where $H_i = \ker f_i$ is the hyperplane defined by f_i.

Definition 2.1.1 *An **edge** of $\mathcal{A}$ is a nonempty intersection of some of its hyperplanes.*

Let $L(\mathcal{A})$ denote the set of all these edges. $L(\mathcal{A})$ is partially ordered by reverse inclusion. The maximal elements of $L(\mathcal{A})$ all have the same codimension, which we denote by r. Agree that $V \in L(\mathcal{A})$ which is the unique minimum element.

Definition 2.1.2 *(i) $\mathcal{A}$ is said to be **essential** if $r = n$ (in particular $| I | \geq n$). (ii) $\mathcal{A}$ is said to be **real** if the polynomials f_i all have real coefficients.*

Definition 2.1.3 *An arrangement $\mathcal{A}$ is said to be in **general position** if, for all subarrangement $\{H_{i_1}, \cdots, H_{i_k}\}$ of $\mathcal{A}$ codim $(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}) = k$ if $1 \leq k \leq n$ and $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} = \emptyset$ if $k > n$. An arrangement $\mathcal{A}$ is said to be in **general position at infinity** if, for all subarrangement $\{H_{i_1}, \cdots, H_{i_k}\}$ of $\mathcal{A}$, $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k} \neq \emptyset$ for $k \leq n$. It is said to be **normal** if $\cup H$ is a normal crossing divisor in V.*

Notation 2.1.4 *(i) Let*

$$M(\mathcal{A}) = V - \cup_{i \in I} H_i$$

and, if $\mathcal{A}$ is real,

$$M_{\mathbf{R}}(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}) \cap V_{\mathbf{R}}$$

where $V_{\mathbf{R}}$ denote the real part of V.
(ii) If $\mathcal{A}$ is real, let $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ denote the set of all n-dimensional bounded components of $M_{\mathbf{R}}(\mathcal{A})$ and $\beta(\mathcal{A})$ its cardinality.

Until the end of this paper we suppose $\mathcal{A}$ real and essential.

2.2 Linear orders

Let $i_0 \in I$. We define a linear order $<_{i_0}$ in $\mathcal{A}$ putting $H_i <_{i_0} H_j$ if $i < j$, $i, j \neq i_0$, and $H_i <_{i_0} H_{i_0}$ for all $i \in I - \{i_0\}$.

Remark 2.2.1 *(i) $<_p$ is the standard order defined in* [OT, page 67].
(ii) If $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ is a subarrangement which do not contains H_{i_0}, it inherits the standard order.

2.3 Non-resonant weights

Let $F \in L(\mathcal{A}) - \{V\}$ be an edge. Define

$$I(F) = \{i \in I \mid F \subseteq H_i\}.$$

Definition 2.3.1 *The edge F is called* ***dense*** *if the arrangement*

$$\{H_i \mid i \in I(F)\}$$

is not decomposable [STV, Section 2], *that is, the arrangement is not a product of two nonempty arrangements.*

Let $\mathbb{P}^n$ be complex projective space, which is a compactification of $V = \mathbb{C}^n$. Define the arrangement $\mathcal{A}_\infty$ of projective hyperplanes by

$$\mathcal{A}_\infty = \{\overline{H}_1, \overline{H}_2, \dots, \overline{H}_p, \overline{H}_\infty\},$$

where $\overline{H}_i$ is the projective closure of H_i $(1 \leq i \leq p)$ and $\overline{H}_\infty = \mathbb{P}^n - \mathbb{C}^n$. Let $L(\mathcal{A}_\infty)$ be the collection of nonempty intersections of projective hyperplanes in $\mathcal{A}_\infty$. Define $L_-(\mathcal{A}_\infty)$ (resp. $L_+(\mathcal{A}_\infty)$) to be the set of edges of $L(\mathcal{A}_\infty)$ contained (resp. not contained) in $\overline{H}_\infty$. Then $L(\mathcal{A}_\infty) = L_-(\mathcal{A}_\infty) \cup L_+(\mathcal{A}_\infty)$ (disjoint). Cover $\mathbb{P}^n$ by the standard affine opens $U_0, U_1, \dots, U_n$, each of which is isomorphic to $\mathbb{C}^n$. Let $\mathcal{A}_i$ $(0 \leq i \leq n)$ be the arrangement in $U_i \simeq \mathbb{C}^n$ obtained by restricting each projective hyperplane in $\mathcal{A}_\infty$ to U_i. Let $F \in L(\mathcal{A}_\infty) - \{\mathbb{P}^n\}$. We say that F is **dense** if $F \cap U_i$ is dense in $\mathcal{A}_i$ for $0 \leq i \leq n$ with $F \cap U_i \neq \emptyset$. (cf. [STV, Section 3].)

Let $\overline{I} = \{1, \dots, p, \infty\}$. For $F \in L(\mathcal{A}_\infty)$ define

$$\overline{I}(F) = \{i \in \overline{I} \mid F \subseteq \overline{H}_i\}.$$

To each polynomial f_i (and therefore to each hyperplane H_i), one associates a complex number α_i. These numbers are called **weights**. Define $\alpha_\infty = -\sum_{i=1}^p \alpha_i$. For $F \in L(\mathcal{A}_\infty) - \{\mathbb{P}^n\}$, let $\alpha(F)$ be the sum of α_i with $i \in \overline{I}(F)$. In other words, for $F \in L_+(\mathcal{A}_\infty)$,

$$\alpha(F) = \sum_{i \in I(F)} \alpha_i,$$

and, for $F \in L_-(\mathcal{A}_\infty)$,

$$\alpha(F) = \alpha_\infty + \sum_{j \in I \cap \overline{I}(F)} \alpha_i = -\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in I \cap \overline{I}(F)} \alpha_i = -\sum_{j \in I - \overline{I}(F)} \alpha_i.$$

Define the **resonance set** of $\mathcal{A}$ by

$$\mathrm{Rsn}(\mathcal{A}) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p \mid \alpha(F) \in \mathbb{Z} \text{ for some dense edge } F \in L(\mathcal{A}_\infty)\}.$$

It is the union of a locally finite infinite family of hyperplanes.

Definition 2.3.2 *We say that the weights $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ are* ***non-resonant*** *if $\alpha \notin$* $\mathrm{Rsn}(\mathcal{A})$. *In other words, the weights α are non-resonant if $\alpha(F) \notin \mathbb{Z}$ for each dense edge $F \in L(\mathcal{A}_\infty)$.*

2.4 βnbc-bases

Let $i_0 \in I$. We define the linear order $<_{i_0}$ in $\mathcal{A}$.

A subset $\{H_i\}_{i\in J}$ of $\mathcal{A}$ is **dependent** if $\cap_{i\in J} H_i \neq \emptyset$ and $\mathrm{codim}(\cap_{i\in J} H_i) < |J|$. A subset of $\mathcal{A}$ which has nonempty intersection and is not dependent is called **independant**. Maximal independent sets are called **bases**. Every base has cardinality n.

A k-tuple $S = (H_1, \cdots, H_k)$ is a **circuit** if $(H_1, \cdots, H_k)$ is dependent and if, for each l, $1 \leq l \leq k$, the $(k-1)$-tuple $(H_1, \cdots, \widehat{H_l}, \cdots, H_k)$ is independent. A k-tuple S is a **broken circuit** if there exists $H <_{i_0} min(S)$ such that $\{H\} \cup S$ is a circuit, where $min(S)$ denotes the minimal element of S for $<_{i_0}$.

The collection of subsets of $\mathcal{A}$ having nonempty intersection and containing no broken circuits is denoted by **BC**. **BC** consists of independent sets. Maximal (with respect to inclusion) elements of **BC** are bases of $\mathcal{A}$ called **nbc**-bases.

A **nbc**-basis $B = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_n})$ is **ordered** if $H_{i_1} <_{i_0} H_{i_2} <_{i_0} \cdots <_{i_0} H_{i_n}$.

We denote by $\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$ the set of all ordered **nbc**-bases of $\mathcal{A}$. We introduce a linear order in $\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$ using the lexicographic order on the hyperplanes read from right to left.

Definition 2.4.1 *A basis B is called β*nbc*-basis if B is a* **nbc***-basis and if, for every $H \in B$, there exists $H' <_{i_0} H$ such that $(B - \{H\}) \cup \{H'\}$ is a base.*

Notation 2.4.2 *Denote by $\beta\mathrm{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$ the set of all β*nbc*-bases, ordered by $<_{i_0}$.*

Remark 2.4.3 *(i) $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$ inherits the order defined on* $\mathrm{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$.
(ii) In what follows, we omit the index i_0 when the linear order on $\mathcal{A}$ is the standard order.

The definition and basic properties of the βnbc-bases are due to Ziegler [Z].

Definition 2.4.4 *If $B = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_n}) \in \beta\mathrm{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$, let*

$$F_j = \bigcap_{k=j+1}^{n} H_{i_k}$$

for $0 \leq j \leq n-1$ and $F_n = V$. Define

$$\xi(B) = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n),$$

which is a flag of affine subspaces of V with $\dim F_j = j$ $(0 \leq j \leq n)$. *This flag $\xi(B)$ is called the β***nbc-flag** *associated with B.*

Notation 2.4.5 *For $(i_1, \cdots, i_k) \subseteq I$, $\omega_{i_1\cdots i_k} = df_{i_1}/f_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}/f_{i_k}$. If $F \in L(\mathcal{A}) - \{V\}$, define*

$$I(F) = \{i \in I \mid F \subseteq H_i\},$$

and

$$\omega_\alpha(F,\mathcal{A}) = \sum_{i\in I(F)} \alpha_i\omega_i.$$

For $B = (H_{i_1},\cdots,H_{i_n}) \in \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$, *let* $\xi(B) = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$ *be the associated flag. Define*

$$\Xi(B,\mathcal{A}) = \omega_\alpha(F_0,\mathcal{A}) \wedge \cdots \wedge \omega_\alpha(F_{n-1},\mathcal{A}).$$

Definition 2.4.6 *If* $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) = \{B_1,\cdots,B_{\beta(\mathcal{A})}\}$ *and* $\phi_i^{i_0} = \phi_i^{i_0}(\mathcal{A}) = \Xi(B_i,\mathcal{A})$, *define*

$$\Phi^{i_0}(\mathcal{A}) = \{\phi_1^{i_0},\cdots,\phi_{\beta(\mathcal{A})}^{i_0}\}.$$

Define

$$I'_{i_0} = I - \{i_0\}$$

and

$$\mathcal{A}'_{i_0} = \{H'_i\}_{i\in I'_{i_0}} \text{with } H'_i = H_i.$$

Let

$$\mathcal{A}''_{i_0} = \{H_i \cap H_{i_0} \mid i \in I'_{i_0}, H_i \cap H_{i_0} \neq \emptyset\}.$$

Then $\mathcal{A}''_{i_0}$ is an arrangement of hyperplanes in H_{i_0}. The linear order on $\mathcal{A}'_{i_0}$ is inherited from $\mathcal{A}$. If $H'' \in \mathcal{A}''_{i_0}$, let $\nu(H'')$ be the smallest hyperplane of $\mathcal{A}'_{i_0}$ containing H''. We order $\mathcal{A}''_{i_0}$ setting $H'' < K''$ if and only if $\nu(H'') <_{i_0} \nu(K'')$.

Remark 2.4.7 $\mathcal{A}'_{i_0}$ *and* $\mathcal{A}''_{i_0}$ *are equipped with standard orders.*

Let

$$I''_{i_0} = \{i \in I'_{i_0} \mid H_i = \nu(H'') \text{ for some } H'' \in \mathcal{A}''_{i_0}\}.$$

To each $i \in I'_{i_0}$ (or $i \in I''_{i_0}$), we associate the weights $\alpha'_i := \alpha_i$ (resp. $\alpha''_i := \sum \alpha_k$ where the sum runs over all the $H'_k \in \mathcal{A}'_{i_0}$ such that $H''_i \subset H'_k$).

There is an inductive definition (deletion-restriction) of $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$:

Proposition 2.4.8 (Ziegler[Z, Theorem 1.5] [FT, Theorem 2.4]) *Let* $(\mathcal{A},\mathcal{A}'_{i_0},\mathcal{A}''_{i_0})$ *be the triple defined above. Suppose that* $\mathcal{A}'_{i_0}$ *is essential. Then*

$$\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) = \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0}) \cup \{(\nu(B''),H_{i_0}) \mid B'' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})\}$$

where $\nu(B'') = (\nu(H''_1),\cdots,\nu(H''_k))$ *if* $B'' = (H''_1,\cdots,H''_k)$.

Remark 2.4.9 *Write* $\overline{\beta\mathbf{nbc}}(\mathcal{A}''_{i_0}) = \{(\nu(B''),H_{i_0}) \mid B'' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})\}$. *Elements of* $\beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0})$ *are always less than elements of* $\overline{\beta\mathbf{nbc}}(\mathcal{A}''_{i_0})$.

Lemma 2.4.10 *If* $B \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0})$, *then* $\Xi(B,\mathcal{A})_{|\alpha_{i_0}=0} = \Xi'(B,\mathcal{A}'_{i_0})$.

Proof. Let $F \in L(\mathcal{A})$. If $i_0 \notin I(F)$, then $\omega_\alpha(F,\mathcal{A}) = \omega_\alpha(F,\mathcal{A}'_{i_0})$ and if $i_0 \in I(F)$, then $\omega_\alpha(F,\mathcal{A}) = \omega_\alpha(F,\mathcal{A}'_{i_0}) + \psi\alpha_{i_0}\omega_{i_0}$ for some form ψ. □

Lemma 2.4.11 *Let $B'' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})$ and $B = (\nu(B''), H_{i_0}) \in \overline{\beta\mathbf{nbc}}(\mathcal{A}''_{i_0})$. Then the residue of $\Xi(B,\mathcal{A})$ along H_{i_0} is equal to $\Xi(B'',\mathcal{A}''_{i_0})$.*

Proof. The last factor of $\Xi(B,\mathcal{A})$ is $\alpha_{i_0}\omega_{i_0}$. Since the product is the exterior one, it follows that $\alpha_{i_0}\omega_{i_0}$ may be removed as a summand from all the other factors of the product without changing its value. Taking residue of this rewritten product removes the factor $\alpha_{i_0}\omega_{i_0}$ and restricts the remaining terms to H_{i_0}. The residue is now just $\Xi(B'',\mathcal{A}''_{i_0})$. □

Example 2.4.12 *Let $\mathcal{A}$ be an arrangement in general position. Consider the standard order $<_p$. Then $\beta(\mathcal{A}) = \binom{p-1}{n}$.*

$$\beta\mathbf{nbc}_p(\mathcal{A}) = \{(H_{i_1},\ldots,H_{i_n}) \mid 1 < i_1 < \cdots < i_n \le p\},$$

and

$$\Phi^p(\mathcal{A}) = \{\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_n}\omega_{i_1\cdots i_n} \mid 1 < i_1 < \cdots < i_n \le p\}.$$

Example 2.4.13 *Let $\mathcal{A} = \{H_i\}_{1\le i\le 4}$ with*

$$f_1(x,y) = x-y, f_2(x,y) = 1-x, f_3(x,y) = y, f_4(x,y) = 1-y, f_5(x,y) = x.$$

(i) Consider the order $<_1$:

$$H_2 <_1 H_3 <_1 H_4 <_1 H_5 <_1 H_1.$$

- *The circuits are (H_2,H_4,H_1) and (H_3,H_5,H_1) and the broken circuits are (H_4,H_1) and (H_5,H_1). Thus*

$$\mathbf{nbc}_1(\mathcal{A}) = \{(H_2,H_1),(H_3,H_1),(H_2,H_3),(H_2,H_4),(H_3,H_5),(H_4,H_5)\}$$

and

$$\beta\mathbf{nbc}_1(\mathcal{A}) = \{(H_4,H_5),(H_3,H_1)\}.$$

- *We have*

$$\mathcal{A}'_1 = \{H_2 < H_3 < H_4 < H_5\},$$
$$\mathcal{A}''_1 = \{H_2\cap H_1, H_3\cap H_1\},$$

$\beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_1) = \{(H_4,H_5)\}$, $\beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_1) = \{H_{351}\}$ *($H_{351} := H_3\cap H_5 = H_3\cap H_5\cap H_1, \nu(H_{351}) = min(H_3,H_5,H_1) = H_3$) and*

$$\beta\mathbf{nbc}_1(\mathcal{A}) = \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_1) \cup \overline{\beta\mathbf{nbc}}(\mathcal{A}''_1).$$

•

$$\Phi^1 = \{\alpha_4\alpha_5\omega_{45}, \alpha_3\alpha_1\omega_{31} + \alpha_5\alpha_1\omega_{51}\}.$$

(ii) In the same way,

$$\Phi^2 = \{\alpha_4\alpha_5\omega_{45}, \alpha_3\alpha_2\omega_{32}\}$$
$$\Phi^3 = \{\alpha_4\alpha_5\omega_{45}, \alpha_2\alpha_3\omega_{23}\}$$
$$\Phi^4 = \{\alpha_2\alpha_3\omega_{23}, \alpha_5\alpha_4\omega_{54}\}$$
$$\Phi^5 = \{\alpha_2\alpha_3\omega_{23}, \alpha_4\alpha_5\omega_{45}\}.$$

3 Hypergeometric period matrix

3.1 The βnbc-ordered homology basis

Recall that $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is the set of real bounded chambers of $\mathcal{A}$. Let $\beta = \beta(\mathcal{A}) = |\mathsf{Ch}(\mathcal{A})|$. In order to define the period matrix, we label $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ by $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$.

Definition 3.1.1 *Let $\xi = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$ be a flag of affine subspaces $F_i \in L(\mathcal{A})$ with $\dim F_i = i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Let $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ and $\overline{\Delta}$ be its closure in $\mathbb{R}^n$. We say that ξ is **adjacent to** Δ if $\dim(F_i \cap \overline{\Delta}) = i$ for $i = 0, \ldots, n$.*

For $B = (H_{i_1}, \ldots, H_{i_n}) \in \beta\mathrm{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$, recall the associated β**nbc**-flag $\xi(B) = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$ from Definition 2.4.4.

Proposition 3.1.2 *There exists a unique bijection*

$$C : \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$$

with the property that $\xi(B)$ is adjacent to the bounded chamber $C(B)$ for any $B \in \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$.

Proof. If $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) = \emptyset$, then $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) = \emptyset$. Suppose $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. We will prove by induction on $|\mathcal{A}|$. Assume that the maps C' and C'' already exist for $\mathcal{A}'_{i_0}$ and $\mathcal{A}''_{i_0}$. There are the following four kinds of bounded chambers of $\mathcal{A}$:

(i) $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is called *undivided* if $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$, i.e., Δ does not intersect H_{i_0}.

(ii) $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is called *newborn* if there exists an unbounded chamber of $\mathcal{A}'_{i_0}$ which contains Δ.

(iii) Suppose that a bounded chamber Δ' of $\mathcal{A}'_{i_0}$ is divided in two by H_{i_0}. (In this case, a bounded chamber Δ' of $\mathcal{A}'_{i_0}$ is called *divided.*) Let $B' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0})$ with $\Delta' = C'(B')$. Then $\xi' := \xi(B')$ is adjacent to Δ'. The two new chambers of $\mathcal{A}$ inside Δ' are denoted by Δ^+ and Δ^-. We can easily observe that ξ' is adjacent to exactly one of the two chambers Δ^+ and Δ^-, say, Δ^+. The chamber $\Delta^+ \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is called the *heir* of Δ'. The other chamber $\Delta^- \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is called the *cutoff* of Δ'.

Define $C : \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ as follows:

(a) If $B \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0})$ and $C'(B) \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$, then let $C(B) = C'(B)$.

(b) If $B \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}'_{i_0})$ and $C'(B)$ is divided in two by H_{i_0}, then define $C(B) = \Delta^+$, where Δ^+ is the heir of $C'(B)$.

(c) If $B = (\nu B'', H_{i_0})$ with $B'' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})$ and $C''(B'')$ is inside an unbounded chamber of $\mathcal{A}'_{i_0}$, then $C''(B'')$ is a wall of a unique newborn chamber Δ. Define $C(B) = \Delta$.

(d) If $B = (\nu B'', H_{i_0})$ with $B'' \in \beta\mathbf{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})$ and $C''(B'')$ is inside a bounded chamber Δ' of $\mathcal{A}'_{i_0}$, then $C''(B'')$ is a wall of a unique cutoff chamber Δ^- of Δ'. Define $C(B) = \Delta^-$.

By construction, C is bijective and satisfies the condition. The uniqueness is obvious from the construction. □

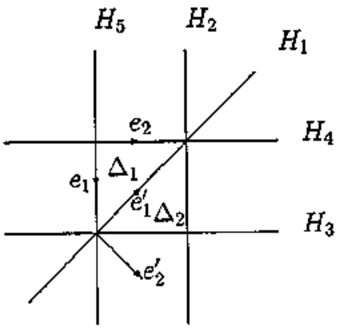
Let $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) = \{B_1, \ldots, B_\beta\}$ be linearly ordered as in section 2.4. Define $\Delta_i := C(B_i) \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ for $i = 1, \ldots, \beta$. We call $\Delta_1, \ldots, \Delta_\beta$ the $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}$**-ordered chambers** of $\mathcal{A}$. If Δ_i is either undivided or an heir and Δ_j is either newborn or a cutoff, then $i < j$.

We give an orientation to each $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ as follows: Let $\Delta = C(B)$ with $B \in \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$. Let $\xi(B) = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$ be the associated βnbc-flag. Choose the intrinsic orientation [V2, 6.2] of Δ obtained from $\xi(B)$. In other words, an orthonormal frame $\{e_1, \ldots, e_n\}$ is chosen so that each e_i is a unit vector originating from the point F_0 in the direction of $F_i \cap \overline{\Delta}$. This orientation is called the β**nbc-orientation** of Δ.

