

《科学研究費補助金(総合研究A)研究集会報告集》

第 9 回 代 数 的 組 合 論 報 告 集

1991年10月23日～25日

於 愛 媛 大 学

ま え が き

この報告集は、1991年10月23日より25日までの3日間、愛媛大学理学部に於て行われた研究集会、「代数的組合論」の講演記録である。

集会は多数の参加者を得て、盛会であった。代数的組合論の研究集会が、愛媛大学で開かれるのは、今回で2度目であり、岡山大学で最初に開かれてから何回目になるのかが、話題になった。

第1回 1983.12.15 ~ 17 ; 岡山大学

第2回 1984. 8.15 ~ 9.1 ; 筑波大学

第3回 1985. 1. 9 ~ 11 ; 大阪市立大学

第4回 1986.11.12 ~ 14 ; 愛媛大学

第5回 1987. 5.28 ~ 30 ; 京都大学数理解析研究所

(群論および代数的組合論)

第6回 1988. 5.28 ~ 30 ; 京都大学数理解析研究所

第7回 1989.11.28 ~ 30 ; 甲南大学

第8回 1990. 7.24 ~ 26 ; 岡山大学

従って、今回の研究集会は「第9回代数的組合論シンポジウム」とすることにした。

プログラムの作成、会の運営にあたって下さった方々、また会場のお世話をして下さいました愛媛大学の方々に深く感謝いたします。

尚、研究集会の諸経費、この報告集の作成経費は、文部省科学研究費総合研究A (代表者 名古屋大学北岡良之教授) によった。

1991年11月

大 山 豪

木 村 浩

目 次

1.	リーチラティス.....	1
	宮 本 雅 彦 (愛媛大・理)	
2.	On Mimura-type spherical 2-designs.....	11
	Attila Sall (九州大・理, ハンガリー科学アカデミー)	
3.	On non-rigid spherical 2-designs.....	20
	関 剛 (九州大・理)	
4.	Exact coverings of 2-paths by Hamilton cycles for K_{p+2}	30
	小 林 みどり (静岡県立大)	
	喜 安 善 市 (半導体研究所)	
	中 村 義 作 (静岡県立大)	
5.	Circuit chasing technique in a distance-regular graph with triangles.....	38
	平 木 彰 (大阪教育大)	
6.	On distance-regular graphs with $K_i = K_j$, II.....	48
	和 嶋 雅 幸 (北海道工大)	
7.	Bounding the diameter of a distance-regular graph by a function of K_d	61
	鈴 木 寛 (大阪教育大)	
8.	Hadamard matrices, PBIBDs, and amorphous association schemes an extension ring of $Z/4Z$	71
	山 田 美 枝 子 (九州大・理)	
9.	Hadamard 行列の反対称 (skew symmetric) 性と対称性について (特に 28 次の場合).....	81
	喜 安 善 市 (半導体研究所)	

10. Strongly regular graphs derivable from unimodular lattices	91
小 関 道 夫 (弘前大・理)	
11. On extended dual polar spaces	104
吉 荒 聡 (弘前大・理)	
12. O-design から 2-design	112
辻 卓 見 (島根大・理)	
13. A family of translation planes of order q^{2m+1} with two orbits of length 2 and $q^{2m+1}-1$ on ℓ_∞	119
末 竹 千 博 (尼崎南高校)	
14. 有限正則アフィン平面	128
中 川 暢 夫 (近畿大・理工)	
15. On collineation groups with block orbits	136
平 峰 豊 (大阪大・教養)	

リーチラティス

愛媛大学理学部

宮本雅彦

n 次元(正值)ラティス V とは n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内の一次独立な n 個の元 v_1, v_2, \dots, v_n があって $V = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$ となるものです。ここで \mathbb{Z} は有理整数環を表す。リーチラティスとは24次元の正值 even unimodular なラティスのうちの一つです。unimodular とは V のすべての元 v, w に対して $(v, w) \in \mathbb{Z}$ であり、 $\mathbb{Q} \otimes V$ の元のうち V のすべての元との内積が整数となるものは V の元のみという条件をみたすものをいう。even とは V の各元 v の長さの平方 (v, v) がつねに偶数であるものです。特に $(v, v) = 2$, 即ち、長さ $\sqrt{2}$ のベクトルは重要になります。このようなベクトルをルートと呼びます。ルートが存在する正值な even なラティスには必ずルート系の基本系と呼ばれるものが存在します。これはルートの集合 $\{e_i : i \in I\}$ で $(e_i, e_j) \leq 0$ で、且つ、すべてのルートがこれらの和で書けるものです。

24次元の正值 even unimodularなラティスの同型類はニイマイヤによって1968年に分類されており、丁度24個あります。このうち23個は長さルートを含むのですが、ただ一つリーチラティスだけは含んでいません。ルートが存在すれば、かならず、24次元全体を張ることがモジュラ関数を使うと出てきます。さらに、簡単に各ニイマイヤラティスのルート系の基本系の連結成分のコクスター数は同じになることが分ります。この条件を満たす基本系は簡単に分類でき表1のように23個あります。実際にはこの基本ルート系はすべてしかも1回ずつ出てきます。

面白いのはこのリーチラティスと他の23個のニイマイヤラティスとの関係で、例えばコンウエイスローンの本 sphere packings lattices and groupsの中にHolly constructionがあります。これはリーチラティスから他のすべてのニイマイヤラティスが構成できるというものです。名前の付けかたが巧いと言うのでしょうか、このHollyというのは実は穴の意味のHoleの文字とも重なっています。ラティスの各点を中心にして半径 r の球を張合わせた時、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の全体を

カバーするような半径のうち最小の r を covering radius というのですが、逆に内部にラティスの点を含み
 ずに \mathbb{R}^n のなかに埋め込むことが出来る最大の球の半径
 でもあります。リーチラティスの covering radius は丁
 度 $\sqrt{2}$ となります。この球の中心を deep hole とよぶ
 のですが、deep hole があると、球面上にリーチラティ
 スの点が並び、この点を球の中心からみると長さ $\sqrt{2}$ の
 ベクトルとなり、全体で 24 次元空間を張っています。
 holly construction ではこの中心から球面上のリーチ
 ラティスの点までの $\sqrt{2}$ のベクトル全体が他のニイマイ
 ヤラティスのルートの基本系のアフィン基本系と同じに
 なり、glue ベクトルと呼ばれる幾つかのベクトルを加
 えるとリーチラティス以外のニイマイヤラティスがすべ
 て構成できることを示しています。この証明は 23 個の
 場合それぞれをひとつひとつ証明し構成するという方法
 です。この結果は実際にはこの本が出版される前にポー
 チャードがリーチルートを使って簡単に証明しています。
 リーチルートが重要なので、説明しておきましょう。

U を \mathbb{Z} -加群として $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型とし、内積を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

で定義します。U は even unimodular なラティスとなり、 $\mathbb{R} \otimes U$ は $(1, -1)$ と同相になります。一般に $V \otimes \mathbb{R} \cong (1, \dots, 1, -1)$ となるラティスをローレンチアンラティスと呼びます。even unimodular なローレンチアンラティスは $8n + 2$ 次元の時のみ存在し、同型を除いて一意であることが知られています。一般に unimodular なラティスの長さ 0 (isotropic) の元 z に対して $\langle z \rangle^\perp / \langle z \rangle$ は unimodular ですが、一方 N をニイマイヤーラティスとすると、 $N \oplus U$ は 26 次元の even unimodular なローレンチアンラティスとなるので、すべて同相となり、U の isotropic な元 $z = (0, 1)$ と直交しているベクトル全体 $\langle z \rangle^\perp$ は $N \oplus \langle z \rangle$ となり、 $\langle z \rangle^\perp / \langle z \rangle$ は N と同相になります。上のことは 26 次元の even unimodular なローレンチアンラティス L の適当な isotropic 元 z をとると $\langle z \rangle^\perp / \langle z \rangle$ は指定のニイマイヤーラティスと出来ることを示しています。次に、 $\mathbb{R} \otimes N$ の元 v, w に対して、 $v' = (v, 1, v^2/2 - 1) \in N \oplus U$ は常にルートであり、 $w'' = (w, 1, w^2/2)$ は長さ 0 です。ここで、 v^2 は (v, v) を表します。面白いのは、 $(v', w'') = vw - w^2/2 - v^2/2 + 1 = 1 - (v - w)^2/2$ となり、