Example 3.1.3 *Recall Example 2.4.13 with the order* $<_1$*:*

$$H_2 <_1 H_3 <_1 H_4 <_1 H_5 <_1 H_1.$$

Let $B_1 = (H_4, H_5)$ *and* $B_2 = (H_3, H_1)$*. Then* $\beta\mathbf{nbc}_1(\mathcal{A}) = \{B_1, B_2\}$*.*



The bijection map

$$C : \beta\mathbf{nbc}_1(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$$

described in Proposition 3.1.2 is given by $C(B_i) = \Delta_i$ *for* $i = 1, 2$*. The* β**nbc**-*flags are*

$$\xi(B_1) = (H_4 \cap H_5 \subset H_5 \subset V)$$

and

$$\xi(B_2) = (H_3 \cap H_1 \subset H_1 \subset V).$$

The β**nbc**-*orientations of* Δ_1 *and* Δ_2 *are given by orthonormal frames* $\{e_1, e_2\}$ *and* $\{e_1', e_2'\}$ *respectively.*

Let $\mathcal{L}_\alpha$ be the rank one local system on $M = M(\mathcal{A})$ (cf. 2.1.4) defined by the kernel of an integral connection

$$\nabla_\alpha : \mathcal{O}_M \longrightarrow \Omega^1_M$$

where $\nabla_\alpha(f) = df + f\sum_{i\in I}\alpha_i\omega_i$. Then its monodromy around H_k is $e^{-2i\pi\alpha_k}$.

Proposition 3.1.4 (cf. [Ko], [AK, 4.1.1]) *Suppose that the weights* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ *are non-resonant* (cf. Definition 2.3.2). *We have*

(*i*) $H_j(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) = H_j^{lf}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) = 0$ *pour* $j \neq n$. *Here* H^{lf} *stands for the locally finite homology.*

(*ii*) *The natural map*

$$H_n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) \longrightarrow H_n^{lf}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha)$$

is an isomorphism.

(*iii*) $\{[\Delta_j] \mid \Delta_j \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})\}$ *forms a basis for* $H_n^{lf}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha)$.

Proof. The following proof is similar to Kohno's proof [Ko] in the case that the arrangement is generic to infinity.

For (i) and (ii), we use the exactly same argument as [Ko, Theorem 1] except that we blow up $\mathbb{P}^n$ along all the dense edges of codimension of codimension > 1.

(iii): Write $M = M(\mathcal{A})$ and $\Delta = \bigcup_{j=1}^{\beta}\Delta_j$. In order to apply the argument in [Ko], it is enough to show $H^q(M - \Delta, \mathcal{L}_\alpha) = 0$ for all q. Let W be a small tubular neighborhood in $\mathbb{P}^n$ of the hyperplane at infinity $\overline{H}_\infty$. Note that the inclusion map $W \cap M \hookrightarrow M - \Delta$ is homotopy equivalent.

Let $j : W \cap M \hookrightarrow W$. Let $x \in W$. If $x \in W \cap M$, since there is no hyperplane in $\mathcal{A}_\infty$ going through x we have $(R^q j_*\mathcal{L}_\alpha)_x = 0$ for $q \neq 0$ and $(R^0 j_*\mathcal{L}_\alpha)_x \simeq \mathbb{C}$. If $x \in W - M$, then $W - M$ is locally a central arrangement near x. In this case, since the (local) Euler characteristic of M (intersected with a small open ball centered at x) is zero, we have $(R^q j_*\mathcal{L}_\alpha)_x = 0$ for all q by (i). Therefore we have $H^q(W \cap M, \mathcal{L}_\alpha) \simeq H^q(W, j_*\mathcal{L}_\alpha)$. For each $x \in \overline{H}_\infty$, there exists a small neighborhood W_x of x in W such that

$$H^q(W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_k}, j_*\mathcal{L}_\alpha) = 0$$

as long as $W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_k} \neq \emptyset$. Since $\overline{H}_\infty \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ is compact, we may choose $W_{x_1}, \ldots, W_{x_m}$ which cover $\overline{H}_\infty$. Let $W_0 = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_m}$. By applying the Mayer-Vietoris theorem repeatedly, we have $H^q(W_0, j_*\mathcal{L}_\alpha) = 0$ for all q. By the Poincaré duality, we have

$$H^q(M - \Delta, \mathcal{L}_\alpha) \simeq H^q(W_0 \cap M, \mathcal{L}_\alpha) \simeq H^q(W_0, j_*\mathcal{L}_\alpha) = 0. \square$$

3.2 The βnbc-ordered cohomology basis

Proposition 3.2.1 *Suppose that the weights $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ are non-resonant. We have*

(i) $H^j(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) = H^j_c(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) = 0$ pour $j \neq n$. Here H_c stands for the compact support cohomology.

(ii) The natural map

$$H^n_c(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) \longrightarrow H^n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha)$$

is an isomorphism.

(iii) The set $\Phi^{i_0}(\mathcal{A})$ (cf. Definition 2.4.6) *forms a basis for $H^n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha)$.*

Proof. Let $\mathcal{L}^\vee_\alpha$ be the dual local system of $\mathcal{L}_\alpha$. (i) and (ii) are obtained from the Poincaré dualities

$$H^q(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) \simeq H^{lf}_{2n-q}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}^\vee_\alpha), \ H^q_c(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) \simeq H_{2n-q}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}^\vee_\alpha),$$

and Proposition 3.1.4. (iii) is [FT, Theorem 3.7]. □

If $j_0 \in I$ such that $j_0 \neq i_0$, it may happens that $\Phi^{j_0} \neq \Phi^{i_0}$ (cf. Example 2.4.13). However we have the following

Proposition 3.2.2 [FT, Proposition 3.10] *For all $j_0 \in I$ the transition matrix between the bases Φ^{i_0} and Φ^{j_0} is an integral unimodular matrix independent of α.*

3.3 The definition of hypergeometric period matrix

Definition 3.3.1 *Let $\beta = \beta(\mathcal{A})$. Assume that $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_\beta\}$ is the β***nbc***-ordered chambers in 3.1.4 (iii) and $\Phi^{i_0}(\mathcal{A}) = \{\phi^{i_0}_1, \ldots, \phi^{i_0}_\beta\}$ is the β***nbc***-ordered basis of $H^n(M, \mathcal{L}_\alpha)$ in 3.2.1 (iii). Choose a branch of $f_j^{\alpha_j}$ on each chamber Δ_i. Let*

$$U_\alpha := f_1^{\alpha_1} \cdots f_p^{\alpha_p}.$$

*Also choose the β***nbc***-orientation of each chamber Δ_i. Define the* ***hypergeometric period matrix*** *$\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ by*

$$\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = \left[\int_{\Delta_j} U_\alpha \phi^{i_0}_i \right].$$

If $\Re\alpha_j > 0$, $\forall j \in I$, then each entry of $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ can be regarded as an holomorphic function of $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ and it can be analytically continued to be a meromorphic function on the entire $\mathbb{C}^p$. In order to precise this point, first introduce the following

Definition 3.3.2 *Let Δ_j^* be a twisted cycle representing the homology class in $H_n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha^\vee)$ which is sent to the homology class of Δ_j in $H_n^{lf}(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha^\vee)$ via the isomorphism in Proposition 3.1.4 (ii). Define*

$$\mathsf{PM}_{i_0}^*(\mathcal{A}, \alpha) = \left[\int_{\Delta_j^*} U_\alpha \phi_i^{i_0}\right].$$

Remark 3.3.3 *It is known* (e.g., see [LS, 4.2]) *that each entry of $\mathsf{PM}_{i_0}^*(\mathcal{A}, \alpha)$ can be regarded as a meromorphic function on $\mathbb{C}^p$ whose poles lie on some hypersurfaces defined by equations $e^{2i\pi L(\alpha)} - \lambda = 0$, where L is a linear form of $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ and λ is a nonzero complex number. Since the twisted de Rham pairing*

$$H_n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha^\vee) \times H^n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C},$$

which is given by the hypergeometric integrals $(\Delta^*, \phi) \mapsto \int_{\Delta^*} U_\alpha \phi$, is a nondegenerate pairing (e.g., see [Ki, 1.4]), *we may write $L(\alpha) = \alpha(F)$ for a dense edge F and $\lambda = 1$ by Propositions 3.1.4 (iii) and 3.2.1 (iii). In other words,* $\det \mathsf{PM}_{i_0}^*(\mathcal{A}, \alpha)$ *takes a finite nonzero value at each $\alpha \notin \mathrm{Rsn}(\mathcal{A})$. Moreover, if $\Re\alpha_j > 0$, $\forall j \in I$, then*

$$\int_{\Delta_j^*} U_\alpha \phi_i^{i_0} = \int_{\Delta_j} U_\alpha \phi_i^{i_0}.$$

In particular, if $\Re\alpha_j > 0$ for all $j \in I$,

$$\mathsf{PM}_{i_0}^*(\mathcal{A}, \alpha) = \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$$

and the analytic continuation of the determinant of $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ is equal to the determinant of $\mathsf{PM}_{i_0}^*(\mathcal{A}, \alpha)$.

Remark 3.3.4 *We formally define* $\det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = 1$ *if $\beta(\mathcal{A}) = 0$.*

Proposition 3.3.5 *The determinant of $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ is independent (up to sign) of the choice of i_0.*

Proof. Obvious from Proposition 3.2.2. □

4 Beta function of an arrangement

We keep the notations of Section 2.

4.1

Let $\mathcal{A}$ be an affine arrangement and $\mathcal{A}_\infty$ the arrangement of projective hyperplanes defined in 2.3. Recall $\overline{I} = I \cup \{\infty\} = \{1, \ldots, p, \infty\}$ and $\alpha_\infty = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)$. We note that $L_-(\mathcal{A}_\infty)$ (or $L_+(\mathcal{A}_\infty)$) is the set of edges of $L(\mathcal{A}_\infty)$ contained (resp. not contained) in $\overline{H}_\infty$. For $F \in L(\mathcal{A}_\infty)$, let

$$I(F) = \{i \in I \mid F \subset H_i\},$$
$$\overline{I}(F) = \{i \in \overline{I} \mid F \subset \overline{H}_i\},$$
$$\mathcal{A}_\infty^F = \{\overline{H}_i \mid i \in \overline{I}(F)\},$$
$$\mathcal{A}_F^\infty = \{\overline{H}_i \cap F \mid F \not\subseteq \overline{H}_i\},$$

$$\alpha(F) = \sum_{i \in \overline{I}(F)} \alpha_i = \begin{cases} \sum_{i \in I(F)} \alpha_i & \text{if } F \in L_+(\mathcal{A}_\infty), \\ -\sum_{i \in I - \overline{I}(F)} \alpha_i & \text{if } F \in L_-(\mathcal{A}_\infty). \end{cases}$$

Following Varchenko [V1, 1.5], we associate to each edge F of codimension r a projective arrangement $\mathbb{P}\mathcal{A}_\infty^F$ in the $r-1$ dimensional projective space. If $\mathcal{A}_\infty$ is a projective arrangement, let $\chi(\mathcal{A}_\infty)$ denote the Euler characteristic of $\mathbb{P}^n - \cup_{i \in \overline{I}} \overline{H}_i$. If F is an edge of $\mathcal{A}_\infty$ defined above, we put

$$\mu(F, \mathcal{A}_\infty) = \mid \chi(\mathcal{A}_F^\infty) \chi(\mathbb{P}\mathcal{A}_\infty^F) \mid .$$

Proposition 4.1.1 *If an edge $F \in L(\mathcal{A}_\infty)$ is not dense, then $\mu(F, \mathcal{A}_\infty) = 0$.*

Proof. Recall that F is dense if and only if $\chi(\mathbb{P}\mathcal{A}_\infty^F) \neq 0$ [STV, Proposition 7]. □

Definition 4.1.2 *Let $j \in I$ and $i \in \{1, \ldots, \beta(\mathcal{A})\}$. Choose a branch of $f_j^{\alpha_j}$ on each Δ_i. Define*

$$R(f_j, \Delta_i)^{\alpha_j} = \{f_j^{\alpha_j}(x) \;\mid\; \left|f_j^{\alpha_j}(x)\right| \geq \left|f_j^{\alpha_j}(y)\right|, \forall y \in \overline{\Delta_i}\},$$

$$R(\mathcal{A})^\alpha = \prod_{j=1}^{p} \prod_{i=1}^{\beta} R(f_j, \Delta_i)^{\alpha_j}$$

and

$$B(\mathcal{A}, \alpha) = \prod_{F \in L_+(\mathcal{A}_\infty)} \Gamma(\alpha(F) + 1)^{\mu(F, \mathcal{A}_\infty)} \prod_{F \in L_-(\mathcal{A}_\infty)} \Gamma(-\alpha(F) + 1)^{-\mu(F, \mathcal{A}_\infty)}.$$

Remark 4.1.3 *Define $B(\mathcal{A}, \alpha) = 1$ and $R(\mathcal{A})^\alpha = 1$ if $\beta(\mathcal{A}) = 0$.*

Remark 4.1.4 *By Proposition 4.1.1 $B(\mathcal{A}, \alpha)$ involves only with $\alpha(F)$ for dense edges F.*

4.2 Recursion formulas for $B(\mathcal{A},\alpha)$ and $R(\mathcal{A})^\alpha$

Let $i_0 \in I$. Define the order $<_{i_0}$ in $\mathcal{A}$, and orders in $\mathcal{A}'_{i_0}$ and $\mathcal{A}''_{i_0}$ as in 2.4.7. Define

$$I^*_{i_0} = \{i \in I'_{i_0} \mid H_i \cap H_{i_0} = \emptyset\}.$$

Theorem 4.2.1 *We have*

$$\begin{aligned} B(\mathcal{A},\alpha) = {} & B(\mathcal{A}'_{i_0},\alpha')B(\mathcal{A}''_{i_0},\alpha'') \\ & \times \prod_{F\in L_+(\mathcal{A}_\infty), F\subseteq H_{i_0}} [\Gamma(\alpha(F)+1)/\Gamma(\alpha(F)-\alpha_{i_0}+1)]^{\mu(F,\mathcal{A}_\infty)} \\ & \times \prod_{F\in L_-(\mathcal{A}_\infty), F\not\subseteq H_{i_0}} [\Gamma(-\alpha(F)-\alpha_{i_0}+1)/\Gamma(-\alpha(F)+1)]^{\mu(F,\mathcal{A}_\infty)} \end{aligned}$$

and

$$R(\mathcal{A})^\alpha = R(\mathcal{A}'_{i_0})^{\alpha'} R(\mathcal{A}''_{i_0})^{\alpha''} \prod_{i=1}^{\mu} R(f_{i_0},\Delta_i)^{\alpha_{i_0}} [\prod_{i\in I^*_{i_0}} f_i^{\alpha_i} \mid_{H_{i_0}}]^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}.$$

Proof. Analogous to the proof of Proposition 6.3 of [L]. □

Corollary 4.2.2 *Assume the arrangement $\mathcal{A}$ normal. Then*

$$B(\mathcal{A},\alpha) = B(\mathcal{A}'_{i_0},\alpha')B(\mathcal{A}''_{i_0},\alpha'')\Gamma(\alpha_{i_0}+1)^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}$$

$$\times \prod_{F\in L_-(\mathcal{A}_\infty), F\not\subseteq H_{i_0}} [\Gamma(-\alpha(F)-\alpha_{i_0}+1)/\Gamma(-\alpha(F)+1)]^{\mu(F,\mathcal{A}_\infty)}.$$

This result was proved first by Varchenko ([V1, Theorem 2.5]).

Corollary 4.2.3 *We have*

$$B(\mathcal{A},\alpha) \mid_{\alpha_{i_0}=0} = B(\mathcal{A}'_{i_0},\alpha')B(\mathcal{A}''_{i_0},\alpha'')$$

and

$$R(\mathcal{A})^\alpha \mid_{\alpha_{i_0}=0} = R(\mathcal{A}'_{i_0})^{\alpha'} R(\mathcal{A}''_{i_0})^{\alpha''} [\prod_{j\in I^*_{i_0}} f_j^{\alpha_j} \mid_{H_{i_0}}]^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}.$$

Example 4.2.4 **1.** *If $\mathcal{A}$ is in general position*

$$B(\mathcal{A},\alpha) = [\prod_{i=1}^{p} \Gamma(\alpha_i+1)/\Gamma(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i+1)]^{\binom{p-2}{n-1}}.$$

2. *If $\mathcal{A}$ is the arrangement defined in Example 2.4.13,*

$$B(\mathcal{A},\alpha) = \prod_{i=1}^{5} \Gamma(\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+1)$$
$$\times [\Gamma(\sum_{i=1}^{5}\alpha_i+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5+1)]^{-1}.$$

5 The main theorem and its proof

5.1 The main theorem

The main result of this paper is the following

Theorem 5.1.1 *Suppose $\Re\alpha_i > 0$ for all $i \in I$. Then, for all $i_0 \in I$, we have*

$$\det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha) = R(\mathcal{A})^{\alpha} B(\mathcal{A},\alpha),$$

$\mathcal{A}$ being equipped with the order $<_{i_0}$ (cf. 2.2.1).

Remark 5.1.2 *$R(\mathcal{A})^{\alpha}B(\mathcal{A},\alpha)$ is independent of i_0. Thus so is the determinant.*

Let $B = (H_{i_1},\dots,H_{i_n}) \in \beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A})$. Recall the associated β**nbc**-flag

$$\xi(B) = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n).$$

Let $\beta\mathbf{nbc}_{i_0}(\mathcal{A}) = \{B_1, B_2, \dots, B_\beta\}$. It is shown [BV] that the set $\{\xi(B_1),\dots,\xi(B_\beta)\}$ of the β**nbc**-flags gives a $\mathbb{Z}$-basis for the flag complex cohomology $H^n(\mathcal{F})$ which is studied by Schechtman and Varchenko in [SV, sections 2, 3] [V3, 10.1]. (It is also known that $H^n(\mathcal{F})$ is naturally isomorphic to the reduced cohomology $\tilde{H}^{n-1}(K(\hat{L}),\mathbb{Z})$ where $\hat{L} = L(\mathcal{A}) - \{V\}$ and $K(\hat{L})$ is the order complex of $\hat{L}$ [FT, Remark 3.8].) For an arbitrary flag $\xi = (F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n)$, $F_i \in L(\mathcal{A})$, $\dim F_i = i$ $(i = 0,\dots,n)$, associate a differential n-form

$$\Xi(\xi) = \omega_\alpha(F_0,\mathcal{A}) \wedge \cdots \wedge \omega_\alpha(F_{n-1},\mathcal{A})$$

(cf. Notation 2.4.5). Consider the homomorphism

$$\pi_\alpha : H^n(\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow H^n(M(\mathcal{A}),\mathcal{L}_\alpha)$$

such that $\pi_\alpha([\xi]\otimes 1) = [\Xi(\xi)]$. Then $\pi_\alpha([\xi(B_i)]\otimes 1) = [\phi_i^{i_0}(\mathcal{A})]$ for $1 \le i \le \beta$. The map π_α is an isomorphism when α is non-resonant.

Corollary 5.1.3 *Suppose $\Re\alpha_i > 0$ for all $i \in I$. Choose a branch of $f_j^{\alpha_j}$ on each $\Delta_i \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Let $\xi_1,\dots,\xi_\beta$ be flags of length $n+1$ such that their cohomology classes in the flag complex cohomology $H^n(\mathcal{F})$ form a $\mathbb{Z}$-basis. Let $\psi_i(\alpha) = \Xi(\xi_i)$ for $1 \le i \le \beta$. Then we have*

$$\det \left[\int_{\Delta_j} U_\alpha \psi_i(\alpha)\right] = \pm R(\mathcal{A})^{\alpha} B(\mathcal{A},\alpha).$$

Proof. Since $\{\xi(B_1), \ldots, \xi(B_\beta)\}$ and $\{\xi_1, \ldots, \xi_\beta\}$ are connected by a unimodular integral constant matrix in $H^n(\mathcal{F})$, so are $\Phi^{i_0}(\mathcal{A})$ and $\{\psi_1(\alpha), \ldots, \psi_\beta(\alpha)\}$ in $H^n(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_\alpha)$. Apply Theorem 5.1.1. $\square$

Remark 5.1.4 *Theorem 5.1.1 shows that the conjecture by Varchenko* ([V2, 6.3 Fundamental conjecture]) *is true for the β***nbc***-bases and the β***nbc***-orientations. If Varchenko's flags F_{Δ_j} $(1 \leq j \leq \beta)$ in* [V2, 6.2] *form a $\mathbb{Z}$-basis for $H^n(\mathcal{F})$, then the affirmative answer (up to sign) to the original conjecture follows from Corollary 5.1.3. (In general, the original conjecture by Varchenko is always true up to a constant integral multiple by Theorem 5.1.1. Especially, for 2-dimensional arrangements, M. Neergaard and the second author have verified the original conjecture by studying the relationship between the βnbc-flags and Varchenko's flags.) Note that the basis Φ^p coincides (up to sign) with Varchenko's basis $\{\Xi(F_{\Delta_j})\}$ when $\mathcal{A}$ is normal or in general position at infinity.*

5.2 A theorem by Loeser-Sabbah

Recall, at first, one of the main results of [LS].

Theorem 5.2.1 *We have*

$$\det \mathsf{PM}^{*}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = c_1^{\alpha_1} \ldots c_p^{\alpha_p} B(\mathcal{A}, \alpha) h_{i_0}(\alpha),$$

where $c_1, \cdots, c_p$ are nonzero constants and $h_{i_0} \in \mathbb{C}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)^*$.