$(v', w'') = 0$ の必要充分条件は v と w との距離が $\sqrt{2}$ ということです。 V をリーチラティスとし、ローレンチアンラティスを $L = V \oplus U$ と分解すると、リーチラティスの各元 v に対して、述べたように $v' = (v, 1, v^2/2 - 1)$ はルートで、2つの異なるルート $v' = (v, 1, v^2/2 - 1)$ 、 $w' = (w, 1, w^2/2 - 1)$ 対し、 $(v', w') = 2 - (v - w)^2/2$ となり、リーチラティスの元の長さは2以上ですから、 $(v', w') \leq 0$ となります。リーチラティスの covering radius が $\sqrt{2}$ であることを使うと、すぐにこれら全体が 26次元 even unimodular なローレンチアンラティスの基本ルート系になることが分ります。これらをリーチルートと呼びます。ですから、もし deep hole x がリーチラティスの中に存在すれば、isotopicな元 $x'' = (x, 1, x^2/2)$ の直交補空間のなかのリーチルート $(v, 1, v^2/2 - 1)$ の v は x を中心に半径 $\sqrt{2}$ の球面上にあるものです。明らかに、 $N = \langle x'' \rangle^\perp / \langle x'' \rangle$ は求められるニイマイヤラティスとなっています。このルート系に付け加えるボーチャードの glueベクトルはわかりやすくありません。ここではリーチルートを使って glueベクトルを与えることができることを示します。ルート全

体で生成される N の部分群を M と置くことにします。簡単に、 N のルート系の Coxeter 数を h とおくと、この deep hole x に対して、 hx はリーチラティスの元となります。 $hx^2 = (hx, h, hx^2/2)$ も当然ローレンチアンラティスの isotopic な元ですが、この元と内積が -1 となるリーチルート全体を考え、そのうちの適当な一元で差を取ると N の元と見ることができ：

定理 それらは N/M のコセットの代表系になる。

系 ローレンチアンラティスの中の isotopic な元と内積 -1 をもつリーチルートの元の数 $\sqrt{\det A}$ 、ここで A はルートの基本系の内積の行列を表す。

この様なリーチルートがあることが分ると、もともとのルートの基本系に付け加えることによって、新しいルート系を見つけられます。これを使うと、21個のニイマイヤラティスの存在を簡単にたった1個のニイマイヤラティスからリーチルートだけで表2の様に証明できます。例えば $A_{11}D_7E_6 \rightarrow E_7A_{17}$ の意味はルート

系 $A_{11}D_7E_6$ のニイマイヤラティスが存在すれば、ルート系 E_7A_{17} のものも存在することを示しています。

例を示しましょう。 E_6^3 を基本ルート系に持つニイマイヤラティスが存在すれば、対応する isotopic な元 z の直交補空間の中のリーチルートはアフィン \overline{E}_6^3 になります。 isotopic な元と内積 -1 を持つリーチルートは基本ルート系の各連結成分のリーチルートの和と -1 の内積をもつわけですが、2つのリーチルートの内積は 0 又は負ですから、各連結成分のただ1つのリーチルート（拡張元）と内積が -1 で他のリーチルートとは直交しています。ゆえに diagram を書くと、この中に表3の様に $D_{10}E_7^2$ の基本系や $A_{11}D_7E_6$ が見つかります。このルート系は正值のラティスを構成するので、ローレンチアンラティスの中での直交補空間の中に isotropic な元が必ずあり、その元の直交補空間より上の基本系をもつニイマイヤラティスが構成出来ます。残念ながらこの表には2個欠落しています。そのうち A_{11}^2 の基本ルート系をもつニイマイヤラティスはリーチラティスの中に長さ $2\sqrt{2}$ のベクトルが存在しますので構成できます。

次に上の方法を使うと多くのニイマイヤラティ

スがルート系だけで一意に決まることを示せることを
 紹介します。 E_8 は行列式が 1 なのでルート全体が
 unimodular ラティスになり、一意なのはあきらかで、
 しかもリーチルートの中でこれらは自己同型により共役
 になります。これを使うと E_8^3 から上の方法で構成した
 ものはすべて E_8^3 に戻れることがわかります。ゆえに、
 それらを基本系にもつニーマイヤラティスは一意である
 ことが出てきます。

定理： 次のルートの基本系をもつニーマイヤラティス
 は一意である。

$D_{24}, D_{16}E_8, E_8^3, A_{24}, D_{12}^2, A_{17}E_7, D_{10}E_7^2, A_{15}D_9, D_8^3, A_{12}^2,$
 $A_{11}D_7E_6, E_6^4, A_8^3$

最後にニーマイヤラティスに関して不思議なこ
 とをもう一つ述べて終わります。上の 23 個の dynkin
 diagram のうちコクスター数が同じものが丁度 2 個づつ
 5 組あり、それぞれ 6、10、12、18、30 をコク
 スター数に持っています。不思議な事にコンウェイ群の
 うち上の数字を位数にもつ元が丁度 3 個づつ他の元と違

参考文献

- R. E. Borcherds, The Leech lattice Proc. R. Soc.
London A398, (1985) 365-379
- J. H. Conway, N. J. A. Sloane "Sphere Packings,
Lattices and Groups" Springer-Verlag
- B. B. Venkov, On the classification of integral
even unimodular 24-dimensional quadratic
forms, Proceedings of the Steklov
Institute of Mathematics, Vol. 4 (1980) 63-74

On Mimura-type Spherical 2-designs

ATTILA SALI[†]
Kyushu University 33
Department of Mathematics
Faculty of Science
Fukuoka 812, JAPAN

November 14, 1991

Abstract

In this note we shall determine which Mimura-type spherical 2-designs are rigid. This work is intended to shed some lights on conjectures of Bannai. Bannai conjectured [Ba] that there exists a function $f(d, t)$ such that if X is a spherical t -design in \mathbb{S}^{d-1} and $|X| > f(d, t)$ then X is non-rigid. He has showed that $f(2, t) = 2t + 1$.

1 Introduction

Spherical t -designs were introduced by P. Delsarte, G.M. Goethals and J.J. Seidel [DGS]. Let $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ be the unit sphere in the $d + 1$ -dimensional Euclidean space.

Definition 1.1 *A finite $X \subset \mathbb{S}^d$ is called a spherical t -design in \mathbb{S}^d iff*

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|} \int_{\mathbb{S}^d} f(x) d\omega(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

holds for all polynomials $f(x)$ of degree at most t .

[†]Permanent address: Math. Inst. of Hung. Acad. Sci., Budapest P.o.b. 127 H-1364 HUNGARY

Let $P_l(\mathbb{S}^d)$ denote the linear space of homogenous polynomials of degree l on \mathbb{S}^d , and let $H_l(\mathbb{S}^d)$ be that of the homogenous harmonic polynomials of degree l on \mathbb{S}^d . Then we have that

$$P_l(\mathbb{S}^d) = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} H_{l-2k}(\mathbb{S}^d).$$

This implies the following equivalent definition of spherical t -designs.

Definition 1.2 X is a spherical t -design in \mathbb{S}^d iff

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$

holds for all non-constant homogenous harmonic polynomials f of degree at most t .

For basic properties of spherical t -designs and further references the reader is referred to Delsarte-Goethals-Seidel [DGS]. See also Bannai [Ba], Bannai-Ito [BaIt] and Goethals-Seidel [GS]. The following concept was introduced by Bannai [Ba].

Definition 1.3 Let $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ be a spherical t -design in \mathbb{S}^d . X is called non-rigid or deformable, if for any given $\epsilon > 0$ there exists another spherical t -design $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ such that $\|x_i - x'_i\| < \epsilon$ for $1 \leq i \leq n$, and there exists no orthogonal transformation $g \in O(d+1)$ with $g(x_i) = x'_i$. X is called rigid if it is not non-rigid.

Bannai put forward the following two conjectures[Ba].

Conjecture 1.4 There exists a function $f(d, t)$ such that if X is a spherical t -design in \mathbb{S}^{d-1} such that $|X| > f(d, t)$, then X is non-rigid.

Conjecture 1.5 For each fixed pair d and t , there are only finitely many rigid spherical t -designs up to orthogonal transformations.

Conjecture 1.4 is supported by the fact that the known rigid t -designs are very rare. In fact, besides tight t -designs, which in case of $t = 2$ are the d -dimensional simplexes (of $d+1$ vertices), the sequence of $d+2$ -element Mimura-type 2-designs are known to be rigid.

For the sake of compactness, we restrict the discussion to spherical 2-designs and omit some definitions and examples. For more detailed background the reader is referred to Seki's paper [Se] in the same volume.

2 Definitions and Results

Here we have to recollect first some definitions and notations from Mimura's paper [Mi]. To a multisubset $X = \{u_k: k = 1, 2, \dots, n\}$ of \mathbb{R}^d we assign the matrix W whose column vectors are

$$\sqrt{d/n} u_1, \sqrt{d/n} u_2, \dots, \sqrt{d/n} u_n.$$

Then X is a spherical 2-design of n points in \mathbb{S}^{d-1} iff $W = (w_{ik})$ satisfies the following:

$$\begin{array}{lll} (0) & \sum_{i=1}^d w_{ik}^2 = d/n & \text{for } 1 \leq k \leq n, \\ (1) & \sum_{k=1}^n w_{ik} = 0 & \text{for } 1 \leq i \leq d, \\ (2) & \sum_{k=1}^n w_{ik} w_{jk} = 0 & \text{for } 1 \leq i < j \leq d, \\ (3) & \sum_{k=1}^n w_{ik}^2 = 1 & \text{for } 1 \leq i \leq d. \end{array}$$

Let v_1, v_2, \dots, v_d be the row vectors of W and let $v_0 = \sqrt{1/n}(1, 1, \dots, 1)$. Let X be a spherical 2-design in \mathbb{S}^{d-1} . Then the set $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ forms an orthonormal system in \mathbb{R}^n . Let v_{d+1}, \dots, v_{n-1} be unit vectors in \mathbb{R}^n such that $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ forms an orthonormal basis of \mathbb{R}^n . Then the matrix V whose row vectors are v_{d+1}, \dots, v_{n-1} satisfies (0)-(3), hence defines a spherical 2-design in \mathbb{S}^{n-d-1} .

Definition 2.1 Any matrix V constructed the above way is called orthogonal to W and denoted by $V = W^\perp$.

Definition 2.2 Let X be a spherical 2-design, then we denote the matrix W constructed above by $m(X)$. Let $V = W^\perp$. Then the subset $Y \subset \mathbb{S}^{n-d-1}$ with $m(Y) = V$ is called dual of X and denoted by $Y = X^\perp$.

Definition 2.4 The spherical 2-design $X \subset \mathbb{S}^{d-1}$ defined by $m(X) = W(n, d)$ is called *Mimura-type 2-design*.

$$m\alpha_k^2 + (d - m)\beta_k^2 = d/n \quad (k = 1, 2, \dots, h)$$

$$1/2^e = \sum_{k=1}^h \beta_k^2$$

$$\gamma^2 = ds/mn.$$

We can choose real numbers that satisfy the equations

$$W(n, d) = \begin{pmatrix} \alpha_1 A & \alpha_2 A & \dots & \alpha_h A & \gamma C \\ \beta_1 B & \beta_2 B & \dots & \beta_h B & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 B & \beta_2 B & \dots & \beta_h B & 0 \end{pmatrix}.$$

Let e be such that $2^{e-1} < d < 2^e$. We put $h = 1$ and $m = n - 2^e - 1$ when $2d + 1 \leq n \leq 2^e + d$, and put $h = \lfloor (n - d)/2^e \rfloor$ and $m = d - 1$ otherwise. Put $s = n - 2^e h$. Let A (resp. B) be the matrix whose row vectors are the k th row vectors of H_e with $2 \leq k \leq m + 1$ (resp. $m + 2 \leq k \leq d + 1$). Let C be the matrix whose row vectors are $c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_m, s_m$ where $c_k + \sqrt{-1}s_k = \sqrt{2/s}(\zeta_k, \zeta_{2k}, \dots, \zeta_{s_k})$, where $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/s)$. Now we define

$$H_0 = (0), \quad H_{e+1} = \begin{pmatrix} H_e & H_e \\ H_e & -H_e \end{pmatrix}, \quad e \geq 0.$$

$n \geq 2d + 1$ and $d > 2$. Let H_0, H_1, \dots be matrices defined by construct $W(n, d)$ as follows. We may assume without loss of generality that row vectors are $c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_m, s_m, c_{n/2}$. Finally, for both n and d odd, we $c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_m, s_m$. For d odd and n even let $W(n, d)$ be the matrix whose $k > n/2$. For $d = 2m$ let $W(n, d)$ be the matrix whose row vectors are where $\xi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$, $r_0 = r_{n/2} = \sqrt{1/n}$ and $r_k = \sqrt{2/n}$ for $1 \leq$

$$c_k + \sqrt{-1}s_k = r_k(\xi^k, \xi^{2k}, \dots, \xi^{n_k}),$$

vectors defined by

Next we recall Mimura's construction. Let $c_k, s_k \in \mathbb{R}^n$ ($0 \leq k \leq n/2$) be

only if X_\perp is rigid.

Theorem 2.3 Let $X \subset \mathbb{S}^{d-1}$ be a spherical 2-design. Then X is rigid if and

Theorem 2.5 *If $n > d + 2 \geq 5$, then the Mimura-type spherical 2-design in \mathbb{S}^{d-1} with parameters n, d is non-rigid.*

Mimura proved that spherical 2-design with parameters $n = d + 2$ exists if and only if d is even.

Theorem 2.6 *The Mimura-type spherical 2-design in \mathbb{S}^{d-1} with parameters $n = d + 2 = 2m$ is rigid.*

Theorem 2.6 provides a series of examples of non-tight rigid spherical 2-designs. However, the size of the design is just one larger than the size of the tight one.

3 Proofs

Although the title of this section is *Proofs*, here we do not present complete detailed proofs, but only sketches. The main reason for this is the limited space available. However, the determined reader can make up the omitted parts by himself. For the sake of convenience if $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ and $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ are such that $\|x_i - x'_i\| < \epsilon$ for $1 \leq i \leq n$, then we call X' an ϵ -transform of X . Furthermore, we do not distinguish between X and $W = m(X)$, because they are just constant multiples of each other.

Lemma 3.1 *Let X and Y be spherical 2-designs so that $Y = X^\perp$. Then for every $\epsilon > 0$ there exists ϵ_1 such that if V is an ϵ_1 -transform of X , then there exists an ϵ -transform U of Y with $V = U^\perp$.*

The proof of this lemma is based on the fact that the solution of a system of linear equations is a continuous function of the coefficients in a neighbourhood of a non-zero system determinant.

Proof of Theorem 2.3

Let $Y = X^\perp$ and suppose that X is non-rigid. Let $\epsilon > 0$ be given and let ϵ_1 determined by the lemma. Let V be a non-orthogonal ϵ_1 -transform of X and let $U = V^\perp$ an ϵ -transform of Y . Let W and T be matrices defined by

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{1/n}(1, 1, \dots, 1) \\ X \\ Y \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt{1/n}(1, 1, \dots, 1) \\ V \\ U \end{bmatrix}.$$

Then W and T are orthogonal matrices. Let us suppose in contrary that Y is rigid. Then there exists an element $g \in O(n - d - 1)$ such that $U = gY$. Now

$$(W^T T g^{-1})W = \begin{bmatrix} \sqrt{1/n}(1, 1, \dots, 1) \\ V \\ Y \end{bmatrix}.$$

This means that $W^T T g^{-1} \in O(d)$ and takes X to V , a contradiction.

We give an (almost) complete proof of Theorem 2.6, because there is no known general method to prove that a spherical design is rigid.

Proof of Theorem 2.6

Let us indirectly suppose that $W(d + 2, d)$ is non-rigid, where $d = 2m$. Let V be a non-orthogonal ϵ -transform of it. Let the row vectors of $W(d + 2, d)$ be w_1, w_2, \dots, w_d and the row vectors of V be v_1, v_2, \dots, v_d . Let $w_{d+1} = \sqrt{1/n}(-1, 1, -1, 1, \dots, 1)$. Then the matrix

$$Q = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d+1} \end{bmatrix}$$

gives rise to the $d + 1$ -dimensional simplex, which is a tight 2-design. Let v_{d+1} be the unit vector orthogonal to $v_0 = \sqrt{1/n}(1, 1, \dots, 1), v_1, \dots, v_d$. Then by Mimura's argument, the components of v_{d+1} are $\pm\sqrt{1/n}$. We claim that $w_{d+1} = \pm v_{d+1}$. Having established this, we can conclude that the matrix

$$T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d+1} \end{bmatrix}$$

is either an ϵ -transform of the $d + 1$ -dimensional simplex, or a reflection of an ϵ -transform of the $d + 1$ -dimensional simplex. In any case, it must be an orthogonal transform of Q . Furthermore, this transformation $g: Q \mapsto T$ either fixes the $d + 1$ st coordinate or just changes its sign, so g restricted to the first d

coordinates is an element of $O(d)$, and takes $W(d+2, d)$ to V , a contradiction. Thus the only thing left to prove is our claim of $w_{d+1} = \pm v_{d+1}$. Let i_1, i_2, \dots, i_s be the even positions and j_1, j_2, \dots, j_s the odd positions where w_{d+1} and v_{d+1} differ. Let us assume that $s \leq m/2$. Then we have

$$\text{rank} \begin{pmatrix} z^{i_1} & z^{j_2} & \dots & z^{i_s} & z^{j_1} & z^{j_2} & \dots & z^{j_s} \\ z^{2i_1} & z^{2i_2} & \dots & z^{2i_s} & z^{2j_1} & z^{2j_2} & \dots & z^{2j_s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z^{mi_1} & z^{mi_2} & \dots & z^{mi_s} & z^{mj_1} & z^{mj_2} & \dots & z^{mj_s} \end{pmatrix} = 2s$$

for $z = \exp(2\pi \frac{\sqrt{-1}}{2m+2})$. This implies that there is an a such that

$$z^{ai_1} + z^{ai_2} + \dots + z^{ai_s} - z^{aj_1} - z^{aj_2} - \dots - z^{aj_s} \neq 0.$$