Proof. By [LS, 4.2.10], we have

$$\det \mathsf{PM}^{*}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = \varphi_{i_0}(e^{2i\pi\alpha_1}, \cdots, e^{2i\pi\alpha_p}) c_1^{\alpha_1} \ldots c_p^{\alpha_p} B(\mathcal{A}, \alpha) \hat{h}_{i_0}(\alpha),$$

where φ_{i_0} is a periodic function of $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $c_1, \cdots, c_p$ are nonzero constants and $\hat{h}_{i_0} \in \mathbb{C}(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)^*$. Since the polynomials f_i take real values on each Δ_i and $\det \mathsf{PM}^{*}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ is holomorphic if $\Re\alpha_i > 0$ for all $i \in I$ by Remark 3.3.3, $\varphi_{i_0}(e^{2i\pi\alpha_1}, \cdots, e^{2i\pi\alpha_p})$ is constant by [LS, final remark] (see also Remark 5.4.3). Denote $\varphi_{i_0}\hat{h}_{i_0}(\alpha)$ by $h_{i_0}(\alpha)$. $\square$

Remark 5.2.2 *The constants c_k are defined as critical values (counted with multiplicities) of the polynomials f_k.*

Recall that $\det \mathsf{PM}^{*}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = \det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ if $\Re\alpha_i > 0$ for all $i \in I$. We shall show that h_{i_0} equals $+1$ and $c_k^{\alpha_k} = \prod_{j=1}^{\beta} R(f_k, \Delta_j)^{\alpha_k}$.

5.3 A recursion formula for hypergeometric period determinants

Let $i_0 \in I$. Give $\mathcal{A}$ the linear order $<_{i_0}$. Recall $\mathcal{A}'_{i_0}$, $\mathcal{A}''_{i_0}$, I'_{i_0}, and I''_{i_0} from 2.4. To each $i \in I'_{i_0}$ (or $i \in I''_{i_0}$), we associate the weights $\alpha'_i := \alpha_i$ (resp. $\alpha''_i := \sum \alpha_k$ where the sum runs over all the $H'_k \in \mathcal{A}'_{i_0}$ such that $H''_i \subset H'_k$). Let $\alpha' = (\alpha'_i)_{i \in I'_{i_0}}$ and $\alpha'' = (\alpha''_i)_{i \in I''_{i_0}}$. Denote the restriction of f_j to H_{i_0} by $\overline{f}_j$. Define

$$U'_\alpha = \prod_{j \in I'_{i_0}} f_j^{\alpha'_j}, U''_\alpha = \prod_{j \in I''_{i_0}} \overline{f}_j^{\alpha''_j}.$$

Recall $I^*_{i_0} = \{i \in I'_{i_0} \mid H_i \cap H_{i_0} = \emptyset\}$. Fix a branch of $\prod_{j \in I^*_{i_0}} (f_j^{\alpha_j})_{|H_{i_0}}$ and call it c_{i_0}. Then c_{i_0} is a constant number. Choose a branch of U'_α and a branch of U''_α on each bounded chamber of $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$ and on each bounded chamber of $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}''_{i_0})$ respectively. Also choose a branch of $f_{i_0}^{\alpha_{i_0}}$ on each bounded chamber $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Define a branch U_Δ of U_α on $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ as follows (we use the terminology from the proof of Proposition 3.1.2):

(i) if Δ is undivided, then $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$. Define $U_\Delta = (f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \text{ on } \Delta)(U'_\alpha \text{ on } \Delta)$.

(ii) if Δ is the heir of $\Delta' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$, then define $U_\Delta = (f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \text{ on } \Delta)(U'_\alpha \text{ on } \Delta')_{|\Delta}$.

(iii) if Δ is either a cutoff or newborn, then let $\Delta'' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}''_{i_0})$ be the wall of Δ. Choose a unique branch U'_Δ of U'_α on Δ such that $U'_{\Delta|\Delta''} = c_{i_0}(U''_\alpha \text{ on } \Delta'')$. Let $U_\Delta = (f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \text{ on } \Delta)U'_\Delta$.

Recall that we are using the $\beta\mathbf{nbc}$-orientation for every chamber of $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$, $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}''_{i_0})$ and $\mathsf{Ch}(\mathcal{A})$. Then

(i) if $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is the heir of $\Delta' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$, then the corresponding $\beta\mathbf{nbc}$-flags are equal. So the orientation of Δ is the induced one from the orientation of Δ', and

(iii) if $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ is either a cutoff or newborn, then the orthonormal frame for Δ is given by the orthonormal frame for $\Delta'' := \overline{\Delta} \cap H_{i_0} \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}''_{i_0})$ together with the unit vector in the direction of Δ as the last vector of the frame.

Define $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha)$, $\mathsf{PM}(\mathcal{A}'_{i_0},\alpha')$ and $\mathsf{PM}(\mathcal{A}''_{i_0},\alpha'')$ using these branches and orientations.

We analytically continue the determinant $\det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha)$ onto the hyperplane $\alpha_{i_0} = 0$.

Proposition 5.3.1 *Suppose that the real part of α_i is positive for all $i = 1, \ldots, p$, $i \neq i_0$. Then*

$$\det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha)_{|\alpha_{i_0}=0} = \det \mathsf{PM}(\mathcal{A}'_{i_0},\alpha') \det \mathsf{PM}(\mathcal{A}''_{i_0},\alpha'')\, c_{i_0}^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}.$$

Proof. Let $\Delta' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$ be a divided chamber. Let Δ^+ and Δ^- be its heir and cutoff respectively. Let U^+ and U^- be the branches of U_α on Δ^+ and Δ^-. Choose a constant number $c_{\Delta'}$ such that $U^+ = c_{\Delta'} U^-$ on $\Delta' \cap H_{i_0}$. Let M be the matrix obtained from $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha)$ by adding for each divided chamber $\Delta' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$ the column corresponding to the cutoff Δ^- of Δ' multiplied by $c_{\Delta'}$ to the column corresponding to the heir Δ^+ of Δ' and setting $\alpha_{i_0} = 0$. Then $\det \mathsf{M} = \det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A},\alpha)_{|\alpha_{i_0}=0}$. Note that the column of M corresponding to Δ^+ is

$$\left[\int_{\Delta'} U'_\alpha f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \phi_1, \ldots, \int_{\Delta'} U'_\alpha f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \phi_\beta\right]^t_{|\alpha_{i_0}=0}$$

Write

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

where P is a square matrix of size $\beta(\mathcal{A}'_{i_0})$ and S is a square matrix of size $\beta(\mathcal{A}''_{i_0})$. Since the first $\beta(\mathcal{A}'_{i_0})$ columns of M are labelled by $\mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$, it follows from Lemma 2.4.10 that $P = \mathsf{PM}(\mathcal{A}'_{i_0}, \alpha')$.

When computing R and S we may take $\phi = \Xi(B)$ where $B = (\nu B'', H_{i_0}) \in \overline{\beta\mathbf{nbc}}(\mathcal{A}''_{i_0})$ with $B'' \in \beta\mathrm{nbc}(\mathcal{A}''_{i_0})$. Write $\phi = \psi(\alpha_{i_0}\omega_{i_0})$. Let $\Delta' \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A}'_{i_0})$. Set $\Delta'_t = \Delta' \cap \{f_{i_0} = t\}$ and $F(t) = \int_{\Delta'_t} U'_\alpha \psi$. Define real numbers $a < b$ such that $\Delta'_t \neq \emptyset$ if and only if $a \le t \le b$. Using the variable $t = f_{i_0}$, Fubini's theorem and integration by parts give

$$\pm \int_{\Delta'} U'_\alpha f_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \phi = \int_a^b \alpha_{i_0} t^{\alpha_{i_0}-1} F(t)dt = [t^{\alpha_{i_0}} F(t)]_a^b - \int_a^b t^{\alpha_{i_0}} F'(t)dt.$$

Taking the limit as $\alpha_{i_0} \to 0$, $\Re\alpha_{i_0} > 0$, we get

$$\lim \left[[t^{\alpha_{i_0}} F(t)]_a^b - \int_a^b t^{\alpha_{i_0}} F'(t)dt \right] = \begin{cases} 0 & 0 \notin \{a, b\} \\ F(0) & 0 = a < b \\ -F(0) & a < b = 0. \end{cases}$$

If Δ' is divided, then we apply the first part to get zero. If H_{i_0} intersects $\overline{\Delta}'$ in a face of codimension > 1, then $F(0) = 0$. If H_{i_0} does not intersect $\overline{\Delta}'$, then the integral is again zero. Thus $\mathsf{M}(\Delta', \phi) = 0$. This shows that $R = 0$.

It remains to compute the entries of S. Let $\Delta \in \mathsf{Ch}(\mathcal{A})$ be either a cutoff or newborn. In this case H_{i_0} is a wall of Δ so $\Delta_0 = C''(B'')$. Let $\Delta'' = C''(B'')$. It follows from Lemma 2.4.11 that $\phi'' := \psi_{|\Delta''} = \Xi(B'', \mathcal{A}''_{i_0})$. Set $\Delta_t = \Delta \cap \{f_{i_0} = t\}$ and $G(t) = \int_{\Delta_t} U'_\Delta \psi$, where U'_Δ is a unique branch of U'_α on Δ such that $U'_{\Delta|\Delta''} = c_{i_0}(U''_\alpha \text{ on } \Delta'')$. Define real numbers $a < b$ such that $\Delta_t \neq \emptyset$ if and only if $a \le t \le b$. Then $0 \in \{a, b\}$. Recall the choice of branch of U_α on Δ and orientation of Δ. By the same calculation as above, using the variable $t = f_{i_0}$, Fubini's theorem and integration by parts, we get

$$\mathsf{M}(\Delta, \phi) = \lim \int_\Delta U_\alpha \phi = G(0) = c_{i_0} \int_{\Delta''} U''_\alpha \phi'' = c_{i_0} \mathsf{M}(\Delta'', \phi'')$$

as $\alpha_{i_0} \to 0$, $\Re\alpha_{i_0} > 0$. So $S = c_{i_0} \mathsf{PM}(\mathcal{A}''_{i_0}, \alpha'')$. Thus we have

$$\det \mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)_{|\alpha_{i_0}=0} = \det \mathsf{M} = (\det P)(\det S) = \det \mathsf{PM}(\mathcal{A}'_{i_0}, \alpha') \det \mathsf{PM}(\mathcal{A}''_{i_0}, \alpha'')\, c_{i_0}^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}. \ \square$$

Corollary 5.3.2

$$\det \mathsf{PM}^*_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)_{|\alpha_{i_0}=0} = \det \mathsf{PM}^*(\mathcal{A}'_{i_0}, \alpha') \det \mathsf{PM}^*(\mathcal{A}''_{i_0}, \alpha'')\, c_{i_0}^{\beta(\mathcal{A}''_{i_0})}.$$

Proof. When the real part of α_i is positive for all $i = 1, \ldots, p$, $i \neq i_0$, this functional equality has been proved in Proposition 5.3.1. Therefore this equality holds true everywhere. □

Remark 5.3.3 *The recursion formula 5.3.1, in the case of arrangements in general position, is found in* [V1, p.546].

5.4 Proof of the main theorem

We prove the theorem by induction on (n, p) (equipped with lexicographical order). If $n = 1$ the theorem is well-known. If $\beta(\mathcal{A}) = 0$, then the theorem asserts $1 = 1$. Note that $\beta(\mathcal{A}) = 0$ whenever $p \leq n$. Let $i_0 \in I$. From the induction hypothesis we have

$$\det \mathsf{PM}^*(\mathcal{A}'_{i_0}, \alpha') = R(\mathcal{A}'_{i_0})^{\alpha'} B(\mathcal{A}'_{i_0}, \alpha')$$

and

$$\det \mathsf{PM}^*(\mathcal{A}''_{i_0}, \alpha'') = R(\mathcal{A}''_{i_0})^{\alpha''} B(\mathcal{A}''_{i_0}, \alpha'').$$

First step : we determine the product of critical values.
The induction hypothesis gives, together with Corollary 5.3.2 and Corollary 4.2.3,

$$c_1^{\alpha_1} \dots c_p^{\alpha_p} \mid_{\alpha_{i_0}=0} = R(\mathcal{A})^{\alpha} \mid_{\alpha_{i_0}=0} .$$

Thus we have $c_k^{\alpha_k} = \prod_{j=1}^{\beta} R(f_k, \Delta_j)^{\alpha_k}$ for $k \neq i_0$. By considering another linear order $<_k$ $(k \neq i_0)$, we have

$$c_1^{\alpha_1} \dots c_p^{\alpha_p} \mid_{\alpha_k=0} = R(\mathcal{A})^{\alpha} \mid_{\alpha_k=0}$$

so $c_{i_0}^{\alpha_{i_0}} = \prod_{j=1}^{\beta} R(f_{i_0}, \Delta_j)^{\alpha_{i_0}}$.

Second step : we determine the rational function.
We have

$$\det \mathsf{PM}^*_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = R(\mathcal{A})^{\alpha} B(\mathcal{A}, \alpha) h_{i_0}(\alpha).$$

First summarize what we know about the rational function h_{i_0}. Let

$$\mathcal{L} = \{\alpha(F) + m \mid F \text{ is a dense edge in } L(\mathcal{A}_\infty), m \in \mathbb{Z}\}.$$

Lemma 5.4.1 *(i) h_{i_0} is independant (up to sign) of i_0.*
(ii) The numerator and the denominator of h are (up to sign) products of linear forms belonging to $\mathcal{L}$.
(iii) For all $i_0 \in I$, $h(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \mid_{\alpha_{i_0}=0}$ is equal to either 1 or -1.

Proof. (i) follows from Proposition 3.3.5 and the fact that both $B(\mathcal{A}, \alpha)$ and $R(\mathcal{A})^{\alpha}$ are independent of i_0.

As for (ii), recall that the determinant of $\mathsf{PM}_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$ takes a finite nonzero value at each $\alpha \notin \mathrm{Rsn}(\mathcal{A})$ by Remark 3.3.3. Neither of $B(\mathcal{A}, \alpha)$ or $R(\mathcal{A})^{\alpha}$ has a zero or pole at $\alpha \notin \mathrm{Rsn}(\mathcal{A})$ (cf. Remark 4.1.4). Therefore h is a rational function which takes a finite nonzero value at every $\alpha \notin \mathrm{Rsn}$. Since $\mathrm{Rsn}(\mathcal{A})$ is the union of a locally finite infinite family of hyperplanes, we have (ii).

Lastly, (iii) is a consequence of the induction assumption, Corollary 5.3.2 and Corollary 4.2.3. □

Lemma 5.4.2 *h is equal to a constant function which is either* 1 *or* -1 .

Proof. Suppose that h is not constant. By Lemma 5.4.1(ii), we may write h as a fraction whose denominator and numerator are both products of finitely many elements of

$$\mathcal{L} = \{\alpha(F) + m \mid F \text{ is a dense edge in } L(\mathcal{A}_\infty), m \in \mathbb{Z}\}.$$

Suppose $\alpha(F) + m$ appears in the expression. By Lemma 5.4.1 (iii), $\alpha(F) - \alpha_j + m$ also appears in the expression for each j such that α_j appears in $\alpha(F)$. Also, $\alpha(F) + \alpha_j + m$ also appears in the expression for each j such that α_j does not appear in $\alpha(F)$. Therefore, by repeately using these observations, we finally can conclude that $\sum_{i \in J} \alpha_i + m$ appears for every subset J of I. In particular, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1} + m$ appears in the expression. This implies either (i) $F := H_1 \cap \cdots \cap H_{p-1}$ is dense and $I(F) = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, or (ii) $F_\infty := \overline{H}_p \cap \overline{H}_\infty$ is dense and $\overline{I}(F_\infty) = \{p, \infty\}$. Since (ii) is a contradiction, (i) always occurs. In particular, $H_1, \ldots, H_{p-1}$ are dependent and there exists $j_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$ such that $F = H_1 \cap \cdots \cap H_{j_0-1} \cap H_{j_0+1} \cap \cdots \cap H_{p-1}$. If $\mathcal{A}$ is central, there is nothing to prove. So we may assume $\emptyset = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. Thus

$$\emptyset = H_1 \cap \cdots \cap H_p = F \cap H_p = H_1 \cap \cdots \cap H_{j_0-1} \cap H_{j_0+1} \cap \cdots \cap H_p.$$

This implies that $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j_0-1} + \alpha_{j_0+1} + \cdots + \alpha_p + m$ does not appear in the expression of h, which is a contradiction. This shows that h is a constant. By Lemma 5.4.1 (iii), the constant is equal to either 1 or -1. $\square$

It follows from Lemma 5.4.2 that

$$\det \mathsf{PM}^*_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = \pm R(\mathcal{A})^\alpha B(\mathcal{A}, \alpha).$$

Let us determine the sign. It is known that the sign is plus when $n = 1$ or $\beta(\mathcal{A}) = 0$. By Corollaries 5.3.2 and 4.2.3, we can inductively show that the sign is always plus:

$$\det \mathsf{PM}^*_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha) = R(\mathcal{A})^\alpha B(\mathcal{A}, \alpha).$$

This, together with Remark 3.3.3, proves the main theorem.

Remark 5.4.3 *We could show in the same way that the periodic function φ_{i_0} appearing in the proof of theorem 5.2.1 is constant.*

Remark 5.4.4 *It should be interesting to study the connection between the roots of a Bernstein polynomial of $f = (f_1, \cdots, f_p)$* ([S]) *and the poles of* $\det \mathsf{PM}^*_{i_0}(\mathcal{A}, \alpha)$.

Acknowledgements. The first author thanks F. Loeser who incited him to solve the problem in this way, C. Sabbah and F. Maaref for fruitful discussions. The second author also thanks K. Aomoto, P. Orlik, R. Silvotti and A. Varchenko for useful and stimulating discussions.

References

[A] Aomoto, K.: Les équations aux différences finies et les intǵrales de fonctions multiformes, J. Fac. Sci. Tokyo **22** (1975), 271-297 et **26**, 519-523 (1979)

[AK] Aomoto, K., Kita, M.: Hypergeometric functions (in Japanese). Tokyo: Springer 1994

[BV] Brylawski, T., Varchenko, A.: The determinant formula for a matroid bilinear form (preprint)

[FT] Falk, M. J., Terao, H.: β**nbc**-bases for cohomology of local systems on hyperplanes complements, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear)

[Ki] Kita, M.: On hypergeometric functions in several variables II. The wronskian of the hypergeometric functions of type (n+1, m+1), J. Math. Soc. Japan **45**, 645-689 (1993)

[Ko] Kohno, T.: Homology of a local system on the complement of hyperplanes, Proc. Japan Acad. **62**, Ser. A, 144-147 (1986)

[L] Loeser, F.: Arrangements d'hyperplans et somme de Gauss, Ann. Sci. École Norm. Sup. **24**, 379-400 (1991)

[LS] Loeser, F. and Sabbah, C.: Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, Comment. Math. Helv. **66**, 458-503 (1991)

[OT] Orlik, P., Terao, H.: Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Math. Wiss. **300**, Berlin Heildelberg New York: Springer, 1992

[S] Sabbah, C.: Proximité évanescente I, Compositio Math. **62**, 283-328 (1987)

[SV] Schechtman, V., Varchenko, A.: Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology, Invent. math. **106**, 139–194 (1991)

[STV] Schechtman, V., Terao, H., Varchenko, A.: Local systems over complements of hyperplanes and the Kac-Kazhdan conditions for singular vectors, J. Pure Appl. Algebra **100**, 93-102 (1995)

[V1,V2] Varchenko, A.: The Euler Beta-function, the Vandermonde determinant, Legendre's equation, and critical values of linear functions on a configuration of hyperplanes, Math. USSR Izvestija **35** (1990), 543-572 and **36**, 155-168 (1991)

[V3] Varchenko, A.: Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie algebras and quantum groups, Advanced Series in Mathematical Physics - **21**, World Scientific Publishers, 1995

[Z] Ziegler, G.: Matroid shellability, β–systems, and affine arrangements, J. Alg. Combinatorics, **1**, 283–300 (1992)

ON 3-DIMENSIONAL SCHUR RINGS OBTAINED FROM PARTIAL SPREADS

Yutaka Hiramine

Department of Mathematics
Faculty of Education
Kumamoto University
Kurokami, Kumamoto, Japan

1. Introduction

Let $G = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ be a partition of a finite group G of order n^2 such that $S_0 = \{1\}$, $S_1 = S_1^{-1}$, $S_2 = S_2^{-1}$. We say that the subring $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ of $\mathbf{Z}[G]$ generated by $\{\widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2}\}$ is a *Schur ring of* (n,r)*-type* over a group G if $|S_1| = r(n-1)$, and $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} > = \mathbf{Z}\widehat{S_0} + \mathbf{Z}\widehat{S_1} + \mathbf{Z}\widehat{S_2}$ $(1 \le r \le n)$. We note that $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ is a Schur ring of (n,r)-type if and only if S_1 is a partial difference set with parameters $(n^2, r(n-1), *, **)$ for some suitable $*$ and $**$ (see [7]).

Clearly $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ is a Schur ring of (n,r)-type over a group G if and only if $< \widehat{S_0}, \widehat{S_2}, \widehat{S_1} >$ is a Schur ring of $(n, n-r+1)$-type over a group G. Schur rings of (n,r)-type are fairly common in finite geometries and examples are easily obtained from any partial spread $\{H_1, H_2, \cdots, H_r\}$ $(1 \le r \le n)$ of G of degree r in such a way that $S_0 = \{1\}$, $S_1 = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_r - \{1\}$, $S_2 = G - S_0 \cup S_1$. Such Schur rings are said to be of *partial spread type* and satisfy an equation

$$\widehat{S_1}^2 = r(n-1)\widehat{S_0} + (n + r^2 - 3r)\widehat{S_1} + r(r-1)\widehat{S_2}. \tag{1.1}$$

A Schur ring of (n,r)-type is said to be *of Latin square type*([7]) if it satisfies (1.1). All Schur rings of (n,r)-type known to the author are of Latin square type. However, Schur rings of (n,r)-type are not always those of partial spread type (see examples below). Any Schur ring of $(n,1)$-type over a group G is of partial spread type. We note that Schur rings of (n,r)-type are primitive unless $r \in \{1,n\}$([8]). Under an additional condition that the group is abelian, any Schur ring of (n,r)-type for $r \in \{2,3\}$ and $n > 22$ is of partial spread type (Theorem 4.10).