Then for $r = 2a - 1$ or $r = 2a$ we have that

$$\left| \sum_{k=1}^s w_{r i_k} - \sum_{k=1}^s w_{r j_k} \right| = \delta > 0.$$

On the other hand, by the orthogonality we have that $\langle w_r, w_{d+1} \rangle - \langle v_r, v_{d+1} \rangle = 0$. Thus,

$$\begin{aligned} 0 &= |\langle w_r, w_{d+1} \rangle - \langle v_r, v_{d+1} \rangle| \\ &= \left| -(w_{r1} - v_{r1}) \pm \dots + \sum_{k=1}^s (w_{r i_k} + v_{r i_k}) - \sum_{k=1}^s (w_{r j_k} + v_{r j_k}) \right| \\ &> \left| \sum_{k=1}^s (w_{r i_k} + v_{r i_k}) - \sum_{k=1}^s (w_{r j_k} + v_{r j_k}) \right| - (d - 2s)\epsilon \\ &> \left| \sum_{k=1}^s w_{r i_k} - \sum_{k=1}^s w_{r j_k} \right| - d\epsilon \\ &> \delta - d\epsilon \end{aligned}$$

which is a contradiction. If $s > m/2$, then instead of taking $\langle w_r, w_{d+1} \rangle - \langle v_r, v_{d+1} \rangle$ we take $\langle w_r, w_{d+1} \rangle + \langle v_r, v_{d+1} \rangle$ and obtain a contradiction in the same way.

Proof of Theorem 2.5

The case, when both n and d are odd, is obvious from the construction. If d is odd and n is even, then the first $d - 1$ rows of the even numbered columns of $W(n, d)$ form a 2-design in $d - 1$ -dimension. We can rotate it slightly and obtain a new 2-design in d -dimension, which is obviously not an orthogonal transformation of the original. In the case d is odd we use The Implicit Function Theorem as it is outlined in [Ba]. We illustrate it for $d = 4$, $n = 2a + 1$. Then for $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

$$\sqrt{2} W(n, 4) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \dots & \cos a\alpha & \cos(a+1)\alpha & \dots & \cos n\alpha \\ \sin \alpha & \dots & \sin a\alpha & \sin(a+1)\alpha & \dots & \sin n\alpha \\ \cos 2\alpha & \dots & \cos 2a\alpha & \cos 2(a+1)\alpha & \dots & \cos 2n\alpha \\ \sin 2\alpha & \dots & \sin 2a\alpha & \sin 2(a+1)\alpha & \dots & \sin 2n\alpha \end{pmatrix}$$

Now we change to $\cos i\alpha + \epsilon_i = \cos \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, a$). We choose β_i so that $\sin i\alpha$ and $\sin \beta_i$ have the same sign. Thus we obtain the following matrix

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & \dots & \cos \beta_a & \cos \beta_a & \dots & \cos \beta_1 & \cos n\alpha \\ \sin \beta_1 & \dots & \sin \beta_a & -\sin \beta_a & \dots & -\sin \beta_1 & \sin n\alpha \\ \cos 2\beta_1 & \dots & \cos 2\beta_a & \cos 2\beta_a & \dots & \cos 2\beta_1 & \cos 2n\alpha \\ \sin 2\beta_1 & \dots & \sin 2\beta_a & -\sin 2\beta_a & \dots & -\sin 2\beta_1 & \sin 2n\alpha \end{pmatrix}.$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{W}$ satisfies (0)-(3) iff $x_i = \cos i\alpha$ and $\tilde{x}_i = x_i + \epsilon_i = \cos \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, a$) satisfy the following system of equations:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a x_i &= \sum_{i=1}^a \tilde{x}_i \\ \sum_{i=1}^a x_i^2 &= \sum_{i=1}^a \tilde{x}_i^2 \\ \sum_{i=1}^a x_i(2x_i^2 - 1) &= \sum_{i=1}^a \tilde{x}_i(2\tilde{x}_i^2 - 1) \\ \sum_{i=1}^a 2x_i(1 - x_i^2) &= \sum_{i=1}^a 2\tilde{x}_i(1 - \tilde{x}_i^2) \\ \sum_{i=1}^a (2x_i^2 - 1)^2 &= \sum_{i=1}^a (2\tilde{x}_i^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

This is in turn equivalent to

$$\sum_{i=1}^a \epsilon_i^k = 0 \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

The above system of equations has many solutions in a neighbourhood of zero if $a \geq 5$, according to The Implicit Function Theorem. One can check that \widetilde{W} is not an orthogonal transform of $W(n, 4)$. To finish the proof for smaller n 's one has to apply Theorem 2.3.

4 Acknowledgement

The author is indebted to Prof. Eiichi Bannai for calling his attention to these problems and for very helpful and encouraging comments.

References

- [Ba] E. BANNAI, *On Extremal Finite Sets in the Sphere and Other Metric Spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Series **131** (1988), 13-38, Cambridge Univ. Press.
- [BaIt] E. BANNAI AND T. ITO, *Algebraic Combinatorics*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, California, 1984.
- [DGS] D. DELSARTE, G.M. GOETHALS AND J.J. SEIDEL, Spherical Codes and Designs, *Geometria Dedicata*, **6** (1977), 363-388.
- [GS] G.M. GOETHALS AND J.J. SEIDEL, Cubatura Formulae, Polytopes and Spherical Designs, in *Geometric Vain*, Springer Verlag, 1982, 203-218.
- [Mi] Y. MIMURA A Construction of Spherical 2-Design, *Graphs and Combinatorics*, **6** (1990), 369-372.
- [Se] G. SEKI On Non-rigid Spherical t-Designs, *in the same volume*.

On non-rigid spherical t -designs

九州大・理
関 剛

1 Definitions

spherical t -design は 1977 年に P. Delsarte, G. M. Goethals, J. J. Seidel [13] によって確立された概念です。 S^d を $d+1$ 次元ユークリッド空間の単位球、 X を S^d の有限部分集合とします。

Definition 1 .

X が S^d 上の spherical t -design であるとは、

$$\frac{1}{|S^d|} \int_{S^d} f(x) d\omega(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

が、高々 t 次の S^d 上の任意の多項式に関して成り立つことをいう。

さて、球面上の多項式の理論は球面上の調和多項式の理論と同一になります。このことは次の Theorem 1. によって保証されます。

$P_l(S^d)$ を S^d 上の l 次の斉次多項式のなすベクトル空間、 $H_l(S^d)$ を S^d 上の l 次の斉次調和多項式のなすベクトル空間とします。

Theorem 1 .

$$P_l(S^d) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} H_{l-2k}(S^d).$$

ここで

$$h_l \stackrel{\text{def}}{=} \dim H_l(S^d) = \binom{l+d}{d} - \binom{l+d-2}{d}$$

となります。

これによって Definition 1. は、次の Definition 2. で言い換えることができ

ます。

Definition 2 .

X が S^d 上の **spherical t -design** であるとは、

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0$$

が、非定数な高々 t 次の S^d 上の任意の調和多項式に関して成り立つことをいう。

さて、spherical t -design の考察をする際に重要かつ面白いと思われるものの 1 つは rigid spherical t -design の概念です。次に rigid と non-rigid の定義を示します。

Definition 3 .

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ が **non-rigid spherical t -design** であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の 2 つの条件を満たすような他の spherical t -design $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ が存在することをいう。

1. $\|x_i - x'_i\| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n)$.
2. $Ox_i = x'_i \quad (1 \leq i \leq n)$ となるような直交変換 $O \in O(d+1)$ が存在しない。

更に X が **rigid spherical t -design** であるとは、 X が spherical t -design かつ non-rigid ではないことをいう。

2 Examples

それでは、いくつかの手近な例についてみたいと思います。

1. $d = 1$ のとき

この場合、次の 2 つの定理によって分類されています。

Theorem 2 (Y. Hong, 1982).

X が S^1 上の spherical t -design ならば、

1. $|X| \leq 2t + 1$ のとき X は正 $k + 1$ 角形 ($t \leq k \leq 2t$) の頂点である。
2. $|X| = 2t + 2$ のとき X は 2 つの正 $t + 1$ 角形の頂点の和である。
3. $|X| \geq 2t + 3$ のとき無限個の spherical t -design が存在する。

Theorem 3 (E. Bannai, 1987).