Example 1.1. (Bridges–Mena [3]) *Set $n = p^2$ with p an odd prime. Then there exists a partition $G = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ of a group $G = Z_n \times Z_n$ such that the Schur ring $\mathfrak{R} =< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ is of $(n, \sqrt{n})$-type. But, $\mathfrak{R}$ is not of partial spread type.*

Example 1.2. (Ito–Munemasa–Yamada [5]) *Let $G = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^s$. Then there exists a partition $G = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ of G such that the Schur ring $\mathfrak{R} =< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ is of $(2^s, 2^{\frac{s+1}{2}})$-type and $\mathfrak{R}$ is not of partial spread type.*

The above examples show that Schur rings of (n, r)-type are not necessarily obtained from partial spreads. In this article, however, we show the following.

Theorem 4.7. *Set $f(r) = 4r^5 - 8r^4 - 2r^3 + 10r^2 - 3r - 1$ and let $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ be a Schur ring of (n, r)-type over an abelian group G. If $n > f(r)$, then the Schur ring is of partial spread type.*

To prove this we show that

Theorem 4.1. *Let $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ be a Schur ring of (n, r)-type over an abelian group G. If $n > f(r)$, then $\widehat{S_1}^2 = r(n-1)\widehat{S_0} + (n + r^2 - 3r)\widehat{S_1} + r(r-1)\widehat{S_2}$*

Throughout the article all sets and groups are assumed to be finite. Most definitions and notations are standard and taken from [4] and [6].

2. Preliminaries

Let G be a finite group. For each non-empty subset S of G we set $S^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in S\}$ and $\widehat{S} = \sum_{x \in X} x$ $(\in \mathbf{C}[G])$. Let $G = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ be a partition of G. Assume that

(i) $S_0 = \{1\}$,

(ii) $S_i^{-1} = S_i$ for each i $(0 \le i \le 2)$, and

(iii) $\widehat{S_i}\widehat{S_i} = \sum_{0 \le k \le 2} p_{ij}^k \widehat{S_k}$, where p_{ij}^k's are nonnegative integers $(0 \le i, j \le 2)$.

Then the subring $\mathfrak{R} =< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ of $\mathbf{Z}[G]$ is called a 3-dimensional *Schur ring* over G. It is well known that the concept of a 3-dimensional Schur ring is equivalent to that of a strongly regular Cayley graph (cf.[3]). $\mathfrak{R}$ is called *primitive* if S_i generates G for any $i \ne 0$. Moreover, $\mathfrak{R}$ is said to be *of (n, r)-type* if $|S_1| = r(n-1)$ for some $r (1 \le r \le n)$. By definition, $\mathfrak{R}$ is a Schur ring of (n, r)-type if and only if it is of $(n, n - r + 1)$-type. We say that $\mathfrak{R}$ is *rational* if the eigenvalues of the corresponding strongly regular Cayley graph are rational. Otherwise it is called *irrational.* By [8] we have

Lemma 2.1. *Let* $\mathfrak{R} =< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ *be a Schur ring of* (n,r)*-type over a group* G *for some* $r(1 \le r \le n)$. *Then,*

(i) $\mathfrak{R}$ *is primitive unless* $r \in \{1,n\}$ *(see also Example 1 in Section 1), and*

(ii) $\mathfrak{R}$ *is rational.*

By Lemma 2.1(ii) , we have

Lemma 2.2. *Let* $\mathfrak{R} =< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ *be a Schur ring of* (n,r)*-type over an abelian group* G *for some* $r(1 \le r \le n)$. *Then,*

(i) Each Sylow subgroup of G *is noncyclic unless* $r \in \{1,n\}$.

(ii) Let $x, y \in G$. *If* $< x >=< y >$ *and* $x \in S_i$ *for some* $i \in \{1,2\}$, *then* $y \in S_i$.

(iii) If n *is a prime, then the Schur ring is of partial spread type.*

Proof. Deny (i). Then, by [2], the Schur ring is not primitive, contrary to Lemma 2.1. For (ii), see Corollary 2.5 of [3]. (iii) follows from (i) and (ii).

3. The case $r \in \{1,2,3\}$

In this section we study Schur rings of (n,r)-type for small r's and prove that

Theorem 3.1. *Let* $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ *be a Schur ring of* (n,r)*-type over an abelian group* G *of order* n^2 *for some* $r \in \{1,2,3\}$. *Then* $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ *is of Latin square type.*

In the rest of this section we set $S = S_1$, $T = S_2$, and $\widehat{S_0}$ is always identified with 1. Assume that $< 1, \widehat{S}, \widehat{T} >$ is a Schur ring of (n,r)-type over an abelian group G of order n^2.

By Lemma 2.1(ii) we have

Lemma 3.2. *Set* $\hat{S}^2 = a + b\hat{S} + c\hat{T}$, *where* a, b *and* c *are some nonnegative integers. Then,*

(i) $a = r(n-1)$ *and* $(c - r^2)n + r^2 + (b - c + 1)r + c = 0$.

(ii) If $r < (n+1)/2$, *then* c *is even.*

(iii) Set $m = \sqrt{(b-c)^2 + 4(rn - r - c)}$. *Then* m *is an integer.*

Proof. Since $S^{-1} = S$, $a = |S| = r(n-1)$. Hence $r^2(n-1)^2 = r(n-1) + br(n-1) + c(n-1)(n-r+1)$. From this $(c-r^2)n + r^2 + (b-c+1)r + c = 0$. Thus (i) holds.

Let t be any element of T and set $\Delta_t = \{(u,v) \mid u,v \in S, \ ,t = uv \ ,u \neq v\}$, $\Gamma_t = \{w \mid w \in S, \ t = w^2\}$. Clearly $(u,v) \in \Delta_t$ implies $(v,u) \in \Delta_t$. Hence $|\Delta_t| \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Deny (ii). Then $\Gamma_t \neq \phi$ for any $t \in T$. In particular, $|S| \geq |T|$ and so $r(n-1) \geq (n-1)(n-r+1)$. Thus $r \geq (n+1)/2$, a contradiction. Therefore (ii) holds.

Since $\hat{G} = 1 + \hat{S} + \hat{T}$ and $\hat{S}^2 = a + b\hat{S} + c\hat{T}$ we have $\hat{S}^2 - (b-c)\hat{S} - (rn - r - c) = c\hat{G}$. Hence (iii) follows from Lemma 2.1(ii).

Lemma 3.3. *Let notations be as in Lemma 3.2.*

(i) If $r \leq 2$, *then Theorem 3.1 holds.*

(ii) If $r = 3$, *then* $c \in \{2,4,6,8\}$.

Proof. We first argue that c is even when $r \leq 3$. Suppose c is odd. Then, by Lemma Lemma 3.2(ii), $r \geq (n+1)/2$. Hence $(n,r) \in \{(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(5,3)\}$. By Lemma 2.2(iii), we may assume that $(n,r) = (4,3)$. Then $|T| = 6$ and G is a group of order 16 and so G contains at least six non-identity square elements by a similar argument as in the proof of Lemma 3.2(ii). Hence $G \simeq Z_{16}$, contrary to Lemma 2.2(i). Thus c is even when $r \leq 3$.

Assume that $r = 1$. Then $(c-1)n + (b+1) = 0$ by Lemma 3.2(i). As b and c are nonnegative integers, $c = 0$ and $b = n-1$. Hence Theorem 3.1 holds in this case. Assume now that $r = 2$. Then $(n-1)(c-4) = -(2b+2) \leq -2$ by Lemma 3.2(i). Hence $c \in \{0,1,2,3\}$. By the first paragraph, we have $c \neq 1,3$ and by Lemma 2.1(i) $c \neq 0$. Hence $c = 2$, $b = n-2$. Thus Theorem 3.1 also holds in this case.

Assume $r = 3$. By Lemma 2.1(i), $c \neq 0$. By the first paragraph, it suffices to show that $c \leq 9$. Assume $c \geq 10$. Since $n = 2 + (6-3b)/(c-9) \leq 8$ by Lemma 3.2(i), one can show that $(b,c,n,d) = (0,10,8,144)$, $(0,12,4,132)$, $(1,10,5,89)$ or $(1,12,3,97)$. By Lemma 3.2(iii) , we have $(b,c,n,d) = (0,10,8,144)$ and $|G| =$

64, $|S| = 21$, $|T| = 42$. Moreover

$$\hat{S}^2 = 21 + 10\hat{T} \tag{3.3.1}$$

As $|S|$ is odd by Lemma 2.2(ii), S contains at least one involution, say z. Set $S = \{z, s_1, \cdots s_{20}\}$, $X = S - \{z\}$ and consider a factor group $\bar{G} = G/ < z >$ of order 32. By (3.3.1), all elements of S are distinct modulo $< z >$. Set $V = \{\bar{z}, \bar{s_1}, \cdots, \overline{s_{20}}\}$, $U = \{\bar{s_1}, \cdots, \overline{s_{20}}\}$, and $W = \bar{G} - V$. By (3.3.1), we have $Xz \subset T$ and clearly $\overline{Xz} = U$. Set $Y = T - Xz$. Then $\bar{t} \notin V$ for any $t \in Y$ and so $\bar{t} \in W$. Moreover, $|\{t \mid t \in Y, \ \bar{t} = \overline{t_0}\}| \leq 2$ for any $t_0 \in Y$. Since $|Y| = 22 = 2|W|$, it follows that $\widehat{\bar{Y}} = 2\widehat{W}$. Thus we have $(\bar{1} + \widehat{U})^2 = 21 \cdot \bar{1} + 10(\widehat{U} + 2\widehat{W})$. From this, $\widehat{U}^2 = 20 \cdot \bar{1} + 8\widehat{U} + 20\widehat{W}$. Hence $\bar{G}$ is a disjoint union of $\{\bar{1}\}$, U and W, and $< \bar{1}, U, W >$ is a 3-dimensional Schur ring over $\bar{G}$. Since $\widehat{\bar{G}} = \bar{1} + \widehat{U} + \widehat{W}$, we have $\widehat{W}^2 = 11 \cdot 1 + 10\widehat{W}$. This implies that $\{\bar{1}\} \cup W$ is a subgroup of $\bar{G}$. Hence $|\{\bar{1}\} \cup W| (= 12)$ divides $|\bar{G}| = 32$, a contradiction. Therefore (ii) holds.

Lemma 3.4. *Suppose $r = 3$ and $c \neq 6$. Then $n = 3\ell + 2$ for some positive integer ℓ and*

$$4c(c-6)^2 = ((c-9)^2\ell + c^2 - 11c + 36)^2 - (m(c-9))^2$$

Proof. By Lemmas 2.1(ii) and 3.2(i), $3|(n-2)$. Hence $n = 3\ell + 2$ for some integer $\ell \geq 0$. Thus $b = 9\ell - \ell c + 2$. The lemma follows immediately from Lemma 3.2(iii) .

Lemma 3.5. *Suppose $r = 3$.*

(i) $c \neq 2, 4$.

(ii) If $c = 8$, then one of the following holds.

(a) $|G| = 2^4 5^2$, $n = 20$, $|S| = 57$, $|T| = 342$, $b = 8$

(b) $|G| = 5^2 13^2$, $n = 65$, $|S| = 192$, $|T| = 4032$, $b = 23$

Proof. Assume $c = 2$. Then, by Lemma 3.4, $2^7 = (49\ell + 7m + 18)(49\ell - 7m + 18)$ Hence we have $(\ell, m, n) = (0, 2, 2)$, a contradiction. Similarly we have a contradiction when $c = 4$. By a similar argument , we also have (ii).

Lemma 3.6. *Suppose $r = 3$. Then $c \neq 8$.*

Proof. Assume (a) of Lemma 3.5(ii). Since $b = c = 8$, S is a (400,57,8)-difference set in G with a multiplier -1. By Theorem 4.25 of [6] we have a contradiction.

Assume (b) of Lemma 3.5(ii). Let P and Q be Sylow 5- and 13-subgroups of G, respectively. By Lemma 2.2(i) , P and Q are noncyclic. Clearly $S \neq P^* \cup Q^*$. Hence S contains at least one element of order 65, say z. For $u \in \{1,5,13,65\}$ set $W_u = \{x \in < z > | o(x) = u\}$. Then $W_{65} \subset S_1$ by Lemma 2.2(ii). By direct calculation, $\widehat{W_{65}}^2 = 48\widehat{W_1} + 36\widehat{W_5} + 36\widehat{W_{13}} + 33\widehat{W_{65}}$. Hence $b \geq 33$, a contradiction.

Proof of Theorem 3.1

By Lemmas 3.3(ii), 3.5 and 3.6 we have $c = 6$. Thus the lemma follows from Lemma 3.2(i).

4. Proof of Theorems 4.1 and 4.7

In this section we study Schur rings of (n, r)-type. First we prove that

Theorem 4.1. *If $n > f(r)$, then any Schur ring of (n, r)-type over an abelian group G of order n^2 is of Latin square type.*

Remark 4.2. (i) Since $\widehat{G} = \widehat{S_0} + \widehat{S_1} + \widehat{S_2}$, one can check that the Schur ring in Theorem 4.1 satisfies the following equations:

(i) $\widehat{S_1}^2 = r(n-1)\widehat{S_0} + (n + r^2 - 3r)\widehat{S_1} + r(r-1)\widehat{S_2}$

(ii) $\widehat{S_1}\widehat{S_2} = (r-1)(n-r+1)\widehat{S_1} + r(n-r)\widehat{S_2}$, and

(iii) $\widehat{S_2}^2 = (n-r+1)(n-1)\widehat{S_0} + (n-r+1)(n-r)\widehat{S_1} + (n^2 - 2rn + (r-1)(r+2))\widehat{S_2}$.

To prove Theorem 4.1 we may assume that $r \geq 4$ by Theorem 3.1. Similarly, as $< \widehat{S_0}, \widehat{S_2}, \widehat{S_1} >$ is a Schur ring of $(n, n-r+1)$-type, we may also assume that $n - r + 1 \geq 4$. Moreover, if $c = r^2 - r$, then $b = n + r^2 - 3r$ by Lemma 3.2(i) and so the theorem holds. Therefore, in the rest of this section we assume that

$$4 \leq r \leq n-3, \qquad r^2 - r \neq c. \tag{4.2.1}$$

Lemma 4.3. $c \neq r^2$.

Proof. Assume $c = r^2$. Then, by Lemma 3.2(i), $b = r^2 - 2r - 1$. Hence $m = \sqrt{4rn+1}$ by Lemma 3.2(iii). However, $m | n^2$ by Theorem 3.2 of [3]. This is a contradiction.

Lemma 4.4. $n \le \frac{4cr^2(r^2-r-c)^2-(r^2+c)(c-r^2+r)-(r^2-c)r}{(r^2-c)^2}$.

Proof. By Lemma 3.2(i),

$$c = r^2 + \frac{r^3 - 2r^2 - (b+1)r}{n-r+1} \tag{4.4.1}$$

and $b = (n-1)r + c - 1 - \frac{c(n+1)}{r}$. Substituting this into the equation of Lemma 3.2(iii) gives

$$(r^2-c)^2n^2 + 2(r^2+c)(c-r^2+r)n + (c-r^2+r)^2 = (rm)^2 \tag{4.4.2}$$

From this we have

$((r^2-c)^2n + (r^2+c)(c-r^2+r))^2 - ((r^2-c)rm)^2 = 4cr^2(r^2-r-c)^2$. Thus

$$(r^2-c)^2n + (r^2+c)(c-r^2+r) + (r^2-c)rm \mid 4cr^2(r^2-r-c)^2 \tag{4.4.3}$$

If $c = 0$, then the Schur ring is imprimitive, which is contrary to Lemma 2.1(i) and (4.2.1). Hence $c > 0$ and so $4cr^2(r^2-r-c)^2 > 0$ by (4.2.1). Therefore

$$(r^2-c)^2n + (r^2+c)(c-r^2+r) + (r^2-c)rm \le 4cr^2(r^2-r-c)^2. \tag{4.4.4}$$

As $m \ge 1$, the lemma follows from (4.4.4).

Lemma 4.5. *If $n > f(r)$, then $2 \le c \le r^2 - r - 1$.*

Proof. By assumption $r < (f(r)+1)/2 < (n+1)/2$. Hence c is even by Lemma 3.2(ii). In particular, $c \ge 2$.

By (4.4.1), $c < r^2 + \frac{r^3-2r^2-r}{f(r)-r+1} < r^2+1$. Hence $c \le r^2-1$ by Lemma 4.3. Assume $c = r^2 - g$, where $1 \le g \le r-1$. Then, by Lemma 3.2(i), we have

$b = r^2 - g - 1 - 2r + \frac{g(n+1)}{r}$. By Lemma 3.2(iii),

$$m^2 = (-1 - 2r + \frac{g(n+1)}{r})^2 + 4(rn - r - r^2 + g). \tag{4.5.1}$$

Set $d = \frac{g(n+1)}{r}$. Then d is a positive integer and $gn = rd - g$. Multiplying both sides of (4.5.1) by g^2 and substituting $rd - g$ for gn, we have

$(gm)^2 = (gd + 2r^2 - 2rg - g)^2 - 4(r-g)^2(r^2-g)$.

From this $(gd+2r^2-2rg-g+gm)(gd+2r^2-2rg-g-mg) = 4(r-g)^2(r^2-g) > 0$. Hence $gd + 2r^2 - 2rg - g + gm$ divides $4(r-g)^2(r^2-g)$ (> 0). It follows that $gd + 2r^2 - 2rg - g < 4(r-g)^2(r^2-g)$. Since $d = \frac{g(n+1)}{r}$, we have

$$n \leq \varphi(g) = -4rg + 4(r^3 + 2r^2) - (8r^4 + 4r^3 - 2r^2 - r)g^{-1} + (4r^5 - 2r^3)g^{-2} - 1.$$

As $g \leq r-1$, $\varphi(g)' = -4r - g^{-3}(8r^5 - 4r^3 - g(8r^4 + 4r^3 - 2r^2 - r)) < -4r < 0$. Thus $n \leq \varphi(g) \leq \varphi(1) = f(r)$, a contradiction. Therefore the lemma holds.

Proof of Theorem 4.1: Set $x = r^2 - c$. By Lemma 4.4, we have,

$$n \leq h(x) := -4r^2x + 4r^4 + 8r^3 - 1 - \frac{8r^5 + 4r^4 - 2r^2}{x} + \frac{4r^6 - 2r^3}{x^2}. \qquad (*)$$

By Lemma 4.5, $2 \leq c \leq r^2 - r - 1$ and so $r + 1 \leq x \leq r^2 - 2$. Clearly $(r+1)^{-1} \geq x \geq (r^2-2)^{-1}$. Since $\mu(x) := -\frac{8r^5+4r^4-2r^2}{x} + \frac{4r^6-2r^3}{x^2} = (4r^6-2r^3)(\frac{1}{x} - \frac{4r^5+2r^4-r^2}{4r^6-2r^3})^2 - \frac{(4r^5+2r^4-r^2)^2}{4r^6-2r^3}$ and $(r+1)^{-1} < \frac{4r^5+2r^4-r^2}{4r^6-2r^3} = \frac{4r^3+2r^2-1}{4r^4-2r}$, we have $n \leq h(x) \leq -4r^2(r+1) + (4r^4+8r^3-1) + \mu((r^2-2)^{-1}) = 4r^4 - 4r^3 - 4r^2 - 16r - 23 - \frac{34r^3+92r^2-64r-88}{r^3-2r^2+4} < f(r)$, a contradiction. Thus we have the theorem.

Remark 4.6. We note that $f(1) = 0$, $f(2) = 17$ and $f(3) = 350$. However, the equations in Remark 4.2 are true for every $r \leq 3$ as we have shown in Theorem 3.1. The author knows no example of a Schur ring of (n,r)-type that does not satisfy the equations. It is conceivable that every Schur ring of (n,r)-type over an abelian group may be of Latin square type though it is not necessarily of partial spread type.

As a corollary of Theorem 4.1 we prove

Theorem 4.7. *Let $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ be a Schur ring of (n,r)-type over an abelian group G. Suppose $n > f(r)$. Then the Schur ring is of partial spread type.*

To show this we need Bruck's result on nets (cf. Theorem 7.15 of [1]). A *net* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathbf{P},\mathbf{L})$ (see [4]) is an incidence structure with a set of points $\mathbf{P}$ and a set of lines $\mathbf{L}$ satisfying

(i) $[P_1, P_2] \leq 1$ for any two distinct points $P_1, P_2 \in \mathrm{P}$,

(Here $[P_1, P_2]$ denotes the number of lines of $\mathbf{L}$ through P_1 and P_2.)

(ii) for any non-flag (P, ℓ), there exists a unique line $g \in \mathbf{L}$ such that $P \in g$ and $\ell \cap g = \phi$, and

(iii) there exist 3 mutually non-parallel lines of L.

If $\mathfrak{N}(\mathbf{P},\mathbf{L})$ is a net, then it is well known that there exist positive integers n and r $(3 \le r \le n+1)$ such that

$|\mathbf{P}| = n^2, \quad |\mathbf{L}| = nr, \quad \text{and } |\ell| = n, \quad [P] = n$

for any line $\ell \in \mathbf{L}$ and a point $P \in \mathbf{P}$. Therefore, the net is called *an* (n, r)*-net.*

Theorem 4.8 (R. H. Bruck ([1] Theorem 10.7.15)). *Let* (P,E) *be a strongly regular graph with parameters* $(v, k, \lambda, \mu) = (n^2, r(n-1), n + r^2 - 3r, r(r-1))$.
If $n > (r^4 - 2r^3 + 2r^2 + r - 2)/2$*, there exists an* (n, r)*-net* $\mathfrak{N}(\mathbf{P},\mathbf{L})$ *on* P *such that*

$\mathrm{E} = \{\{P_1, P_2\} \mid P_1, P_2 \in \mathrm{P},\ P_1 \neq P_2,\ [P_1, P_2] = 1\}.$

Remark 4.9. In the above theorem, **L** is the set of maximal complete subgraphs of **(P,E)** , and each line of **L** has exactly n vertices. (see the proof of Theorem 10.7.15 of [1]).

Lemma 4.10. *Let* $\mathfrak{N}(\mathbf{P},\mathbf{L})$ *be an* (n, r)*-net admitting a point-regular abelian automorphism group* G*. If* $r \neq n, n+1$*, then*

(i) $G_{\ell_1} \cap G_{\ell_2} = 1$ *for any non-parallel lines* ℓ_1, $\ell_2 \in \mathrm{L}$*, and*

(ii) G *stabilizes each parallel class* $\mathfrak{C}$*, and* G_ℓ *is a subgroup of order* n *for* $\ell \in \mathfrak{C}$*.*

Proof. (i) is obvious. Let $\mathbf{L}_1$ be a G-orbit on $\mathbf{L}$ and let $\ell_1 \in \mathrm{L}_1$. Set $H = G_{\ell_1}$. If $G_{\ell_1} = 1$, then $|\mathbf{L}_1| = |G| = n^2$ and so $r = n$ or $n+1$, contrary to the assumption. Hence $G_{\ell_1} \neq 1$. If $\mathbf{L}_1$ contains a line ℓ_2 non-parallel to ℓ_1, then $G_{\ell_1} = G_{\ell_2}$ as G is abelian. This implies that $G_{\ell_1} (= G_{\ell_2})$ fixes $\ell_1 \cap \ell_2$, contrary to the regularity of G on $\mathbf{P}$. Thus $\mathbf{L}_1 \subset \mathfrak{C}$ for some parallel class $\mathfrak{C}$ of the net. If $\mathrm{L}_1 \neq \mathfrak{C}$, then $|G_{\ell_1}| > n$ as $|\mathfrak{C}| = n$. Hence, as $[\ell_1] = n$, G_{ℓ_1} fixes a point on ℓ_1, a contradiction. Therefore $\mathbf{L}_1 = \mathfrak{C}$ and $|G_{\ell_1}| = n$. Thus (ii) holds.

Proof of Theorem 4.7 : We consider strongly regular Cayley graph $\Gamma = \Gamma_{G,S_1}$ and apply Theorem 4.8 to Γ. Let L be the set of lines of the resulting net. Let $\ell \in \mathbf{L}$. Clearly ℓ is a subset of G and is a maximal complete subgraph of Γ by Remark 4.9. By definition of edges of Γ, ℓx is also a maximal complete subgraph of

Γ for any $x \in G$ and so is a line of L by Remark 4.9. Thus G is an automorphism group of the net. Let $\ell_1, \cdots, \ell_r$ be the set of lines through 1. Set $\ell = \ell_i$ and $G_\ell = \{x \in G \mid \ell x = \ell\}$. Let $x \in G_\ell$. Then $x = 1 \cdot x \in \ell \cdot x = \ell$ and so $G_\ell \subset \ell$. On the other hand $|G : G_\ell| = n$ by Lemma 4.10(ii) and hence $|G_\ell| = n^2/n = n$. Thus $G_\ell = \ell$ and so ℓ is a subgroup of G of order n. Moreover $y = 1^{-1}y \in S_1$ for each $y \in \ell - \{1\}$ and hence $\ell - \{1\} \subset S_1$. By Lemma 4.10(i), Theorem 4.7 holds.

By Theorems 3.1 and 4.8 and by Lemma 2.2(iii), similarly we have

Theorem 4.11. *Let $r \in \{1,2,3\}$ and let $< \widehat{S_0}, \widehat{S_1}, \widehat{S_2} >$ be a Schur ring of (n,r)-type over an abelian group G. Then the Schur ring is of partial spread type except in the following cases: (i) $(n,r) = (4,2)$ (ii) $r = 3$ and $n \leq 22$.*

Acknowledgment

The author thanks A. Munemasa for many valuable comments on pseudo net-graphs.

References

1. Th. Beth, D. Jungnickel anh H. Lenz, *Design Theory*, Cambridge University Press, 1968.
2. W. G. Bridges and R. A. Mena, *Rational circulants with rational spectra and cyclic strongly regular graphs*, ARS Combinatoria 8 (1979), 143–161.
3. W. G. Bridges and R. A. Mena, *Rational G-matrices with rational eigenvalues*, Journal of Combin. Ser. A 32 (1982), 264–280.
4. P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1968.
5. T.Ito, A. Munemasa and M. Yamada, *Amorphous association schemes over the Galois rings of characteristic 4*, Europ. J. Combinatorics 12 (1991), 513–526.
6. E.S. Lander, *Symmetric Designs : An algebraic approach , Lect. Notes Series 74*, Cambridge University Press, 1983.
7. S. L. Ma, *A survey of partial difference sets*, Designs Codes and Cryptography 4 (1994), 221–261.
8. J. J. Seidel, *Strongly regular graphs with (-1,1,0) adjacency matrix having eigenvalue 3*, Lin. Alg. and Appl. 1 (1968), 335–298.

次数が$n^2+1,\ \lambda=0,\mu=2$の強正則グラフについて

近畿大学理工学部　中川暢夫

Distance regular graphs Γ が条件$b_2(\Gamma)=1$を満たすとき、いろいろ調べられていて下記（定理1, 定理2, 定理3）のような良い結果が得られているが、完全な分類には至っていない。直径が4の場合はパラメーターが$\lambda=0,\mu=2$の強正則グラフの antipodal double cover の分類問題となり、直径が3の場合は完全グラフの antipodal r-cover の分類問題として残されている。ここでは、前者の場合について調べたことを、のべてみたい。（補題1, 定理4）

定理 1 Γを距離正則グラフとする。$b_2(\Gamma)=1, d(\Gamma)\geq 5$ならば,$\Gamma$ は *ordinary 2-gon*又は *Dodecahedron*である。(cf.[2],Cor4.3.12)

定理 2 Γを距離正則グラフとする。$b_2(\Gamma)=1, d(\Gamma)=4, k(\Gamma)>2$ ならば、Γはパラメーターが$(k,a_1,c_2)=(n^2+1,0,2)$の強正則グラフの *antipodal double cover*である。ここで、nは4で割り切れない正の整数である。(cf.[1])

定理 3 Γを距離正則グラフとする。$b_2(\Gamma)=1, d(\Gamma)=3, k(\Gamma)>2$ならば、$\Gamma$は完全グラフの *antipodal cover*である。(cf.[1])

(Example 1)　　　　$n=2$(Wells graph)

$$\iota(\Gamma)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$V(\Gamma)=\{(i,j)\mid i\neq j,\ 1\leq i,j\leq 5\}\cup\{i^{\pm}\mid 1\leq i\leq 5\}\cup\{\infty^{\pm}\}$
$d((i,j),(k,\ell))=3\Leftrightarrow i=k,\text{and } j\neq \ell \text{ or } j=\ell,\text{and } i\neq k,$
$i^{+}\sim(i,j),\ i^{-}\sim(j,i),\ (1\leq\forall i,j\leq 5, i\neq j),$
$\infty^{+}\sim i^{+}(\forall i),\ \infty^{-}\sim i^{-}(\forall i)$
$\Gamma_2(\infty^{+})$ は Dodecahedron.

$n\geq 3$ の例は知られていない。
次数が$n^2+1,\lambda=0,\mu=2$の強正則グラフの例は3つ知られている。$n=1$に対するものは自明なものである。

(Example 2)　$n=2$ (Wells graph の folded graph)

$$\iota(\widetilde{\Gamma}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$V(\widetilde{\Gamma}) = \{\{i,j\} \mid 1 \le i,j \le 5,\ i \ne j\} \cup \{1,2,3,4,5,\infty\}$
$\{i,j\} \sim \{k,\ell\} \Leftrightarrow \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset,\ i \sim \{k,\ell\} \Leftrightarrow i = k \text{ or } i = \ell,\ \infty \sim i\,(\forall i)$

(Example 3) $n = 3$ (Gewirtz graph)

$$\iota(\widetilde{\Gamma}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 10 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$(\Omega, \mathbf{B})$ を (22,6,3)-steiner system とする。Ω の 1 元 a を固定する。
$V(\widetilde{\Gamma}_2) = \{B \in \mathbf{B} \mid a \notin B\}$, $\left|V(\widetilde{\Gamma}_2)\right| = 77 - 21 = 56$
$B_1 \sim B_2 \Leftrightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$
($\widetilde{\Gamma}_2$ の antipodal doble cover は存在するが、それの直径は 5 で、直径 4 の antipodal doble cover は存在しないことが知られている。(cf.[2], pp372))

$n \ge 5$ のとき、$k = n^2+1, \lambda = 0, \mu = 2$ なる強正則グラフ Γ は知られていない。このパラメーターをもつ強正則グラフの２つの部分グラフの固有値とその重複度を調べてみた。

補題 1 $V(\Gamma)$ の一点 α に対し、Γ の部分グラフ$\Gamma_2(\alpha)$ 及び$\alpha \sim \beta$ なる $V(\Gamma)$ の二点α, β に対し、Γ の部分グラフ $\Gamma_2(\alpha) \cap \Gamma_2(\beta)$ の固有値とその重複度は次のようになる。

(1) $V(\Gamma)$ の一点 α に対し、Γ の部分グラフ $\Gamma_2(\alpha)$ の固有値とその重複度

θ	n^2-1	$n-1$	-2	$-n-1$
$m(\theta)$	1	$\dfrac{(n^2+1)(n^2+n-2)}{4}$	n^2	$\dfrac{(n^2+1)(n^2-n-2)}{4}$

(2) $\alpha \sim \beta$ なる $V(\Gamma)$ の二点 α, β に対し、Γ の部分グラフ $\Gamma_2(\alpha) \cap \Gamma_2(\beta)$ の固有値とその重複度

θ	n^2-3	$n-1$	-1	-3	$-n-1$
$m(\theta)$	1	$\dfrac{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}^3+2\mathrm{n}^2-3\mathrm{n}-2)}{4}$	n^2-1	n^2-1	$\dfrac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}^3-2\mathrm{n}^2-3\mathrm{n}+2)}{4}$

（証明）Γ 自身の固有値とその重複度は容易に計算できる。$\Gamma_2(\alpha)$ 及び $\Gamma_2(\alpha) \cap \Gamma_2(\beta)$ $(\alpha \sim \beta)$ の固有値とその重複度は同じ手順で証明されるので、後者の方の固有値とそ

の重複度を求める。

Γは$k=n^2+1,\lambda=0,\mu=2$の強正則グラフだから、Γの隣接行列をAとするとき、次の式が成り立つ。

$$A^2=-2A+(n^2-1)I+2J \tag{1}$$

ここで、Jは全1 行列を表わす。

部分グラフ$\Gamma_2(\alpha)\cap\Gamma_2(\beta)$ をΔとおき、$\Gamma^*(\alpha)=\Gamma(\alpha)\backslash\{\beta\}$、$\Gamma^*(\beta)=\Gamma(\beta)\backslash\{\alpha\}$ とおく。$\Gamma^*(\alpha)$ の元uに対し$|\Gamma(\beta)\cap\Gamma(u)|=2$ だから$u\sim v$ なる $\Gamma^*(\beta)$ の元vが唯一つ存在する。このことより、A は次のように小行列に区分けされる。

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & X & Y & 0 & 0\\ X^t & 0 & E & 1 & 0\\ Y^t & E & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1^t & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1^t & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(ここで、行は上から下に向けて順にΔ,$\Gamma^*(\alpha)$,$\Gamma^*(\beta)$, α,β で添え字付けられており、列は左から右に向けて順にΔ,$\Gamma^*(\alpha)$,$\Gamma^*(\beta)$, α,β で添え字付けられているものとする。故にA_1は Δ の隣接行列を表わす。またX,Yは$(\frac{n^2(n^2-1)}{2},n^2)$行列で, 行列$X$は$\Delta$と$\Gamma^*(\alpha)$の隣接関係を表わし、行列$Y$は$\Delta$と$\Gamma^*(\beta)$の隣接関係を表わす。)

以下$\frac{n^2(n^2-1)}{2}=m$とおく。さて、A^2の$(1,1)$小行列,$(1,2)$小行列,$(1,3)$小行列 がそれぞれ$A_1^2+XX^t+YY^t,A_1X+Y,A_1Y+X$となるから、(1)式より次の3つの式が成り立つ。

$$A_1^2+XX^t+YY^t=-2A_1+(n^2-1)I+2J_{(m,m)} \tag{2}$$

$$A_1X+Y=-2X+2J_{(m,n^2)} \tag{3}$$

$$A_1Y+X=-2Y+2J_{(m,n^2)} \tag{4}$$

(2)式より$XX^t+YY^t\equiv -A_1^2-2A_1+(n^2-1)I \pmod{J_{(m,m)}}$. また、(3)式より$(A_1+2I)X\equiv -Y \pmod{J_{(m,n^2)}}$. 故に $YJ_{((n^2,m)}=2J_{(m,m)}$を考慮して、$(A_1+2I)XX^t(A_1+2I)\equiv YY^t \pmod{J_{(m,m)}}$を得る。同様にして、(4)式より$(A_1+2I)YY^t(A_1+2I)\equiv XX^t \pmod{J_{(m,m)}}$が成り立つ。これらの二式の辺ぺんを加えた式の$XX^t+YY^t$の部分に$-A_1^2-2A_1+(n^2-1)I$を代入し、$A_1J_{(m,m)}=(n^2-1)J_{(m,m)}$が成り立つことに注意してこの式を整理すると次の式が得られる。

$$A_1^4+6A_1^3+(-n^2+12)A_1^2+(-4n^2+10)A_1-3(n^2-1)I=uJ\ (\exists u\in\mathbb{Z}) \tag{5}$$

ここでA_1の固有値の一つをθ,θに属する固有ベクトルを $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^t$、$\sum_{i=1}^m a_i=\hat{a}$ とする。すると、

$$\{\theta^4+6\theta^3+(-n^2+12)\theta^2+(-4n^2+10)\theta-3(n^2-1)\}\mathbf{a}=\hat{a}u\mathbf{1} \tag{6}$$

が成り立つ。このとき、$\hat{a}=0$ ならば、$\theta^4+6\theta^3+(-n^2+12)\theta^2+(-4n^2+10)\theta-3(n^2-1)$ $=0$ が成り立ち、この方程式の根として、$\theta=n-1,-1,-3$, または $\theta=-n-1$ となる。、一方、$\hat{a}\neq 0$ ならば、$0\leq j\leq m$ なる全ての j に対し、$\{\theta^4+6\theta^3+(-n^2+12)\theta^2+(-4n^2+10)\theta-3(n^2-1)\}a_j=\hat{a}u$ となり、a_j は j の取り方によらず一定値 c をとる。このとき、$\mathbf{a}=\mathbf{1}$ と思ってよい。故に、$\theta=n^2-3$ となる。
さて、A_1 の固有値 $n^2-3, n-1, -n-1, -1, -3$ の重複度をそれぞれ $1, f, g, h, k$ とおくと、A_1 の次数の計算から次式を得る。

$$1+f+g+h+k=\frac{n^2(n^2-1)}{2} \tag{7}$$

$Tr(A_1)=0$ より、

$$(n^2-3)+(n-1)f+(-n-1)g+(-h)+(-3k)=0 \tag{8}$$

が成り立つ。$u\in\Delta$ に対して、$XX^t(u,u)=|\{x\in\Gamma^*(\alpha)\mid u\sim x\}|=2$. 従って $Tr(XX^t)=n^2(n^2-1)$. 同様に $Tr(YY^t)=n^2(n^2-1)$. また、$Tr(2J_{(m,m)})$ $=n^2(n^2-1), Tr(A_1)=0$. 故に (2) 式より $Tr(A_1^2)=\frac{(n^2-3)n^2(n^2-1)}{2}$. それゆえ次の式を得る。

$$(n^2-3)^2+(n-1)^2f+(n+1)^2g+h+9k=\frac{(n^2-3)n^2(n^2-1)}{2} \tag{9}$$

(2) 式の両辺に A_1 をかけて、$A_1^3=(n^2-1)A_1-2A_1^2+2A_1J-A_1XX^t-A_1YY^t$.
$u\in\Delta$ に対して、$A_1XX^t(u,u)=\sum_{v\in\Delta}\sum_{y\in\Gamma^*(\alpha)}A_1(u,v)X(v,y)X^t(y,u)=0$. 何故なら、グラフ Γ は u,v,y を 3 頂点とする三角形を持たない。
故に、$Tr(A_1XX^t)=0$. 同様に、$Tr(A_1YY^t)=0$. また、$A_1J_{(m,m)}=(n^2-3)J_{(m,m)}$ に注意すれば、等式 $Tr(A_1^3)=0$ を導くことが出来る。従って、次の等式が成り立つ。

$$(n^2-3)^3+(n-1)^3f-(n+1)^3g-h-27k=0 \tag{10}$$

f,g,h,k に関する連立方程式 (7), (8), (9), (10) を解いて、$f=\frac{(n-1)(n^3+2n^2-3n-2)}{4}$ $,g=\frac{(n+1)(n^3-2n^2-3n+2)}{4}, g=n^2-1, k=n^2-1$ を得る。　(証明終り)

(問題) : $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ を Γ の四角形とする。
$(\alpha\sim\beta\sim\gamma\sim\delta\sim\alpha$ and $\alpha\not\sim\gamma,\ \beta\not\sim\delta)$
Γ の部分グラフ $\Gamma_2(\alpha)\cap\Gamma_2(\beta)\cap\Gamma_2(\gamma)\cap\Gamma_2(\delta)$ の固有値とその重複度を求めよ。

次に p を奇素数とし、$PGL(2,p^2)$ が作用するグラフのなかに今問題とする強正則グラフがないか調べてみた。$G_0=PSL(2,p^2)$ とおく。
$V(\Gamma)=\{\infty\}\cup\{Sylow_p(G_0)\}\cup\{Involutions\,of\,G_0\}$ とする。
$|V(\Gamma)|=1+(p^2+1)+(\frac{(p^2+1)(p^2)}{2})), \{Involutions\,of\,G_0\}$ を $I(G_0)$ とかく。$V(\Gamma)$ にうまく隣接関係を入れて intersection array が

$$\iota(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p^2-1 \\ p^2+1 & p^2 & 0 \end{bmatrix}$$

の強正則グラフが構成できるかもしれないと思った。
まず $\infty \sim P\ (\forall P \in Sylow_p(G_0))$, $P \sim x \Leftrightarrow x \in N_G(P)\ (x \in I(G_0))$ とする。各 involution x が normalize する Sylow-p-群は丁度二つあること、任意の二つの involution は G_0 で共役であることを注意する。$z \in I(G_0)$ なる z を一つ固定する。$|C_{G_0}(z)| = p^2-1$, $I(G_0)$ の 二つの $C_{G_0}(z)$-共役類の和を z に隣接する頂点と考えて、G_0-共役で $I(G_0)$ 全体に隣接関係を広げると次数 p^2+1 の正則グラフができる場合が多い。このようにして得られるグラフの中に $PGL(2,p^2)$ が作用する強正則グラフがないか期待したが、残念ながら次の定理でみるように $p \equiv 1\ (\mathrm{mod} 4)$ の場合は否定的な結論をえた。(Gewirtz graph には PGL(2,9) が作用している)。

定理 4 p を奇素数とし、Γ を次数が p^2+1, $\lambda = 0, \mu = 2$ の強正則グラフとする。$G = PGL(2,p^2)$ が $Aut(\Gamma)$ の部分群で、G が Γ の一点 ∞ を固定し、$\Gamma_2(\infty)$ 上に可移に作用すると仮定する。このとき $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ が成り立つ。

(証明) $PSL(2,p^2)$ の指標表 (cf.[3]) から $PGL(2,p^2)$ の指標表が次のように求まる。

	1_G	λ	ψ_1	ψ_2	$\rho_{q+1}^{(n)}$	$\rho_{q-1}^{(m)}$
1	1	1	q	q	$q+1$	$q-1$
c	1	1	0	0	1	-1
$a^\ell(\ell{:}even)$	1	1	1	1	$\varepsilon^{2\ell n}+\varepsilon^{-2\ell n}$	0
$a^\ell(\ell{:}odd)$	1	-1	1	-1	$\varepsilon^{2(\ell-1)n}+\varepsilon^{-2(\ell-1)n}$	0
z	1	1	1	1	$2(-1)^n$	0
$b^k(k{:}even)$	1	1	-1	-1	0	$-(\delta^{2kn}+\delta^{-2kn})$
$b^k(k{:}odd)$	1	-1	-1	1	0	$-(\delta^{(2k-1)n}+\delta^{-(2k-1)n})$
τ	1	-1	-1	1	0	$-2(-1)^m$

(ここで、$q = p^2$ とする。c, a, b はそれぞれ位数 $p, q-1, q+1$ の G の元であり、z は $PSL(2,q)$ の involusion で、τ は $PSL(2,q)$ に入らない involusion である。また、$1 \le n \le \frac{q-3}{2}$, $1 \le m \le \frac{q-1}{2}$,$1 \le \ell \le \frac{q-3}{2}$, $1 \le k \le \frac{q-1}{2}$ である。更に、ε, δ はそれぞれ1の原始 $q-1$ 乗根、原始 $q+1$ 乗根である。)

さて、G の位数 $2(q-1)$ の部分群は互いに共役であるから、置換群 $(G, I(G_0))$ と置換群 $(G, \Gamma_2(\infty))$ とは置換同型となる。置換群 $(G, I(G_0))$ の permutation character を χ と