X が S^1 上の rigid spherical t -design ならば X は正 $k + 1$ 角形 ($t \leq k \leq 2t$) の頂点である。

2. $d = 2$ のとき

特に正多面体を例にとってみましょう。様子は下の表のようにまとめられます。

図形	$ X $	t	rigid ?
正 4 面体	4	2	rigid
正 6 面体	8	3	non-rigid
正 8 面体	6	3	rigid
正 12 面体	20	5	non-rigid
正 20 面体	12	5	rigid

3 Bounds for the cardinality of spherical t -design

spherical t -design の存在については次の定理群が基本的です。

Theorem 4 (P. Seymour - T. Zaslavsky, 1984).

任意の t, d に対して spherical t -design が存在する。

Theorem 5 (D. Delsarte - G. M. Goethals - J. J. Seidel, 1977).

X が S^d 上の spherical t -design ならば

$$|X| \geq \begin{cases} \binom{d+s}{d} + \binom{d+s-1}{d} & (t = 2s), \\ 2 \binom{d+s}{d} & (t = 2s + 1). \end{cases}$$

Definition 4 .

spherical t -design が tight であるとは Theorem 5. に於て等式が成り立つときをいう。

注意 : tight \Rightarrow rigid. が成り立つ。

Theorem 6 (E. Bannai - R. M. Damerell, 1979,1980).

$d \geq 2$ に於いて tight な spherical t -design が存在するのは $t = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11$ の時に限る。

Theorem 7 (P. Rabau - B. Bajnok, preprint).

$$N \geq C(d) t^{\frac{d^2}{2} + \frac{3d}{2} - 1}$$

を満たす任意の N に対し $|X| = N$ となるような spherical t -design X が存在する。

Theorem 7. は現在最良の結果だと思われませんが、Theorem 5. と Theorem 7. の間にはかなりのギャップがあり新たな進展が待たれます。また先の諸定理によって存在がわかったとしても構成の仕方として (B. Bajnok の方法はある意味に於いては explicit と言えますが) 完全に explicit な方法は見つかっていません。更に spherical t -design がどれくらいの体に於て構成できるかということも面白い問題であると思います。

4 Bounds for the cardinality of rigid spherical t -design

4.1 Conjectures

さて rigid spherical t -design の存在領域については次の予想があります。

Conjectures (E. Bannai).

1. 各々の t, d に対して $|X|$ が十分大となるような spherical t -design X は non-rigid になる。
2. 各々の t, d に対して rigid な spherical t -design は直交変換を除いて有限個しか存在しない。

4.2 Technical method

$d = 1$ の場合には section 2 の例でみたような分類がなされています。E. Bannai [8] では non-rigid であるかどうかを判定する方法として陰関数定理が用いられていますが、自然な流れとしてこれを $d \geq 2$ の場合に拡張できないかというのが次の目標となります。以下にその指針を示します。

4.2.1 Implicit function theorem

$\{f_{l,1}, f_{l,2}, \dots, f_{l,h_l}\}$ を $H_l(S^d)$ の直交基底とします。極座標表示を持つ spherical t -design $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ の定義式系

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n f_{l,k}(\xi_i) = 0 \quad (1 \leq l \leq t, 1 \leq k \leq h_l)$$

を写像 $R^{d|X|} \rightarrow R^{\sum h_l}$ とみたとき Jacobi 行列は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1,h_1}}{\partial \theta_1}(\xi_1) & \dots & \frac{\partial f_{1,h_1}}{\partial \theta_1}(\xi_n) & \frac{\partial f_{1,h_1}}{\partial \theta_2}(\xi_1) & \dots & \frac{\partial f_{1,h_1}}{\partial \theta_j}(\xi_k) & \dots & \frac{\partial f_{1,h_1}}{\partial \theta_d}(\xi_n) \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \theta_1}(\xi_1) & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \frac{\partial f_{1,l_i}}{\partial \theta_1}(\xi_1) & & & \dots & \frac{\partial f_{1,l_i}}{\partial \theta_j}(\xi_k) & \dots & & \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \theta_1}(\xi_1) & \dots & & & & & \dots & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \theta_d}(\xi_n) \end{pmatrix}$$

と書けます。 J の行は $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ で規定され、列は X の元とその極座標で規定されています。

このとき次の 2 つの条件を満たせば X は non-rigid な spherical t -design となることがわかります。

N1. J が full rank となる。

N2. $(*)$ の解空間を与える free parameter の数が $O(d+1)$ の parameter の数より多い。

4.2.2 Explicit construction of basis of $H_l(S^d)$

今度は Jacobi 行列を考察するために、具体的に $H_l(S^d)$ の直交基底を構成してみましょう。多項式の空間に於て直交基底を構成しようとする際には Gegenbauer 多項式が有用です。

Definition 5 .

m 次の Gegenbauer 多項式 C_m^λ を帰納的に次のように定義する。

$$\begin{aligned} C_0^\lambda(x) &= 1, \\ C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x, \\ (k+1)C_{k+1}^\lambda(x) &= 2(k+\lambda)x C_k^\lambda(x) - (k+2\lambda-1)C_{k-1}^\lambda(x). \end{aligned}$$

$H_l(S^d)$ の直交基底はこの Gegenbauer 多項式を使って実際に次のように構成されます。

Theorem 8 .

$$\begin{aligned} \Phi(l) &= \{f_{m_0, m_1, m_2, \dots, m_{d-1}}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}, \theta_d) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} e^{\pm\sqrt{-1}m_{d-1}\theta_d} \prod_{k=0}^{d-2} (\sin\theta_{k+1})^{m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + \frac{d-1-k}{2}}(\cos\theta_{k+1}) \\ &\quad ; 0 \leq |m_{d-1}| \leq m_{d-2} \leq \dots \leq m_1 \leq m_0 = l, m_i \in Z \} \end{aligned}$$

は $H_l(S^d)$ の直交基底をなす。

しかしこの条件から $d \geq 2$ の場合に先の N1., N2. を試すことは、それほど容易なことではないであろうと思われます。

5 On some non-rigid spherical t -designs

5.1 Main result

さて section 4 のように Jacobi 行列を考察することによって次のような面白い結果が得られましたので示しておきます。

Theorem 9 (G. Seki, to appear).

spherical $2t$ -design は t -design として non-rigid である。

5.2 Outline of the proof

次に証明の概略を示します。subsubsection 4.2.1に与えた non-rigid になるための条件 N1., N2. を次の subsubsection 5.2.1, 5.2.2 で1つずつチェックしていきます。

5.2.1 Estimation of Jacobi matrix

まず簡単のために記号を定めます。

$$A_{d-\nu} = (a_{ij})_{matrix} \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_{d-\nu}} f_{(\nu,i)}(\xi_j) \right).$$

ここで $\{f_{(\nu,i)}\}$ は $m_{d-1} = \dots = m_{d-\nu} = 0, m_{d-\nu-1} \neq 0$ ($0 \leq \nu \leq d-1$) となるような基底の集合です。

$$g_{d-\nu}(\xi) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & (\nu = 0), \\ e^{\pm \sqrt{-1}\theta_d} & (\nu = 1), \\ C_1^{\frac{\nu-1}{2}} (\cos \theta_{d-\nu+1}) & (2 \leq \nu \leq d-1). \end{cases}$$

$$B_{d-\nu} = (b_{ij})_{matrix} \stackrel{def}{=} \left(g_{d-\nu}(\xi_j) \frac{\partial}{\partial \theta_{d-\nu}} f_{(\nu,i)}(\xi_j) \right).$$

Lemma 1 .

行の入れ替えによって J を次のような J' に変形できる。

$$J' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ * & A_2 & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & A_{d-\nu-1} & 0 & 0 & \\ & & & * & A_{d-\nu} & 0 & \\ & & & * & * & A_{d-\nu+1} & \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & A_{d-1} & 0 \\ * & \dots & & & & \dots & * & A_d \end{pmatrix}.$$

Lemma 2 .

$f \in \bigcup_{l=1}^t \Phi(l)$ ならば定数 b_f が存在して

$$\frac{1}{b_f} g_{d-\nu}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \theta_{d-\nu}} \in \bigcup_{l=1}^t \Phi(l).$$

Lemma 3 .

$f_1 \neq f_2$ ならば

$$g_{d-\nu}(\xi) \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \theta_{d-\nu}} \neq g_{d-\nu}(\xi) \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \theta_{d-\nu}}.$$

以上の lemma については直接の計算によって示すことができます。
これらの lemma を使うと次のように、与えられた条件のもとでは J' が full rank であることがわかります。

Lemma 4 .

J' は full rank である。

(proof) $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ が spherical $2t$ -design ならば $f_j, f_k \in \bigcup_{l=1}^t \Phi(l)$ に
対して

$$\sum_{i=1}^n f_j f_k(\xi_i) = \int_{S^d} f_j f_k(x) d\omega(x) = \lambda_{(j)} \delta_{j,k}, \quad (\lambda_{(j)} \neq 0)$$

が成り立ち Gram matrix を考察することによって $B_{d-\nu}$ は full rank つまり $A_{d-\nu}$ も full rank、したがって J' が full rank となる。 (Q.E.D)

5.2.2 Estimation of the number of free parameters

Lemma 5 .

X が spherical $2t$ -design かつ $d \geq 2$ ならば

$$d|X| > \sum_{l=1}^t h_l + \dim O(d+1) = \binom{t+d}{d} + \binom{t+d-1}{d-1} + \frac{d(d+1)}{2}.$$

この lemma は Theorem 5. から直ちに導かれます。

References

- [1] J. ARIAS DE REYNA, *A generalized mean value theorem*, *Monatsh. Math.*, 106 (1988), 95-97.
- [2] B. BAJNOK, *Construction of spherical t -designs*, Ph.D. thesis, Ohio State Univ., (1989).
- [3] B. BAJNOK, *Construction of spherical 4- and 5-designs*, *Graphs and Combinatorics*, 7 (1991), 219-233.
- [4] 坂内英一, *代数的組合せ論*, *数学*, 31 (1979), 126-143.
- [5] E. BANNAI, *On extremal finite sets in the sphere and other metric spaces*, *London Math. Soc. Lecture Note Series* 131, Algebraic, extremal and metric combinatorics 1986, 13-38.
- [6] 坂内英一, *On spherical t -designs (a survey)*, *代数的組合せ論報告集*, (1989), 88-101.
- [7] E. BANNAI, *On some spherical t -designs*, *J. Combinatorial theory (A)*, 26 (1979), 157-161.
- [8] E. BANNAI, *Rigid spherical t -designs in S^1 and a theorem of Y. Hong*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 34 (1987), 485-489.
- [9] E. BANNAI, *Spherical t -designs and group representation*, *Contemporary Math. (AMS)*, 34 (1984), 95-107.
- [10] E. BANNAI, *Spherical t -designs which are orbits of finite group*, *J. Math. Soc. Japan*, 36 (1984), 341-354.
- [11] E. BANNAI AND R. M. DAMERELL, *Tight spherical t -designs I*, *J. Math. Soc. Japan*, 31 (1979), 199-207.
- [12] E. BANNAI AND R. M. DAMERELL, *Tight spherical t -designs II*, *J. London Math. Soc.*, 21 (1986), 13-30.
- [13] D. DELSARTE, G. M. GOETHALS AND J. J. SEIDEL, *Spherical codes and designs*, *Geometriae Dedicata*, 6 (1977), 363-388.

- [14] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER AND F. G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions, Bateman manuscript project, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [15] J. M. GOETHALS AND J. J. SEIDEL, *Cubature formulae, polytopes and spherical designs*, in Geometric Vain, Springer Verlag, 1982, 203-218.
- [16] J. M. GOETHALS AND J. J. SEIDEL, *Spherical designs*, Proc. Sympos. Pure Math., 34 (1979), 255-272.
- [17] Y. HONG, *On spherical t -designs in R^2* , Europ. J. Combinatrics, 3 (1982), 255-258.
- [18] Y. MIMURA, *A construction of spherical 2-designs*, Graph and Combinatrics, 6 (1990), 369-372.
- [19] I. P. MYSOVSKIH, *On the construction of cubature formulas with fewest nodes*, Soviet Math. Dokl., 9 (1968) No.1, 277-280.
- [20] 小野孝, ガウスの和とルジャンドル多項式, 数学セミナー, 1986.11-1987.4 連載.
- [21] P. RABAU AND B. BAJNOK, *Bounds for the number of nodes in Chebyshev-type quadrature formuras*, preprint.
- [22] A. SALI, *On Mimura-type spherical 2-designs*, 代数的組合せ論報告集, (1991).
- [23] G. SEKI, *On some non-rigid spherical t -designs*, to appear in Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ..
- [24] P. SEYMOUR AND T. ZASLAVSKY, *Averaging set, A generalization of mean values and spherical designs*, Adv. in Math., 52 (1984), 213-240.
- [25] 竹内勝, 現代の球関数, 岩波書店, 東京, 1975.
- [26] G. WAGNER, *On averaging sets*, Monatsh. Math., 111 (1991), 69-78.

Exact coverings of 2-paths by Hamilton cycles for K_{p+2}

静岡県立大学 小林みどり
半導体研究所 喜安 善市
静岡県立大学 中村 義作

1991年11月6日

Abstract

$C(n, k, \lambda)$ design とは, K_n の k -cycle の集まりであって, K_n の任意の 2-path をちょうど λ 回含んでいるものである. ここでは, $C(p+2, p+2, 2)$ design と, ある条件のもとでの $C(p+2, p+2, 1)$ design (p は奇素数) の構成を行う.

1 Introduction

$K_n = (V_n, E_n)$ を n 個の頂点をもつ完全グラフとする. $C(n, k, \lambda)$ design とは, K_n の Hamilton cycle の集まりであって, K_n の任意の 2-path をちょうど λ 回ずつ含んでいるものである. $k = n, \lambda = 1$ のときは, Dudeney の円卓問題となる. Dudeney の円卓問題とは, 「 n 人の人を何回か円卓に座らせる. その際, どの人についても, 自分以外の任意の 2 人が自分の両隣りにちょうど 1 回くるようにせよ。」という問題である [2,3]. 自分以外の人 $n-1$ 人であり, その中から任意の 2 人を選ぶ選び方は, $\binom{n-1}{2}$ であるから, $\binom{n-1}{2}$ 回座らせればよいことになる. 一般に, $C(n, k, \lambda)$ design は k 人がけテーブルの問題となる.

\mathcal{F} を, K_n の 1-factorization で, 任意の 2 つの 1-factor $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ について, $F_1 \cup F_2$ は k -cycle のみから成るならば, $\{F_1 \cup F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}\}$ は resolvable $C(n, k, 1)$ design を与える.

$C(n, k, \lambda)$ design は, $k = 3$ のとき, 解は trivial であり, resolvable な解については, [1] で構成されている. $k = 4$ のとき, 解は, (1) n は偶数 (2)

$n \equiv 1 \pmod{4}, \lambda \equiv 0 \pmod{2}$ (3) $n \equiv 3 \pmod{4}, \lambda \equiv 0 \pmod{4}$ の時のみ存在する [6, 11]. また resolvable な解については, [9] で構成されている.

$k = n$ のときは, n が任意の偶数について $C(n, n, 1)$ design を構成することができた [7]. しかし n が奇数の場合は, $n = 2^e + 1$ (p は素数, e は自然数) と $n = p + 2$ (p は素数で 2 が $\text{mod } p$ の原始根) のときに, $C(n, n, 1)$ design が構成されているのみである [4, 10].

ここでは, §3 で $n = k = p + 2, \lambda = 2$ のとき, 即ち $C(p + 2, p + 2, 2)$ design を構成し, $\lambda = 1$ のとき, 即ち $C(p + 2, p + 2, 1)$ design については, §4 で考察する.

そのための準備として, $n = p + 1$ の場合を次の節で構成する.

2 $C(p + 1, p + 1, 1)$ design

$n = p + 1, K_n = (V_n, E_n), V_n = \{\infty\} \cup \{0, 1, 2, 3, \dots, p - 1\}$ とおき, K_n の 1-factor $F_i, (0 \leq i \leq p - 1)$ を定義する:

$$F_i = \{\{\infty, i\}\} \cup \{\{a, b\} \in E_n \mid a, b \neq \infty, a + b \equiv 2i \pmod{p}\}.$$

σ を V_n の permutation $\sigma = (\infty)(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ p - 1)$ とする. $\Sigma = \langle \sigma \rangle$ とおき, K_n の cycle または circuit の集合 C に対して, $\Sigma C = \{\sigma^t C \mid 0 \leq t \leq p - 1, C \in C\}$ と定義する.

2.1 Theorem

- (1) $\Sigma\{F_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq (p - 1)/2\}$ は $C(p + 1, p + 1, 1)$ design である.
- (2) $\Sigma\{F_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq p - 1\}$ は $C(p + 1, p + 1, 2)$ design である.

3 $C(p + 2, p + 2, 2)$ design

前節と同様に, $n_1 = p + 1, K_{n_1} = (V_{n_1}, E_{n_1}), V_{n_1} = \{\infty\} \cup \{0, 1, 2, 3, \dots, p - 1\}, F_i = \{\{\infty, i\}\} \cup \{\{a, b\} \in E_{n_1} \mid a, b \neq \infty, a + b \equiv 2i \pmod{p}\}, \sigma = (\infty)(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ p - 1), \Sigma = \langle \sigma \rangle$ とする.