すると、内積の計算により、

$$\chi = 1_G + \psi_1 + \psi_2 + \theta_1 + \cdots + \theta_h + \chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_f$$

ここで、$h = \frac{q-1}{4}, f = \frac{q-5}{4}$ で、$\{\theta_1, \cdots, \theta_h\} \subset \{\rho_{q-1}^{(m)} \mid 1 \leq m \leq \frac{q-1}{2}\}$,
$\{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_f\} \subset \{\rho_{q+1}^{(n)} \mid 1 \leq n \leq \frac{q-3}{2}\}$ である。また、$i \neq j$ ならば、$\theta_i \neq \theta_j$
$i' \neq j'$ ならば、$\chi_{i'} \neq \chi_{j'}$ である。特に、χ は multiplicity free となる。G の指標 ϑ に対して、$\tilde{\vartheta}$ で ϑ に対応する,G の表現を表わすことにし、正方行列 X をその小行列達に区分けするとき、上から順に主対角に並ぶ正方小行列が $X_1, X_2, \cdots, X_e$ であり、その他の小行列が0ならば、X=diag$(X_1, X_2, \cdots, X_e)$ で表わすことにする。上の式より、次のことがいえる。
あるユニタリー行列 U が存在して、任意の元 $g \in G$ に対し、

$$U^{-1}\tilde{\chi}(g)U = \mathrm{diag}(\tilde{1_G}(g), \tilde{\psi_1}(g), \tilde{\psi_2}(g), \tilde{\theta_1}(g), \cdots, \tilde{\theta_h}(g), \tilde{\chi_0}(g), \tilde{\chi_1}(g), \cdots, \tilde{\chi_f}(g)).$$

一方、A をグラフ $\Gamma_2(\infty)$ の隣接行列とすると、$u, v \in \Gamma_2(\infty)$ において、「$u \sim v \Leftrightarrow u^g \sim v^g \ (\forall g \in G)$」が成り立つ故、$A\tilde{\chi}(g) = \tilde{\chi}(g)A(\ \forall g \in G)$ がいえる。従って、$D = U^{-1}AU$ とおくと、任意の元 $g \in G$ に対し、D と
$\mathrm{diag}(\tilde{1_G}(g), \tilde{\psi_1}(g), \tilde{\psi_2}(g), \tilde{\theta_1}(g), \cdots, \tilde{\theta_h}(g), \tilde{\chi_0}(g), \tilde{\chi_1}(g), \cdots, \tilde{\chi_f}(g))$ は可換である。このとき、(Schur's lemma) より

$$D = \mathrm{diag}(D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, \cdots, D_h^{(3)}, D_0^{(4)}, D_1^{(4)}, \cdots, D_f^{(4)})$$

とかける。ここで、$D_1^{(1)}, D_i^{(2)}(i = 1, 2), D_i^{(3)}(1 \leq i \leq h), D_i^{(4)}(0 \leq i \leq f)$ はそれぞれ1次、$q(=p^2)$ 次、$(q-1)$ 次、$(q+1)$ 次の適当なスカラー行列である。よって、A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ は適当な複素数,$d_1^{(1)}, d_i^{(2)}(i = 1, 2), d_i^{(3)}(1 \leq i \leq h), d_i^{(4)}(0 \leq i \leq f)$ に対して、次のような式となる。

$$\begin{aligned} &(x - d_1^{(1)})(x - d_1^{(2)})^q(x - d_2^{(2)})^q(x - d_1^{(3)})^{q-1} \cdots (x - d_h^{(3)})^{q-1} \\ &(x - d_0^{(4)})^{q+1}(x - d_1^{(4)})^{q+1} \cdots (x - d_f^{(4)})^{q+1} \end{aligned} \tag{11}$$

他方、(補題1) より、

$$\Phi_A(x) = (x - q + 1)(x + 2)^q(x - p + 1)^{\frac{(q+1)(q+p-2)}{4}}(x + p + 1)^{\frac{(q+1)(q-p-2)}{4}} \tag{12}$$

(11), (12) 式より、
Case(1):

$$\begin{cases} \dfrac{(p^2+1)(p^2+p-2)}{4} = p^2 + \ell(p^2-1) + m(p^2+1) \cdots \text{(i)} \\ \dfrac{(p^2+1)(p^2-p-2)}{4} = \ell'(p^2-1) + m'(p^2+1) \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

Case(2):

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(p^2+1)(p^2-p-2)}{4} = p^2 + \ell(p^2-1) + m(p^2+1) \cdots \text{(iii)} \\ \dfrac{(p^2+1)(p^2+p-2)}{4} = \ell'(p^2-1) + m'(p^2+1) \cdots \text{(iv)}\end{array}\right.$$

のいずれかが成り立つ。ここで、ℓ, ℓ', m, m' は0又は正の整数で、$\ell + \ell' = \frac{p^2-1}{4}, m + m' = \frac{p^2-5}{4}$ を満たす。さて、Case(1) が成り立つとき、$\frac{(p^2+1)}{2}$ の任意の素数因子を r とすると、r は奇素数であるが、(ii) と $(\frac{(p^2+1)}{2}, p^2-1) = 2$ より r は ℓ' を割り切る。$\ell' \neq 0$ とすると、ℓ' は $\frac{(p^2+1)}{2}$ の倍数となるが、これは $\ell' \leq \frac{(p^2-1)}{4}$ に反する。故に $\ell' = 0$ となる。従って (ii) より、$m' = \frac{(p^2-p-2)}{4}$ となって、$p^2 - p - 2 \equiv 0 \pmod 4$ 即ち $p \equiv 3 \pmod 4$ を得る。次に、Case(2) が成り立つとき,Case(1) と同様に考えると、(iv) において、$\ell' = 0$ がいえる。このとき、$\frac{(p^2+p-2)}{4} = m' \leq \frac{p^2-5}{4}$ となり、これは矛盾である。　（証明終り）

参考文献

[1] M.Araya,A.Hiraki and A.Jurisic,"Distance-Regular Graphs with $b_2 = 1$",to appear.

[2] A.E.Brouwer,A.M.Cohen and A.Neumaier, *Distace-Regular Graphs.* Springer-Verlag,Berlin Heidelberg New York,1989.

[3] L.Domhoff, *Group Representation Theory* Marcel Dekker,Inc.,New York,1971.

Distance-regular subgraphs in a regular near polygon

大阪教育大　平木　彰

1 "いい"部分グラフの存在とは？

一般に知られている多くの距離正則グラフは多くの正則性の高いグラフを含んでいる．例えば，Hamming graph $H(d,n)$ は任意の s,t $(s \leq d, t \leq n)$ に対し，Hamming graph $H(s,t)$ を部分グラフとして含んでいる．同様に，Johnson graph は Johnson graph を doubled Odd graph は doubled Odd graph をその部分グラフとして持っている．

これを,「よく知られている距離正則グラフは美しい部分グラフの列を含んでいる」と考えるか「美しい部分グラフの列を含んでいるがゆえによく知られている」と考えるかは考える人の自由として，次のような疑問を出発点としよう．

問題　距離正則グラフのパラメータ（またはその一部）を与えたときそれだけから"いい"部分グラフの存在が示せるだろうか．

問題中の"いい"という言葉の解釈によって問題の意味は大きく異なるかもしれないがここで言う"いい"とは"良い"と言うことである．何がどのように"良い"のかはもう少しあとで説明することにして，問題の意味をもう少しほり下げてみよう．

距離正則グラフの定義や基本性質については，[B],[BCN],[BI] の 3 つの本に書かれているので，ここでは省略する．

距離正則グラフの正則性を示す重要なパラメータは直径 d と intersection numbers $c_i, a_i, b_i\,(0 \leq i \leq d)$ であり，それを下のようにならべたものを intersection array とよぶ．

$$\iota(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} * & c_1 & c_2 & \cdots & c_j & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_j & \cdots & b_{d-1} & * \end{array} \right\}.$$

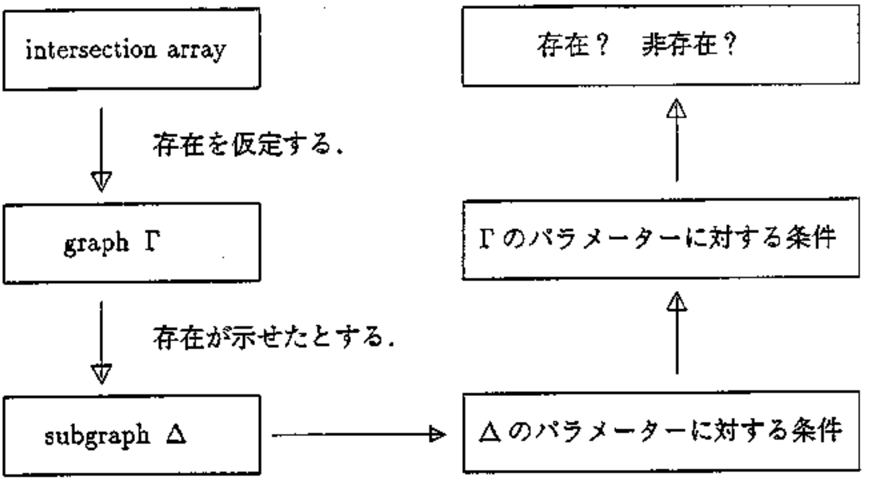
次のことが最も大きな問題であると考えられる．

問題　任意の array を与えた時，そのパラメータを持つ距離正則グラフは存在するか？存在した場合そのグラフは一意的か？

実際，非存在が証明できないが実例も見つかっていない intersection numbers の組が山のように存在している．また同型でない 2 つ以上のグラフが同じ intersection array を持つような例もいくつか存在している．

{ パラメータの組 }　－－－－－－－－－－－> グラフの存在？非存在？

今ここにあるパラメータの組（またはその一部）を与えたとする．それだけから，そのパラメータをもつグラフの存在，非存在（または存在のための条件）を得たいのだが一般には難しい場合が多い．そこで、もしグラフの存在，非存在はわからないとしても仮にある部分グラフ（またはそのパラメータや存在条件）が得られたとするならばその性質からもとのグラフに関する情報が得られるかもしれない．



そこで もし部分グラフ Δ の持っている性質や存在条件からもとのグラフ Γ に関する情報（存在に対する強い制約）が得られるときに部分グラフ Δ のことをいい部分グラフとよぶことにする．そうすれば前述の問題の意味するところが少しは明確になったように思われる．

その一方で今度は「強い制約」とは何がどのように強いのか？という疑問が生まれるかもしれない．それに関しては様々な意見があると思われるがここでいう強いとは

「非存在が示せるような強い制約」

または

「ある例外をのぞいては非存在が示せるような強い制約」

を意味することにしよう．

実際，主定理及びその系達によって得られる強さは以下のものである．

$$r := \max\{\, i \mid (c_i, a_i, b_i) = (1, a_1, b_1)\,\}$$

とおいた時

「ある条件下でパラメータ r を定数でおさえることのできるぐらい強い制約」．

ではこの r を定数でおさえることにどんな意味があるのだろうか？
intersection numbers における $k := b_0$ は valency と呼ばれ一点の近傍の数を表している．これに対して次の有名な坂内-伊藤予想がある．

予想　$3 \leq k$ を固定したとき，valency k を持つ距離正則グラフは高々有限個しか存在しない．

これは次のことと同値である．

「$k \geq 3$ に対して距離正則グラフの直径 d は k の関数で制限できる．」

今のところこの予想は未解決であるが，それに対して次の結果が証明されている．

定理 (A.A.Ivanov)　直径 d は r と k に関する関数で制限できる, i.e. , $d < f(r, k)$.

そこで前述の坂内-伊藤予想を解決するための次の段階は r を k の関数，または k に関係のない定数で制限することであろう．
これは上の制約が坂内-伊藤予想の部分的な解答を与えており，予想の解決への大きな前進を与えていると考えられる．それが前述の条件を強い制約とよぶ理由である．

2 主定理とその系

前に述べた "いい" 部分グラフの存在に関してこれまで得られた結果を紹介する。

定理 [I,II] Let Γ be a distance-regular graph with $r \geq 2$. Suppose $c_{2r+1} = 1$. Take any u and v in Γ at distance $r+1$. Then there exists $\Delta(u, v)$ a collinearity graph of a Moore geometry of the diameter $r+1$ and the valency a_{r+1}. Moreover if $a_1 = 0$, $\Delta(u, v)$ is a Moore graph.

上の定理は $c_{2r+1} = 1$ という条件だけから距離正則グラフ内に a collinearity graph of Moore geometry (a Moore graph) が部分グラフとして存在していることが示せることを意味している。この部分グラフに対して次のことがよく知られている。

定理　A collinearity graph of a Moore geometry of $k \geq 3$ has the diameter at most 2.

この事実と上の定理から次の系が直接得られている。

系　定理の仮定を満たす距離正則グラフにおいて $a_{r+1} = 1$ の場合を除いて $r = 1$ である．

つまり、$a_{r+1} = 1$ という特殊な例外を除いては r を定数でおさえられる。そういう意味で上の部分グラフはものすごく "いい" 部分グラフなのである。

さらに今回次の結果が得られた。

定理 **[IV]** Let Γ be a distance-regular graph with $a_1 = s-1 > 0$, $r \geq 2$ and $c_{r+1} = t+1$. Suppose $a_i = a_1 c_i$ for all $1 \leq i \leq 2r$. Take any u and v in Γ at distance $r+1$. Then there exists a $\Delta(u,v)$ collinearity graph of a generalized $2(r+1)$-gon of order (s,t) containing u and v as a subgraph in Γ.

これは距離正則グラフ内に a collinearity graph of generalized polygon が存在するための十分条件を与えている。実際 regular near polygon と呼ばれる類の距離正則グラフはこの条件を満たしている。さらにこの部分グラフに対して次の事実が知られている。

定理 **[FH]** A collinearity graph of a generalized $2(r+1)$-gon has $r \in \{1,2,3,5\}$, unless it is an ordinary polygon.

よって次の系を得る。

系 定理の仮定を満たす距離正則グラフにおいて $r \in \{1,2,3,5\}$ である.

上の系も r を定数でおさえるという "強い" 制約を与えている。ここで取り出された部分グラフも "いい" 部分グラフであった！

札幌での発表後、新たなる進展があった。前述の２つの結果はいずれも直径 $r+1$ の subgraph の存在を示しているが一般の場合に「直径が $r+1$ の正則 strongly closed 部分グラフ」が存在するための必要十分条件を得ることに成功した [V]。距離正則グラフ内の正則 strongly closed 部分グラフはまた距離正則であり、パラメータによって多少異なるがその多くは "いい" 部分グラフである。
この結果によって次々と "いい" 部分グラフを取り出すことができる。

References

[*B*] N. L. Biggs, *Algebraic Graph Theory,* 1973.
[*BI*] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I,* 1984.
[*BCN*] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs,* 1989.
[*FH*] W. Feit and G. Higman, The non-existence of certain generalized polygons, *J. Algebra.* **1** (1964), 114–131.
[*I*] A. Hiraki, Distance-regular subgraphs in a distance-regular graph, I, *Europ. J. Combin.* **16** (1995), 589–602.
[*II*] A. Hiraki, Distance-regular subgraphs in a distance-regular graph, II, *Europ. J. Combin.* **16** (1995), 603–615.
[*IV*] A. Hiraki, Distance-regular subgraphs in a distance-regular graph, IV, *to appear Europ. J. Combin.*
[*V*] A. Hiraki, Distance-regular subgraphs in a distance-regular graph, V, preprint.

On the centralizer algebra of the unitary reflection group $G(m,p,n)$

Kenichiro Tanabe

Graduate School of Mathematics
Kyushu University

最近, V. F. R. Jones は統計力学の Potts model の研究に関連して対称群 S_nの中心化代数

$$\mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k \mathbf{C}^n) := \left\{ f \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\otimes^k \mathbf{C}^n) \;\middle|\; \text{任意の } g \in S_n \text{ に対して } \; fg = gf \right\},$$

が、C-代数として対称群 S_kによるテンソル積の成分の置換とその他 2 個の元で生成されることを示した。ただし、S_nを $n \times n$ の置換行列の全体と同一視する。ここではその結果を複素鏡映群 $G(m,p,n)$ の場合に一般化する。

1 準備

以下 m, p, n を正の整数とし p は m の約数とする。複素数 $c_1, \ldots, c_n$に対し $\mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ でその (i,i)-成分に c_iを持つ対角行列を表すものとする。$d := m/p$ とおき、ξを 1 の原始 m 乗根とする。

定義 1.1 (cf. [2], [4]) $G(m,p,n)$ を $A(m,p,n)$ と置換行列の全体で生成される $GL(n,\mathbf{C})$ の有限部分群とする。ここで

$$A(m,p,n) := \left\{ \mathrm{diag}(\xi^{i_1}, \ldots, \xi^{i_n}) \;\middle|\; \begin{array}{l} i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N}, \\ i_1 + \cdots + i_n \equiv 0 \pmod p. \end{array} \right\}.$$

である。

$G(m,p,n)$ のパラメータを特殊化すると

$$\begin{aligned} G(1,1,n) &\simeq S_n, \\ G(2,1,n) &\simeq W(B_n)\ ;\ B\text{型のワイル群}, \\ G(2,2,n) &\simeq W(D_n)\ ;\ D\text{型のワイル群}, \\ G(m,m,2) &\simeq (\text{位数 } 2m \text{ の 2 面体群}). \end{aligned}$$

となる。簡便のためにベクトル空間 $\mathbb{C}^n$を Vで書くことにする。また v_aをその第 a-成分が 1、その他の成分が全て 0 の Vの元とする。$(1 \le a \le n)$. $G(m,p,n)$ は Vに自然に作用するので正の整数 kに対して$\otimes^k V$は $G(m,p,n)$-加群である。基底 $\{v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v_{a_k} \mid 1 \le a_1, \ldots, a_k \le n\}$ に対する $X \in \mathrm{End}(\otimes^k V)$ の行列成分を $X_{a_1 \cdots a_k}^{a_{k+1} \cdots a_{2k}}$で表すことにする。$\pi$を対称群 S_kのテンソル積の成分の置換による表現とする。すなわち$\alpha \in S_k$と $u_1, \ldots, u_k \in V$に対して

$$\pi(\alpha)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) := u_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\alpha^{-1}(k)},\ u_1, \ldots, u_k \in V \text{ and } \alpha \in S_k.$$

である。$\pi(S_k)$ は明らかに $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ に含まれる。また

$$\mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V) \subset \mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V) \subset \mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V).$$

である。まず $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ の基底を求める。正の整数 Nに対してΠ_Nで $\{1,2,\ldots,N\}$ の部分集合への分割の全体を表すものとする。またΠ_N上に次の部分順序を定義する。$B, C \in \Pi_N$に対して Cが Bより荒い分割である時、$C \le B$と書いてΠ_N上に半順序を定義する。例えば

$$\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{ll} \big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\}, & \big\{\{1,2\},\{3\}\big\}, \big\{\{1,3\},\{2\}\big\}, \\ \big\{\{1\},\{2,3\}\big\}, & \big\{\{1,2,3\}\big\} \end{array} \right\}$$

で、Π_{10}において

$$\big\{\{1,2,3,7,8\},\{4,6,9,10\},\{5\}\big\} \le \big\{\{1,3,7\},\{4,6\},\{5\},\{2,8\},\{9\},\{10\}\big\},$$

である。$X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\otimes^k V)$ と$\sigma \in S_n$に対して、

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1} X \sigma\ (v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v_{a_k}) \\ &= \sum_{a_{k+1}, \ldots, a_{2k}=1}^{n} X_{\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_k)}^{\sigma(a_{k+1}) \cdots \sigma(a_{2k})} v_{a_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{a_{2k}}. \end{aligned}$$

となる。故に $X \in \mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V)$ となるための必要十分条件は任意の$\sigma \in S_n$と $(a_1, \ldots, a_{2k}) \in \{1, \ldots, n\}^{2k}$に対して、

$$X_{a_1, \ldots, a_k}^{a_{k+1}, \ldots, a_{2k}} = X_{\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_k)}^{\sigma(a_{k+1}) \cdots \sigma(a_{2k})}.$$

が成立することである。このことは $\mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V)$ の基底が、ブロックのサイズが高々n のΠ_{2k}の元で与えられることを意味している。さらに詳しくいうと $B \in \Pi_{2k}$ に対して $T_B \in \mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V)$ を

$$(T_B)^{a_{k+1}\cdots a_{2k}}_{a_1\cdots a_k} := \begin{cases} 1, & \text{if } \Big\{\{j \mid a_j = i\} \ \Big|\ i = 1,\ldots,n\Big\}\backslash\{\phi\} = B, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定義すると、$\{\ T_B \mid B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k} \text{ and } s \le n\ \}$ は $\mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V)$ の基底となる。また $B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k}$に対して、$N(B_i) := \#(B_i \cap \{1,\ldots,k\})$、$M(B_i) := \#(B_i \cap \{k+1,\ldots,2k\})$, $(1 \le i \le s)$ とおく。次の三つの集合を定義する。

$$\Pi_{2k}(m)$$
$$:= \ \{B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k} \mid s \ge 1 \text{ and } N(B_i) \equiv M(B_i) \pmod m\ (1 \le i \le s)\},$$
$$\Lambda_{2k}(m,p,n)$$
$$:= \left\{ B = \{B_1,\ldots,B_n\} \in \Pi_{2k} \ \middle|\ \begin{array}{l} \begin{array}{ll} N(B_i) \equiv M(B_i) \pmod d, & \multirow{2}{*}{$(1 \le i \le n),$} \\ N(B_i) \not\equiv M(B_i) \pmod m, & \end{array} \\ \text{and} \\ N(B_i) - M(B_i) \equiv N(B_j) - M(B_j) \pmod m, \\ (1 \le i,j \le n). \end{array} \right\},$$

$$\Pi_{2k}(m,p,n) := \{B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k}(m) \mid 1 \le s \le n\} \cup \Lambda_{2k}(m,p,n).$$