さらに, $n = p+2$, $K_n = (V_n, E_n)$, $V_n = \{\infty\} \cup \{\alpha\} \cup \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ とおき, V_n の permutation $\sigma = (\infty)(\alpha)(0\ 1\ 2\ 3\ \dots\ p-1)$ を同じ記号 σ で表す. また $r = (p-1)/2$ とおく.

K_{n_1} の 1-factor G_1 を次のように定義する:

(i) $p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき

$$G_1 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{r-2, r-1\}, \\ \{r+1, r+2\}, \dots, \{p-2, p-1\}, \{\infty, r\}\}.$$

(ii) $p \equiv 3 \pmod{4}$ のとき

$$G_1 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{r-1, r\}, \\ \{r+2, r+3\}, \dots, \{p-2, p-1\}, \{\infty, r+1\}\}.$$

任意の i ($2 \leq i \leq p-1$) について $G_i = iG_1$ と定めると, p が素数であることより G_i も 1-factor となる.

3.1 Lemma

- (1) $F_0 \cup G_i$ ($1 \leq i \leq p-1$) は K_{n_1} の Hamilton cycle である.
- (2) $\{F_0\} \cup \{G_i \mid 1 \leq i \leq p-1\}$ は K_{n_1} の 1-factorization である.
- (3) $\cup_{i=1}^{p-1} F_i = \cup_{i=1}^{p-1} G_i$

図 1 のように F_r, F_{r+1} の全ての edge の間に α を挿入したものをそれぞれ $F_r^\alpha, F_{r+1}^\alpha$ とかくこととする (図 1).

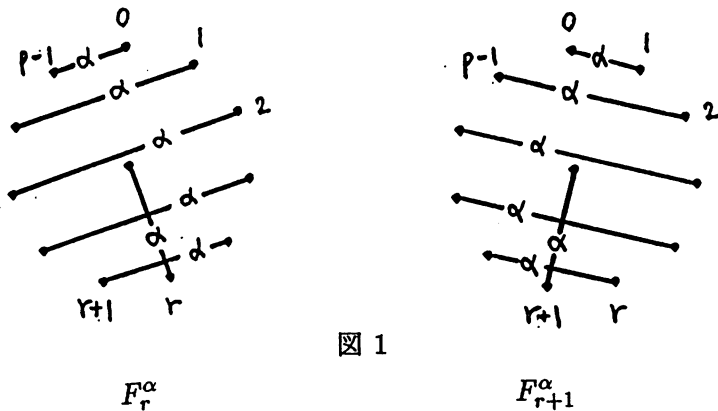


図 1

3.2 Lemma

- (1) $\Sigma\{F_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq p-1\}$ は任意の 2-path (a, b, c) ($a, b, c \neq \alpha$) をちょうど 2 回ずつ含む。
(2) $\Sigma\{F_0 \cup F_r^\alpha, F_0 \cup F_{r+1}^\alpha\}$ は任意の 2-path (α, a, b) , (a, α, b) ($a, b \neq \alpha$) をちょうど 2 回ずつ含む。

Proof. (1) は $\Sigma\{F_0 \cup F_i \mid 1 \leq i \leq p-1\}$ が任意の 2-path (a, b, c) ($a, b, c \neq \alpha$) をちょうど 2 回ずつ含むことと, Lemma 3.1 (3) より得られる。
(2) は明らか。

Lemma 3.2 の (1), (2) をあわせて次を得る。

3.3 Lemma

$$C = \{F_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{F_0 \cup F_r^\alpha, F_0 \cup F_{r+1}^\alpha\}$$

とおくと, ΣC は, K_n の任意の 2-path をちょうど 2 回ずつ含む。

3.4 Lemma $1 \leq i \leq p-1$ について

$$|\{G_i \text{ の有限 edge}\} \cap (F_r \cup F_{r+1})| = 1.$$

Lemma 3.4 で定まる 1 本の edge を $\{x_i, y_i\} \in G_i$ とおく。 G_i の edge $\{x_i, y_i\}$ の間に α を挿入したものを G'_i とし, F_r, F_{r+1} に属する (x_i, α, y_i) の α を取ったものを, それぞれ F'_r, F'_{r+1} とする。そして

$$C' = \{F_0 \cup G'_i \mid 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{F_0 \cup F'_r, F_0 \cup F'_{r+1}\}$$

とおく。

3.5 Lemma $\Sigma C'$ は $C(p+2, p+2, 2)$ design である.

Proof. $\Sigma C'$ に含まれる各 cycle が Hamilton cycle であることは Lemma 3.1 (1) より明らか. $\Sigma C'$ が K_n の全ての 2-path を含むことは Lemma 3.3 で保証されている.

4 $C(p+2, p+2, 1)$ design

記号は §3 と同様とする. K_{n_1} の edge $\{a, b\}$ について, edge の長さを

$$d(a, b) = \begin{cases} \min\{p - |b - a|, |b - a|\} & \text{if } a, b \neq \infty \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

と決める. また edge の傾きを

$$c(a, b) = i \text{ such that } \{a, b\} \in F_i \text{ (} 0 \leq i \leq p-1 \text{)}$$

と定義する. さらに, 傾き i, j が同値 ($i \sim j$) であるとは, $i = j$ または $i = p - j$ であることと定義する.

4.1 Definition K_{n_1} の 1-factor B が条件

- (1) $F_0 \cup B$ は Hamilton cycle である (従って $B \cup F_0 = \phi$),
 - (2) B は全ての長さをもつ,
 - (3) B は全ての同値でない傾き ($\neq 0$) をもつ (従って 1 つの傾きだけ 2 回もつ)
- を満たすとき, B を black 1-factor という.

K_{n_1} に black 1-factor があれば, §3 と同じ考え方で $C(p+2, p+2, 1)$ design を作る事ができる. 即ち

$F_{-1/2}$ の edge $\{\infty, -1/2\}, \{0, -1\}, \{1, -2\}$ を交換し
それらを $B', F'_{-1/2}$ とかく. さらに

$F'_{-1/2}$ の edge $\{-1, -2\}, \{-1/2, 0\}, \{-3/2, 1/2\}$ と

$F_{-3/4}$ の edge $\{-1, -1/2\}, \{-2, 1/2\}, \{0, -3/2\}$ を交換する.

以上により, 1つ余分だった傾き $1/4$ の edge を $F_{-3/4}$ に入れることができる. 今までと同様の考え方により, 各 cycle に α を挿入することができ, $C(p+2, p+2, 1)$ design が得られる.

参考文献

- [1] Z.Baranyai, On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Infinite and Finite Sets* (Proc. Inter. Coll. Keszthely, 1973; A.Hajnal, R.Rado and V.T.Sós, eds.), Bolyai J. Mat. Társulat, Budapest, and North Holland, Amsterdam, (1975) 91-108.
- [2] H.E.Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons, London, 1917, Dover Reprint, New York, 1970.
- [3] H.E.Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, Thomas Nelson and Sons, London, 1919, Dover Reprint, New York, 1958.
- [4] K.Heinrich, M.Kobayashi and G.Nakamura, Dudeney's Round Table Problem, *Annals of Discrete Math.* (to appear).
- [5] K.Heinrich, M.Kobayashi and G.Nakamura, A Solution of Dudeney's Round Table Problem for $p^e q^f + 1$ (in submission).
- [6] K.Heinrich and G.Nonay, Exact Coverings of 2-paths by 4-cycles, *J. Combinatorial Theory* (A) 45 (1987) 50-61.
- [7] M.Kobayashi, Kiyasu-Z. and G.Nakamura, A solution of Dudeney's round table problem for an even number of people, *J. Combinatorial Theory* (A) (to appear).

- [8] M.Kobayashi and G.Nakamura, Exact coverings of 2-paths by Hamilton cycles, *J. Combinatorial Theory (A)* (to appear).
- [9] M.Kobayashi and G.Nakamura, Resolvable coverings of 2-paths by 4-cycles, *J. Combinatorial Theory (A)* (to appear).
- [10] G.Nakamura, Kiyasu-Z. and N.Ikeno, Solution of the round table problem for the case of $p^k + 1$ persons, *Commentarii Mathematici Universitatis Santi Pauli* **29** (1980) 7-20.
- [11] G.Nonay, Results on the covering of 2-paths by cycles, Thesis, Simon Fraser Universit (1987).

Circuit Chasing Technique in a Distance Regular Graph with Triangles

大阪教育大学 平木 彰

1. Introduction

Let Γ be a connected undirected simple finite graph.