特に$\Pi_{2k}(m,1,n) = \{B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k}(m) \mid 1 \le s \le n\}$, $\Pi_{2k} = \Pi_{2k}(1)$ である。$A(m,p,n)$ の部分の作用を考えると次の事実が分かる。

補題 1.1 $\{\ T_B \mid B \in \Pi_{2k}(m,p,n)\ \}$ は $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ の基底である。

$B \in \Pi_{2k}$に対して $L_B \in \mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ を

$$L_B := \sum_{C \in \Pi_{2k}\ ;\ C \le B} T_C.$$

で定義する。例えば

- $B = \Big\{\{i, i+k\} \mid i = 1,\ldots,k\Big\}$の時 L_Bは単位行列、
- $B = \Big\{\{1\},\{k+1\}\Big\} \cup \Big\{\{i,i+k\} \ \Big|\ i = 2,\ldots,k\Big\}$ の時、

$$L_B(v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v_{a_k}) = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes v_{a_2} \otimes \cdots \otimes v_{a_k}, \quad 1 \le a_1,\ldots,a_k \le n,$$

3

- $B = \Big\{\{1,2,k+1,k+2\}\Big\} \cup \Big\{\{i,i+k\} \;\Big|\; i=3,\ldots,k\Big\}$ の時、

$$L_B\left(v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_k}\right) = \delta_{a_1,\,a_2}\; v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_k}, \quad 1\le a_1,\ldots,a_k\le n.$$

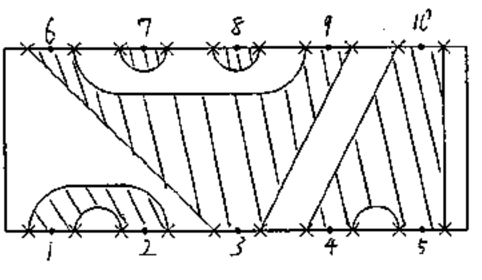
である。メービウスの反転公式を用いて次が成り立つ。

補題 1.2 (cf. [3]) $B\in\Pi_{2k}(m)$ に対して、$L_B \in \mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V)$ であり、また

$$\sum_{B\in\Pi_{2k}(m)} \mathbf{C}L_B = \mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V).$$

1.1 "Planar " form

上辺、下辺にそれぞれk個の黒丸が乗っている四角形を考える。各黒丸の両側に×印をそれぞれ書く。次に×印を四角形からはみ出ないまた互いに重ならない線で結ぶ。線分で分けられた四角形の領域を左右の領域が白色になるように黒と白で塗り分ける。このような図形は $\{1,\ldots,2k\}$ のある分割を与える。このような分割を planar と呼ぶことにする。また planar な分割の全体を $\mathrm{P}\Pi_{2k}$と書くことにする。例えば$k=5$ のとき次の図形に対応する planar な分割は$\Big\{\{1,2\},\{3,6,9\},\{4,5,10\},\{7\},\{8\}\Big\}$ である。



$\mathrm{P}\Pi_{2k}(m)$ を $\mathrm{P}\Pi_{2k}(m) := \Pi_{2k}(m)\cap\mathrm{P}\Pi_{2k}$で定義する。$B=\{B_1,\ldots,B_s\}\in\Pi_{2k}$, α_1, $\alpha_2\in S_k$, に対して、

$$\begin{aligned}\alpha_2 B_u \alpha_1 \;:=\; & \{\alpha_1^{-1}(i) \mid i\in B_u \text{ and } 1\le i\le k\ \}\\ & \cup\{k+\alpha_2^{-1}(j-k) \mid j\in B_u \text{ and } k+1\le j\le 2k\ \}, \qquad 1\le u\le s.\end{aligned}$$

$\alpha_2 B\alpha_1 := \{\alpha_2 B_1\alpha_1,\ldots,\alpha_2 B_s\alpha_1\}$ とおく。つまり$\alpha_2 B\alpha_1$はα_1によって Bの下辺の k個の点を置換し、α_2によって Bの上辺の k個の点を置換することによって得られる分割である。またα_1, $\alpha_2\in S_k$に対して、$B\in\Pi_{2k}(m)$ (resp. $\Lambda_{2k}(m,p,n)$) なら

ば$\alpha_2 B\alpha_1 \in \Pi_{2k}(m)$ (resp. $\Lambda_{2k}(m,p,n)$) であり、$T_{\alpha_2 B\alpha_1} = \pi(\alpha_2)T_B\pi(\alpha_1)$ が成り立つ。

次の補題は明らかである。

補題 1.3 ([3], Lemma 2.) 任意の $B = \{B_1,\ldots,B_s\} \in \Pi_{2k}$は適当な$\alpha_1,\alpha_2 \in S_k$によって、左側に上下が連結なブロックが集まり、右側に上下が非連結なブロックが集まっている planar な分割$\alpha_2 B\alpha_1$にすることができる。

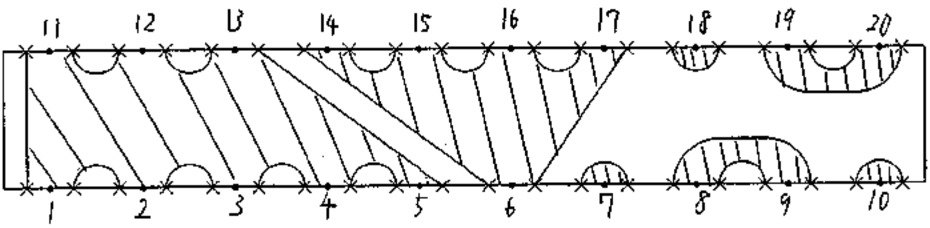
例えば

$$\Big\{\{1,3,5,7,10,12,17,19\},\{2,8\},\{4\},\{6\},\{9,11,13,16,20\},\{14,18\},\{15\}\Big\} \in \Pi_{20}$$

は

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10 & 9 & 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \\
\alpha_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 9 & 1 & 3 & 6 & 10 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10},
\end{aligned}$$

を用いて次の planar な分割$\alpha_2 B\alpha_1$にすることができる。



$\Lambda'_{2k}(m,p,n)$ を$\Lambda_{2k}(m,p,n)$ の planar な元で上の補題にでてきた左側に上下が連結なブロックが集まり、右側に上下が非連結なブロックが集まっているもの全体とする。

δを C の零でない元とする。$P\Pi_{2k}$を基底とする C-ベクトル空間$\oplus_{B\in P\Pi_{2k}} \mathbf{C}B$上に次の積を導入して C-代数 $K(2k,\delta)$ を定義する。$B, C \in \Pi_{2k}$とする。

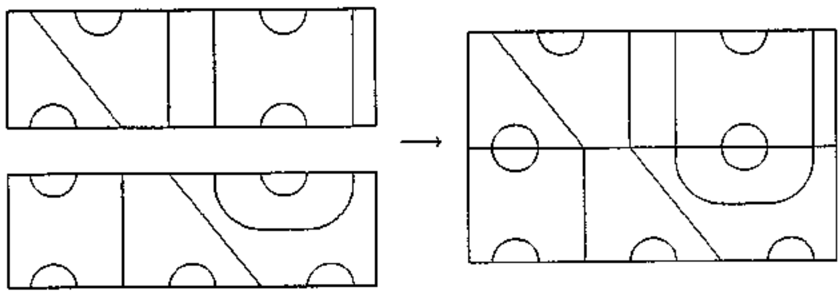
Step 1. Bの下辺と Cの上辺を×印達が重なるように合わせる。

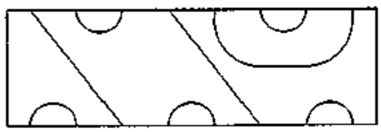
Step 2. 真中の辺を取り除いて、いくつかの閉じたループを含む図形を得る。閉じたループの個数をrとする。閉じたループを取り除いてできる新しい planar な分割にスカラーδ^rを掛けたものを BCと定義する。

上の積を$\oplus_{B\in P\Pi_{2k}}\mathbb{C}B$ 上に線形に拡張する。$K(8,\delta)$ の場合に一つの例を与えておく。

B =

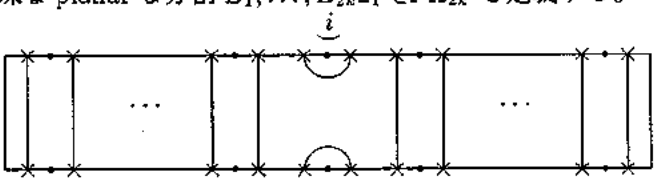
C =



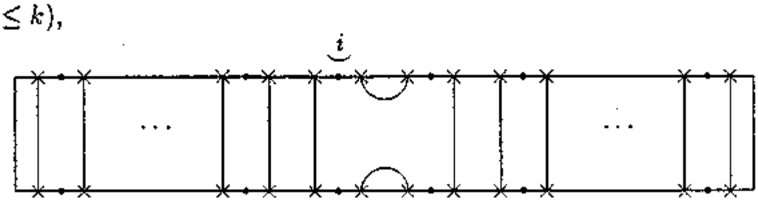
so $BC = \delta^2$ 

上で定義した積は結合的であり、また単位元が$\{\ \{i,\ i+k\}\mid 1\le i\le k\ \}\in \mathrm{P}\Pi_{2k}$ となることは簡単に分かる。

ここで特殊な planar な分割 $E_1,\ldots,E_{2k-1}\in\mathrm{P}\Pi_{2k}$ を定義する。

$E_{2i-1}:=$ 

$(1\le i\le k)$,

$E_{2i}\ :=$ 

$(1\le i\le k-1)$.

直接の計算で $\{E_i\mid i=1,\ldots,2k-1\}$ と 1 とで $K(2k,\delta)$ が生成される事が分かる。$a_1,\ldots,a_k\in\{1,\ldots,n\}$ に対して、

$$\begin{aligned}&L_{E_{2i-1}}(v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_k})\\ &\quad=\sum_{j=1}^{n}v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_{i-1}}\otimes v_j\otimes v_{a_{i+1}}\otimes\cdots\otimes v_{a_k},\ (1\le i\le k),\end{aligned}$$

$$L_{E_{2i}}(v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_k})=\delta_{a_i,\,a_{i+1}}\,v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_k},\ (1\le i\le k-1).$$

が成り立つ。

補題 1.4 ([3], Lemma 3.) 写像

$$\varphi(E_i):=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}}L_{E_i}, & \textit{if } i \textit{ is odd},\\ \sqrt{n}L_{E_i}, & \textit{if } i \textit{ is even}.\end{cases}$$

は $K(2k,\sqrt{n})$ から $\mathrm{End}_{S_n}(\otimes^k V)$ への C-代数への準同型写像に拡張できる。また任意の $B\in\mathrm{P\Pi}_{2k}$に対して$\varphi(B)$ は L_Bの零でないスカラー倍である。

2 $\mathbf{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ の生成元

最初に $p=1$ の場合を考える。$K(2k,\delta)_m$を $\mathrm{P\Pi}_{2k}(m)$ で張られる $K(2k,\delta)$ の部分空間とする。実は $K(2k,\delta)_m$ は積で閉じているので $K(2k,\delta)$ の部分代数となる。

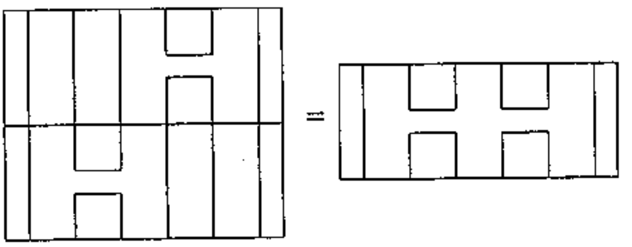
補題 1.2, 1.3 と 1.4 より$\varphi(K(2k,\sqrt{n})_m)$ と$\pi(S_k)$ は $\mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V)$ を生成する。

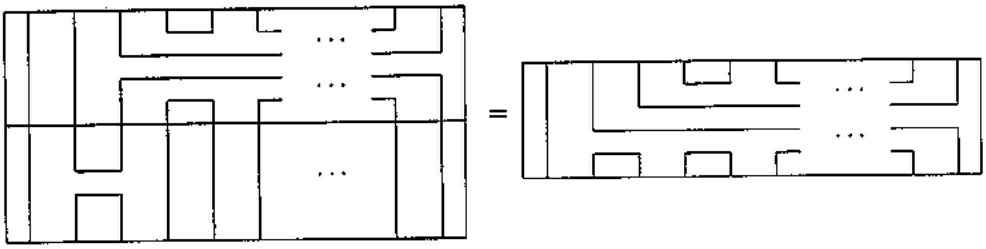
補題 2.1

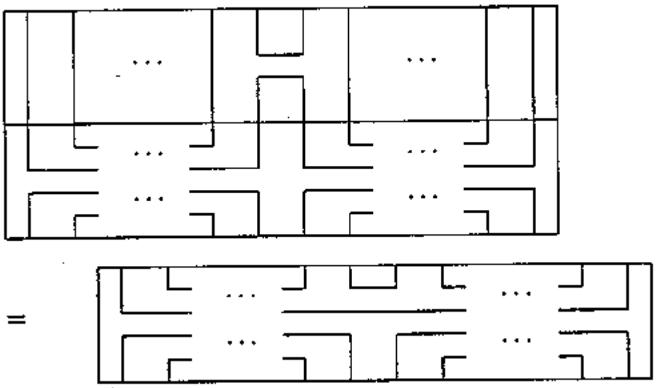
$$\begin{aligned}F_i^m \ :=\ &\Big\{\{i,\ldots,i+m-1\},\ \{k+i,\ldots,k+m+i-1\}\Big\}\\ &\cup\Big\{\{j,\ k+j\}\ \Big|\ 1\le j\le i-1 \ \mathit{or}\ m+i\le j\le k\Big\}\in\mathrm{P\Pi}_{2k}(m),\\ &1\le i\le k-m.\end{aligned}$$

とおく。このとき $K(2k,\delta)_m$は F_i^m $(1\le i\le k-m)$ と E_{2j} $(1\le j\le k-1)$ とで C-代数として生成される。特に $\mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V)$ は$\varphi(E_2)$, $\varphi(F_1^m)$ と$\pi(S_k)$ で C-代数として生成される。ここで $m>k$の時は$\varphi(F_1^m):=0$ とおく。

Proof. 以下の計算を繰り返し用いればよい。また後半の主張は$\pi(S_k)$ の作用を考えればすぐにでてくる。





 □

次に一般の p に対して $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ の生成元を考える。

$$H_{m,p,n} := \sum_{B \in \Lambda'_{2k}(m,p,n)} T_B.$$

を定義する。正の整数 i と j に対して (i,j) でそれらの最大公約数を表すものとする。$k_{m,p,n} := mn(1-1/(p,n))/(p,n)$. とおく。

定理 2.1 *1.* $H_{m,p,n} \neq 0$ であることの必要十分条件は $(n,p) > 1$ かつ $k \geq k_{m,p,n}$ が成立することである。

2. $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ は $\varphi(E_2)$, $\varphi(F_1^m)$, $H_{m,p,n}$ と $\pi(S_k)$ とで $\mathbf{C}$-代数として生成される。

Proof. 1. は [5] を参照。2. を示す。Γ を $\varphi(E_2)$, $\varphi(F_1^m)$, $H_{m,p,n}$, $\pi(S_k)$ で生成される $\mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ の部分代数とする。補題 2.1 より $\mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V) \subset \Gamma$ である。$B = \{B_1, \ldots, B_n\} \in \Lambda'_{2k}(m,p,n)$ とし、$t := \#\{i \mid N(B_i) \neq 0\}$、$s := \#\{i \mid M(B_i) \neq 0\}$、$u := \#\{i \mid N(B_i) \neq 0 \text{ and } M(B_i) \neq 0\}$ とおく。

Bに対して$\hat{C}, \hat{D} \in \Pi_k$を次のように定義する。ここで整数の部分集合$I$と整数$a$に対して、$I+a$を$I+a := \{i+a \mid i \in I\}$で定義する。まず

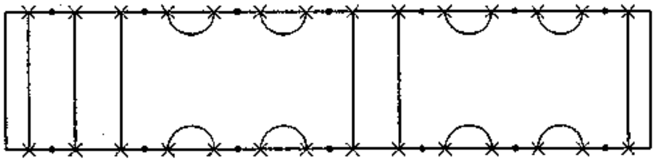
$$
\begin{aligned}
C &:= \{B_i \cap \{1, \ldots, k\} \mid 1 \leq i \leq n\} \backslash \{\phi\}, \\
D &:= \{B_i \cap \{k+1, \ldots, 2k\} \mid 1 \leq i \leq n\} \backslash \{\phi\}.
\end{aligned}
$$

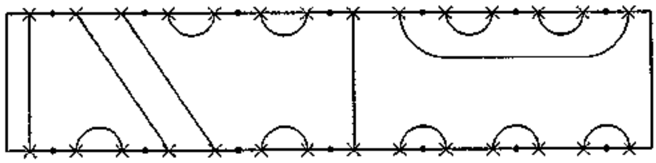
とおき、$C = \{C_1, \ldots, C_t\}$、$D = \{D_1, \ldots, D_s\}$とする。

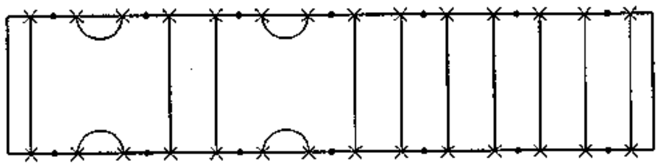
$$\hat{C} := \{C_1 \cup (C_1 + k), \ldots, C_s \cup (C_s + k)\} \in \Pi_{2k}(m),$$

$$\hat{D} := \{D_1 \cup (D_1 + k), \ldots, D_t \cup (D_t + k)\} \in \Pi_{2k}(m).$$

とおく。例えば下図のようにBに対して$\hat{C}, \hat{D}$を定義する。

$\hat{D} =$ 

$B =$ 

$\hat{C} =$ 

$T_{\hat{C}}, T_{\hat{D}} \in \mathrm{End}_{G(m,1,n)}(\otimes^k V)$で、$T_{\hat{D}} T_B T_{\hat{C}} = T_B$が簡単に分かる。$C$と$D$の定義より、

$$B_j = \begin{cases} C_j \cup D_j, & \text{if } 1 \leq j \leq u, \\ C_l \text{ or } D_l \text{ for some } l > u, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

である。B, CとDのブロックの個数を比べて$n = u + (s-u) + (t-u)$、故に$u = s+t-n$を得る。したがって逆に$(C, D) \in \Pi_k \times \Pi_k$が与えられた場合、元の$B \in \Lambda'_{2k}(m,p,n)$を$(C,D)$から再構成できる。故に$B' \in \Lambda'_{2k}(m,p,n)$ $(B' \neq B)$に対して

$$C \neq \{B'_i \cap \{1, \ldots, k\} \mid 1 \leq i \leq n\},$$

または

$$D \neq \{B'_i \cap \{k+1, \ldots, 2k\} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

となるから $T_{\hat{D}}T_{B'}T_{\hat{C}} = 0$ を得る。今までの結果を合わせて $T_{\hat{D}}H_{m,p,n}T_{\hat{C}} = T_B$ を得る。したがって任意の $B \in \Lambda'_{2k}(m,p,n)$ に対して $T_B \in \Gamma$であり、補題1.3と合わせて$\Gamma = \mathrm{End}_{G(m,p,n)}(\otimes^k V)$ を得る。□

参考文献

[1] R. Brauer, "On algebras which are connected with the semisimple continuous groups," *Ann. Math.* **38** (1937), 854–887.

[2] A. M. Cohen, "Finite complex reflection groups," *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **9** (1976), 379–436.

[3] V. F. R. Jones, "The Potts model and the symmetric group" in *Subfactors*, ed. by H. Araki, Y. Kawahigashi, and H. Kosaki, World Scientific (1994), 259–267.

[4] G. C. Shephard and J. A. Todd, "Finite unitary reflection groups, " *Canad. J. Math.* 6 (1954), 274–304.

[5] K. Tanabe, "On the centralizer algebra of the unitary reflection group $G(m,p,n)$, " preprint.

ON A CONSTRUCTION OF 2–DESIGNS OVER $GF(q)$ ADMITTING $GL_m(q^l)$

Toyoharu Itoh

§1. Introduction

In 1987, S.Thomas [T] constructed the first example of nontrivial 2-designs over a finite field. A t-design over a finite field $GF(q)$ or a t-$(v,k,\lambda;q)$ design for integers $0 \lneqq t \leqq k \leqq v$ and a prime power q is a pair of a v-dimensional vector space V over $GF(q)$ and a nonempty collection $\mathfrak{B}$ of k-dimensional subspaces of V with the property that any t-dimensional subspace of V is contained in exactly λ members of $\mathfrak{B}$. If $\mathfrak{B}$ is a set of all k-dimensional subspaces of V, then a pair $(V,\mathfrak{B})$ is obviously a t-design over $GF(q)$ for any $t \lneqq k$. This t-design is called a trivial design.

In [T], S.Thomas defined the notion of a special triangle and showed that the collection $\mathfrak{B}$ of 3-dimensional spaces spanned by special triangles forms a 2-$(v,3,7;2)$ design for $v \geqq 7$ and $(v,6)=1$. This family of 2-designs over $GF(2)$ is the first example of nontrivial t-designs over a finite field. In 1989, H.Suzuki [Su1,Su2] extended Thomas' method to construct nontrivial 2-$(v,3,\frac{q^5-1}{q-1};q)$ designs admitting a Singer cycle Z_v of $GL_v(q)$ for $v \geqq 7$ and $(v,6)=1$. In 1995, M.Miyakawa, A.Munemasa and S.Yoshiara [MMY] gave a classification of nontrivial 2-$(7,3,\lambda;q)$ designs for $q=2,3$ with small λ, as well as the non-existence of 2-$(6,3,\lambda;q)$ designs modulo few exceptional cases, under the assumption of the transitivity of their automorphism groups on the non zero-vectors of V.

Not much is known about the existence of t-designs over a finite field. For example, no (nontrivial) 3-designs, no 2-designs with $\lambda=1$ and no t-designs with large automorphism groups are known to date. In this paper, we construct a 2-design with a large automorphism group, starting from a 2-design with a relatively small automorphism group. Namely, given a 2-$(l,3,q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1};q)$ design for an integer $l \equiv 5 \mod 6(q-1)$ which admits the action of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$, we construct a 2-$(ml,3,q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1};q)$ design for an arbitrary integer $m \geqq 3$ which admits the action of $GL_m(q^l)$. The construction applied to Suzuki's designs actually provides a new family of 2-designs over $GF(q)$ which admit the $GL_m(q^l)$ action.

§2. Definitions and notation

Let $0 \lneqq t \leqq k \leqq v$ be positive integers, and q a prime power. Let V be a v-dimensional vector space over $GF(q)$. For each non-negative integer i, $\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}$ denotes the set of all i-dimensional subspaces of V. Hence,

$$\sharp\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}_q = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{q^{v-k}-1}{q^{i-k}-1}.$$

Definition 2.1. Let $\mathfrak{B}$ be a nonempty subset of $\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$. A pair $(V,\mathfrak{B})$ is called a t-$(v,k,\lambda;q)$ design or a t-design over $GF(q)$ if for any element $\alpha \in \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$, the number

$$\lambda_t(\alpha) := \sharp\{b \in \mathfrak{B} \mid \alpha \subset b\}$$

is a constant λ (independent on the particular choice of $\alpha \in \begin{bmatrix} V \\ t \end{bmatrix}$). In particular, if $\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$, then $(V,\mathfrak{B})$ is a t-$(v,k,\lambda;q)$ design with $\lambda = \begin{bmatrix} v-t \\ k-t \end{bmatrix}_q$, which is called the trivial design.

Let $\Gamma L(V)$ be a general semi-linear group and G a subgroup of $\Gamma L(V)$. For any $\alpha \in \begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}$, the G-orbit containing α is denoted by $G \cdot \alpha = \{g \cdot \alpha \mid g \in G\}$, and $\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}/G$ denotes the set of all G-orbits of $\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}$. The

G-incidence matrix is a matrix $A := A(\begin{bmatrix} V \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}; G)$ whose rows are indexed by $\begin{bmatrix} V \\ t \end{bmatrix}/G$, whose columns are indexed by $\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}/G$, where for any $O_t \in \begin{bmatrix} V \\ t \end{bmatrix}/G$ and $O_k \in \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}/G$, the (O_t, O_k)-entry of A is the number $\sharp\{\beta \in O_k | \alpha \subsetneqq \beta\}$ for any fixed $\alpha \in O_t$.

Clearly, the following holds: there exists a t-$(v, k, \lambda; q)$ design admitting G if and only if there exists a $(0, 1)$ columns vector $\mathbf{u}$ whose rows are indexed by $\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}/G$ such that $A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{1}$, where $\mathbf{1}$ is the all one column vector of length $\sharp(\begin{bmatrix} V \\ t \end{bmatrix}/G)$.

In the next section, we consider the action of $GL_m(q^l)$ on the vector space $\bar{V} = GF(q^l)^m$, recognized as an ml-dimensional vector space V over $GF(q)$. Then we are naturally required to define a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$ and its action on $GF(q)^l$. Consider $GF(q^l)$ as an l-dimensional vector space $GF(q)^l$ over $GF(q)$, we define an action of $GF(q^l)^\times$ on $GF(q)^l$ by the multiplication in $GF(q^l)$. (i.e., $x \cdot v = xv$ for $x \in GF(q^l)^\times, v \in GF(q^l) \cong GF(q)^l$.) This action is a nonsingular linear transformation on $GF(q)^l$ over $GF(q)$. Thus the cyclic group $GF(q^l)^\times$ can be regarded as a subgroup of $GL_l(q)$. We refer to this subgroup as a Singer cycle, and denote it by the symbol Z_l.

§3. On the $GL_m(q^l)$-orbit decompositions on $\begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$

Let l, m be positive integers, and V an ml-dimensional vector space over $GF(q)$. Let $\bar{V}$ be an m-dimensional vector space over $GF(q^l)$, and let $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$ be a basis of $\bar{V}$. Naturally, $GL_m(q^l)$ acts on $\bar{V}$. Considering $GF(q^l)$ as an l-dimensional vector space over $GF(q)$, we choose a basis $\{x_1(=1), x_2, \cdots, x_l\}$ of $GF(q^l)$ over $GF(q)$. Since $x_iY_j \in \bar{V}$ $(1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m)$ are linearly independent over $GF(q)$, the space

$$V := \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=1}^{m} GF(q)x_iY_j = < x_iY_j | 1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m >_{GF(q)}$$

is an ml-dimensional vector space over $GF(q)$. Now, we define a $GF(q)$-linear map $\sigma : \bar{V} \to V$ by

$$\sigma(\sum_{j=1}^{m} a_jY_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} b_{ij}x_iY_j$$

where $a_j = \sum_{i=1}^{l} b_{ij}x_i \in GF(q^l)$ and $b_{ij} \in GF(q)$ for $1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m$. Then $GL_m(q^l)$ acts on V by $g \cdot v := \sigma g \sigma^{-1}(v)$ for any $g \in GL_m(q^l)$ and any $v \in V$.

We set

$$\Omega_{ij} := \left\{ U \in \begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix} \middle| \dim_{GF(q^l)}(GF(q^l)U) = j \right\}$$

for $1 \leqq i \leqq ml, 1 \leqq j \leqq m$. Clearly, $\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix} = \cup_{1 \leqq k \leqq i} \Omega_{ik}$ (disjoint union), and Ω_{ik} is a union of some $GL_m(q^l)$-orbits on $\begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix}$.

We denote $S_\alpha := \{x \in Z_l | x \cdot \alpha = \alpha\}$ for $\alpha \in \begin{bmatrix} GF(q)^l \\ p \end{bmatrix}$, and we set that Λ_p is the set of all representatives of Z_l-orbits on $\begin{bmatrix} GF(q)^l \\ p \end{bmatrix}$. In the rest of this paper, we may assume that each element of Λ_p contains 1.

In the rest of this paper, let $G = GL_m(q^l)$, $V = < x_iY_j | 1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m >_{GF(q)}$, and an element of $GL_m(q^l)$ is denoted by a matrix with respect to the basis $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$ of $\bar{V}$.

Let p be a prime number and $\alpha = < u_1, u_2, \cdots, u_p >_{GF(q)}$ a p-dimensional subspace of $GF(q)^l$. We define

$$U(\alpha) := < u_iY_1 | i = 1, 2, \cdots, p >_{GF(q)} = \{a_1u_1Y_1 + a_2u_2Y_1 + \cdots + a_pu_pY_1 | a_1, a_2, \cdots, a_p \in GF(q)\}.$$

Since $u_1Y_1, u_2Y_1, \cdots, u_pY_1$ are linearly independent over $GF(q)$, the subspace $U(\alpha)$ is a p-dimensional subspace of V.

Lemma 3.1. *Let p be a prime number with $p \leqq l$. Let α and α' be p-dimensional subspaces of $GF(q)^l$, and Z_l a Singer cycle of $GL_l(q)$. Then:*

(1) *The G-orbit $G \cdot U(\alpha)$ contains $U(\alpha')$ if and only if the Z_l-orbit $Z_l \cdot \alpha$ contains α'.*

(2) $\Omega_{p1} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_p} G \cdot U(\alpha)$ *(disjoint union).*

(3) $\Omega_{pp} = G \cdot < Y_1, Y_2, \cdots, Y_p >_{GF(q)}$ □

Let m, l be positive integers with $m, l \geqq 3$. By Lemma 3.1, the G-orbit decomposition of $\begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}$ is the following:

$$\begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix} = \Omega_{21} \cup \Omega_{22} = \Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} G \cdot U(\alpha) \Big) \cup G \cdot U,$$

where $U = < Y_1, Y_2 >_{GF(q)} \in \begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}$. Also, the G-orbit decomposition of $\begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$ is the following:

$$\begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix} = \Omega_{31} \cup \Omega_{32} \cup \Omega_{33} = \Big(\bigcup_{\beta \in \Lambda_3} G \cdot U(\beta) \Big) \cup \Omega_{32} \cup G \cdot U$$

where $U = < Y_1, Y_2, Y_3 >_{GF(q)} \in \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$. We consider the union of some G-orbits Ω_{32}.

Let $\alpha = < u_1, u_2 >_{GF(q)}$ be a 2-dimensional subspace of $GF(q)^l$. Then the elements $u_1 Y_1, u_2 Y_1$ and $Y_2 \in V$ are linearly independent over $GF(q)$. We set

$$T(\alpha) := < u_1 Y_1, u_2 Y_1, Y_2 >_{GF(q)} = \{(au_1 + bu_2)Y_1 + cY_2 | a, b, c \in GF(q)\} \in \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Let x, y be elements of $GF(q^l)$ such that $1, x, y$ are linearly independent over $GF(q)$. We set

$$T(x, y) := < Y_1, Y_2, xY_1 + yY_2 >_{GF(q)} = \{(a + cx)Y_1 + (b + cy)Y_2 | a, b, c \in GF(q)\} \in \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Lemma 3.2. *Let α and α' be 2-dimensional subspaces of $GF(q)^l$, and let Z_l be a Singer cycle of $GL_l(q)$. Let x, y, x', y' be elements of $GF(q^l)$ such that $< 1, x, y >_{GF(q)}$ and $< 1, x', y' >_{GF(q)}$ are 3-dimensional subspaces of $GF(q)^l$. Then:*

(1) *The G-orbit $G \cdot T(\alpha)$ contains $T(\alpha')$ if and only if the Z_l-orbit $Z_l \cdot \alpha$ contains α'.*
(2) *The G-orbit $G \cdot T(x, y)$ contains $T(x', y')$ if and only if the Z_l-orbit $Z_l \cdot < 1, x, y >_{GF(q)}$ contains $< 1, x', y' >_{GF(q)}$.*

□

Let β be a 3-dimensional subspace of $GF(q)^l$ such that $1 \in \beta$, and x, y, x', y' be elements of β, where $\{1, x, y\}$ and $\{1, x', y'\}$ are basis of β. By Lemma 3.2(2), the G-orbit $G \cdot T(x, y)$ is equal to $G \cdot T(x', y')$. Now, we define $GT_\beta := G \cdot T(x, y)$ for any $x, y \in \beta$ such that $\beta = < 1, x, y >_{GF(q)}$.

Lemma 3.3.

$$\Omega_{32} = \Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} G \cdot T(\alpha) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\beta \in \Lambda_3} GT_\beta \Big).$$

□

By Lemmas 3.1, 3.2 and 3.3, the G-orbit decomposition of $\begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$ is given as follows:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix} &= \Omega_{31} \cup \Omega_{32} \cup \Omega_{33} \\ &= \Big(\bigcup_{\beta \in \Lambda_3} G \cdot U(\beta) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} G \cdot T(\alpha) \Big) \cup \Big(\bigcup_{\beta \in \Lambda_3} GT_\beta \Big) \cup G \cdot U \end{aligned}$$

where $U = < Y_1, Y_2, Y_3 >_{GF(q)} \in \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$.

By the above results, we determined the $GL_m(q^l)$-orbit decompositions on $\begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}$. This $GL_m(q^l)$-orbits are rows and columns indices of $GL_m(q^l)$-incidence matrix $A(\begin{bmatrix} V \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V \\ 3 \end{bmatrix}; GL_m(q^l))$.

§4. On the $GL_m(q^l)$-incidence matrix $A(\left[\begin{smallmatrix}V\\2\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}V\\3\end{smallmatrix}\right];GL_m(q^l))$

Let l,m be integers with $l,m \geqq 3$. We set

$$\Omega_{32}^a := \bigcup_{\alpha\in\Lambda_2} G\cdot T(\alpha),\quad \Omega_{32}^b := \bigcup_{\beta\in\Lambda_3} GT_\beta,$$

and define that $A(\Omega_{2i},\Omega_{3j}^*)$ is an $\Omega_{2i}\times\Omega_{3j}^*$-submatrix of G-incidence matrix A for $i=1,2$, $j=1,2,3$, $*=a,b$, i.e., the row index of $A(\Omega_{2i},\Omega_{3j}^*)$ is the all G-orbits on Ω_{2i} and the column index of $A(\Omega_{2i},\Omega_{3j}^*)$ is the all G-orbits on Ω_{3j}^*. Therefore

$$A(\begin{bmatrix}V\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}V\\3\end{bmatrix};GL_m(q^l)) = \begin{pmatrix} A(\Omega_{21},\Omega_{31}) & A(\Omega_{21},\Omega_{32}^a) & A(\Omega_{21},\Omega_{32}^b) & A(\Omega_{21},\Omega_{33}) \\ A(\Omega_{22},\Omega_{31}) & A(\Omega_{22},\Omega_{32}^a) & A(\Omega_{22},\Omega_{32}^b) & A(\Omega_{22},\Omega_{33}) \end{pmatrix}.$$

Hence, in the rest, we determine the matrices $A(\Omega_{2i},\Omega_{3j}^*)$ for $i=1,2,\ j=1,2,3,\ *=a,b$.

Lemma 4.1. *Let Z_l be a Singer cycle of $GL_l(q)$. Then:*

(1) *The matrices $A(\Omega_{21},\Omega_{32}^b)$, $A(\Omega_{21},\Omega_{33})$ and $A(\Omega_{22},\Omega_{31})$ are zero matrices.*

(2) $A(\Omega_{21},\Omega_{31}) = A\left(\left[\begin{smallmatrix}GF(q)^l\\2\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}GF(q)^l\\3\end{smallmatrix}\right];Z_l\right)$.

(3)

$$A(\Omega_{21},\Omega_{32}^a) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_1 \end{pmatrix},$$

where $a_1 = q^{l-2}\frac{q^{(m-1)l}-1}{q-1}$.

(4) *The matrix $A(\Omega_{22},\Omega_{33})$ is a 1×1-matrix, and*

$$A(\Omega_{22},\Omega_{33}) = (q^{2l-2}\frac{q^{(m-2)l}-1}{q-1}).$$

(5) *The matrix $A(\Omega_{22},\Omega_{32}^b)$ is a $1\times\sharp\Lambda_3$-matrix, and*

$$A(\Omega_{22},\Omega_{32}^b) = \begin{cases} (a_3,\cdots,a_3,a_3') & \text{if } 3\mid l, \\ (a_3,\cdots,a_3) & \text{if } 3\nmid l, \end{cases}$$

where $a_3 = q(q+1)(q^3-1)$, $a_3' = q(q^2-1)$.

(6) *The matrix $A(\Omega_{22},\Omega_{32}^a)$ is a $1\times\sharp\Lambda_2$-matrix, and*

$$A(\Omega_{22},\Omega_{32}^a) = \begin{cases} (a_2,\cdots,a_2,a_2') & \text{if } 2\mid l, \\ (a_2,\cdots,a_2) & \text{if } 2\nmid l \end{cases}$$

where $a_2 = (q+1)^2$, $a_2' = q+1$.

□

Thus, we have $GL_m(q^l)$-incidence matrix $A(\left[\begin{smallmatrix}V\\2\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}V\\3\end{smallmatrix}\right];GL_m(q^l))$ for $l,m\geqq 3$.

$$A(\begin{bmatrix}V\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}V\\3\end{bmatrix};GL_m(q^l)) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \Omega_{31} & \Omega_{32}^a & \Omega_{32}^b & \Omega_{33} \end{array} \\ \begin{array}{c} \Omega_{21} \\ \\ \Omega_{22} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} a_2 & \cdots a_2 & (2\nmid l) \\ a_2 & \cdots a_2, a_2' & (2\mid l) \end{matrix} & \begin{matrix} a_3\cdots a_3\ (3\nmid l) \\ a_3\cdots a_3, a_3'\ (3\mid l) \end{matrix} & q^{2l-2}\frac{q^{(m-2)l}-1}{q-1} \end{array}\right) \end{array},$$

where $\bar{A} = A(\left[\begin{smallmatrix} GF(q)^l \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} GF(q)^l \\ 3 \end{smallmatrix}\right]; Z_l)$, $a_1 = q^{l-2}\frac{q^{(m-1)l}-1}{q-1}$, $a_2 = (q+1)^2$, $a_2' = q+1$, $a_3 = q(q+1)(q^3-1)$, $a_3' = q(q^2-1)$.

§5. The construction of $2\text{-}(ml, 3, q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}; q)$ design admitting $GL_m(q^l)$

Let l, m be positive integers with $l, m \geqq 3$ and q a prime power. In this section, we give a construction of a new family of $2\text{-}(ml, 3, q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}; q)$ designs which admits of the action of $GL_m(q^l)$ from $2\text{-}(l, 3, q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}; q)$ designs which admits the action of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$.

Theorem 5.1.

Suppose that there exists a nontrivial $2\text{-}(ml, 3, \lambda; q)$ design which admits the action of $GL_m(q^l)$. Then there exists a nontrivial $2\text{-}(l, 3, \lambda; q)$ design which admits the action of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$ with $\lambda = aq(q+1)(q^3-1) + bq(q^2-1)$ for some positive integers a, b ($b = 0, 1$). In particular, if $3 \nmid l$ then $b = 0$.

Conversely, suppose that there exists a nontrivial $2\text{-}(l, 3, \lambda; q)$ design which admits the action of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$ with $\lambda = aq(q+1)(q^3-1) + bq(q^2-1)$ for some positive integers a, b ($b = 0, 1$, if $3 \nmid l$ then $b = 0$). Then there exists a nontrivial $2\text{-}(ml, 3, \lambda; q)$ design which admits the action of $GL_m(q^l)$. □

Example.

In the rest of this paper, we use Theorem 5.1, to construct $2\text{-}(ml, 3, q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}; q)$ designs which admits the action of $GL_m(q^l)$ for $l, m \geqq 3$ and $l \equiv 5 \mod 6(q-1)$.

Lemma 5.2. *Let q be a positive integer. Then $q^t - 1$ is divisible by $(q^3-1)(q^2-1)$ if and only if $t \equiv 0 \mod 6(q-1)$.* □

In [Su2], H.Suzuki constructed nontrivial $2\text{-}(l, 3, \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q; q)$ designs which admits the action of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$ for all $l \geqq 7$ with $(l, 6) = 1$. Now, we put that $(GF(q)^l, \mathfrak{B}_l)$ is a Suzuki's $2\text{-}(l, 3, \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q; q)$ design, and then, a pair $(GF(q)^l, \left[\begin{smallmatrix} GF(q)^l \\ 3 \end{smallmatrix}\right] - \mathfrak{B}_l)$ is a $2\text{-}(l, 3, \left[\begin{smallmatrix} l-2 \\ 3-2 \end{smallmatrix}\right]_q - \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q; q)$ design which admits of a Singer cycle Z_l of $GL_l(q)$. We set that $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ are the representatives of Z_l-orbits on $\left[\begin{smallmatrix} GF(q)^l \\ 3 \end{smallmatrix}\right] - \mathfrak{B}_l$ for $r = q^3\frac{(q^{l-1}-1)(q^{l-5}-1)}{(q^3-1)(q^2-1)}$. (i.e., $\left[\begin{smallmatrix} GF(q)^l \\ 3 \end{smallmatrix}\right] - \mathfrak{B}_l = \cup_{i=1}^r Z_l \cdot \beta_i$ (disjoint union).) Since $(l, 6) = 1$, we have the matrix $A(\Omega_{22}, \Omega_{32}^b) = (a_3, \cdots, a_3)$ where $a_3 = q(q+1)(q^3-1)$. We set

$$a = \left(\begin{bmatrix} l-2 \\ 3-2 \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q\right)\frac{1}{a_3} = \frac{q^{l-2}-q^3}{q-1}\,\frac{1}{q(q+1)(q^3-1)} = q^3\frac{q^{l-5}-1}{(q^3-1)(q^2-1)}.$$

We assume $l \equiv 5 \mod 6(q-1)$, and then a is an integer by Lemma 5.2, and $\left[\begin{smallmatrix} l-2 \\ 3-2 \end{smallmatrix}\right]_q - \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q = q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}$. We choose any a orbits $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \cdots \mathfrak{O}_a$ from Ω_{32}^b and we put

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{i=1}^{r} G \cdot U(\beta_i) \cup \mathfrak{O}_1 \cup \mathfrak{O}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{O}_a.$$

Then, for integers l, $m \geqq 3$, $l \equiv 5 \mod 6(q-1)$, the pair $(V, \mathfrak{B})$ is a nontrivial $2\text{-}(ml, 3, q^3\frac{q^{l-5}-1}{q-1}; q)$ design which admits the action the $GL_m(q^l)$ by Theorem 5.1.

References

[I] T.Itoh, *A new family of 2-designs over $GF(q)$ admitting $SL_m(q^l)$*, preprint (submit Geometrice Dedicata).

[MMY] M.Miyakawa, A.Munemasa and S.Yoshiara, *On a Class of Small 2-Designs over $GF(q)$*, Journal of Combinatorial Designs 3 (1995), 61-77.

[Su1] H.Suzuki, *2-designs over $GF(2^m)$*, Graphs and Combinatorics 6 (1990), 293-296.

[Su2] H.Suzuki, *2-designs over $GF(q)$*, Graphs and Combinatorics 8 (1992), 381-389.

[T] S.Thomas, *Design over finite fields*, Geometrice Dedicata 24 (1987), 237-242.

17-31 Nishiura Oguracho Uji, Kyoto 611, Japan