Let $\partial(u,v)$ denote the length of a shortest path from u to v .

$$d = \max\{ \partial(x,y) \mid x, y \in \Gamma \}.$$

We set

$$\Gamma_i(u) = \{ x \in \Gamma \mid \partial(u,x) = i \},$$

$$D_j^i(u,v) = \Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v) \quad \text{for every } i, j.$$

Γ is said to be distance regular (DRG), if the cardinality of the set $D_j^i(u,v)$ depends only on the distance between u and v , rather than on the choice of such vertices. We denote by

$$p_{ij}^\ell = |D_j^i(u,v)|, \quad \text{where } \ell = \partial(u,v).$$

Let

$$c_i = p_{1 \ i-1}^i = p_{i-1 \ 1}^i \quad (1 \leq i \leq d),$$

$$a_i = p_{1 \ i}^i = p_{i \ 1}^i \quad (0 \leq i \leq d),$$

$$b_i = p_{1 \ i+1}^i = p_{i+1 \ 1}^i \quad (0 \leq i \leq d-1).$$

which are called the intersection numbers of Γ .

Let

$$k_i = p_{ii}^0 = |\Gamma_i(u)|.$$

In particular $k = k_1$ is the valency of Γ .

$$\iota(\Gamma) = \begin{bmatrix} * & c_1 & c_2 & \dots & c_i & \dots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_{d-1} & a_d \\ k & b_1 & b_2 & \dots & b_i & \dots & b_{d-1} & * \end{bmatrix}$$

is called the intersection array of Γ .

The following are basic properties of intersection numbers.

- (1) $c_i + a_i + b_i = k$ for all i .
- (2) $1 = c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_{d-1} \leq c_d \leq k$.
- (3) $k = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{d-2} \geq b_{d-1} \geq 1$.
- (4) $k_i b_i = k_{i+1} c_{i+1}$ for $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$.
- (5) $k_i p_{jt}^i = k_j p_{it}^j = k_t p_{ij}^t$ for $0 \leq i, j, t \leq d$.

Information about the general theory of distance regular graphs is given in [1] and [4].

In this paper, we prove the following result.

Theorem 1. Let Γ be a distance regular graph with the following intersection array

$$\iota(\Gamma) = \begin{bmatrix} * & 1 & \dots & 1 & 2 & \dots & 2 & \\ 0 & a & \dots & a & 2a & \dots & 2a & \dots \\ k & b & \dots & b & e & \dots & e & \dots \\ & \underline{\quad r \quad} & & \underline{\quad s \quad} & & & & \end{bmatrix}.$$

If $a > 0$, $r > 1$, then $s < 2$.

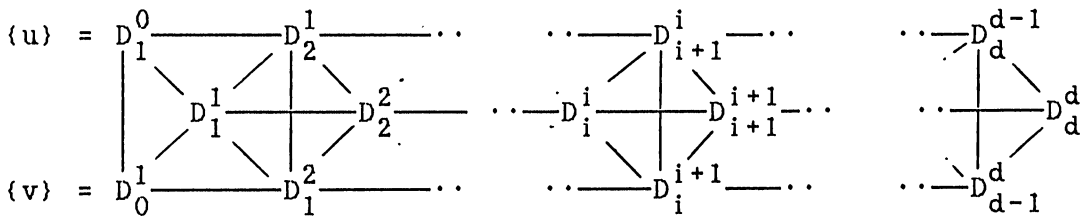
2. Intersection Diagram

Let u and v be adjacent vertices in Γ and $D_j^i = D_j^i(u, v)$.

The intersection diagram with respect to (u, v) is the collection $\{D_j^i\}_{i,j}$ with lines.

We draw a line between D_j^i and D_t^s if there is possibility of existence of edges between them, and we erase the line when we know there is no edge between them.

In general, the intersection diagram with respect to (u, v) has the following shape.



Lemma 2.

- (1) If $c_i = c_{i+1}$ then there are no edges between D_{i+1}^i and $D_i^i \cup D_i^{i+1}$
- (2) If $c_i = c_{i+1}$ then there are no edges between D_i^{i+1} and $D_i^i \cup D_{i+1}^i$
- (3) If $b_i = b_{i+1}$ then there are no edges between D_{i+1}^i and $D_{i+1}^{i+1} \cup D_i^{i+1}$
- (4) If $b_i = b_{i+1}$ then there are no edges between D_i^{i+1} and $D_{i+1}^{i+1} \cup D_{i+1}^i$

Proof. Straightforward. (see [3].)

3. Shape of the Diagram

Let Γ be a distance regular graph with the following intersection array

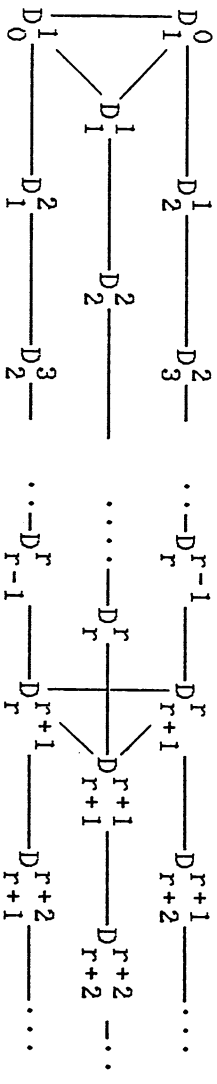
$$t(\Gamma) = \begin{bmatrix} * & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & a & \cdots & a & 2a & \cdots & 2a & \cdots \\ k & b & \cdots & b & e & \cdots & e & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

We may assume that $a > 0$, $r > 1$, and $s > 1$.

Lemma 3.

- (1) There are no edges between D_{r+1}^r and D_r^r .
- (2) There are no edges between D_r^{r+1} and D_r^r .

Using LEMMA 2 and 3, the intersection diagram w.r.t (u,v) has following shape.



Lemma 4.

- (1) $D_1^1(x,y)$ is a clique.
- (2) $\Gamma_1(x)$ is a disjoint union of cliques each of whose size is $a_1 + 1$.

Lemma 5.

Let $x \in D_{r+1}^r$, $\{y\} = D_r^{r-1} \cap \Gamma_1(x)$ $\{z\} = D_r^{r+1} \cap \Gamma_1(x)$.

Set $P = D_{r+1}^r \cap \Gamma_1(x)$, and $Q = D_{r+1}^{r+1} \cap \Gamma_1(x)$.

(1) $\{x, y\} \cup P$ form a clique.

(2) $\{x, z\} \cup Q$ form a clique.

Lemma 6. Let $w \in D_{r+1}^{r+1}$.

There is exactly one neighbor of w in D_r^r .

For $w \in D_{r+1}^{r+1}$, we set

$$\{w_\alpha\} = D_r^r \cap \Gamma_1(w),$$

$$\{w_\beta\} = D_{r+1}^r \cap \Gamma_1(w),$$

$$\{w_\gamma\} = D_r^{r+1} \cap \Gamma_1(w),$$

$$M(w) = D_1^1(w, w_\alpha),$$

$$N(w) = D_1^1(w_\beta, w_\gamma), \quad N_0(w) = N(w) - \{w\}$$

Lemma 7.

(1) w_β and w_γ are adjacent.

(2) $M(w) \cap N(w) = \emptyset$.

(3) $D_{r+1}^{r+1} \cap \Gamma_1(w) = M(w) \cup N_0(w)$

(4) $M(w) \cup \{w, w_\alpha\}$ form a clique.

(5) $N(w) \cup \{w_\beta, w_\gamma\}$ form a clique.

Lemma 8.

Let $z \in D_{r+2}^{r+2}$, $\{w, x\} = D_{r+1}^{r+1} \cap \Gamma_1(z)$.

Then x and w are not adjacent.

4. Proof of Theorem.

Our proof is based on the circuit chasing technique which was developed by Biggs, Boshier and Shawe-Taylor in their paper [2]. We write down the distance distribution of a circuit which is called the *profile* of the circuit with respect to one of its edges (x_0, x_1) and then derive the profile with respect to the next edge (x_1, x_2) using the intersection diagram. We continue this procedure successively to obtain some of the information of this circuit.

Circuit chasing is very powerful but it works only for distance regular graphs with special types of arrays.

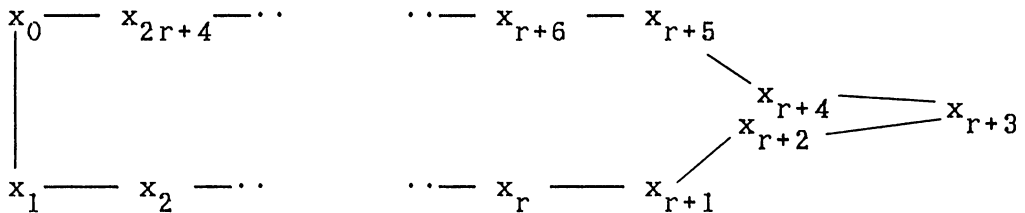
In fact all examples where circuit chasing technique proved successful had large girth. So this is the first application of this technique to graphs with triangles, i.e., girth 3.

We hope that this technique is applicable for wider class of distance regular graphs if we add extra works on the study of the structure as we did in this paper.

We consider a circuit of length $2r+5$

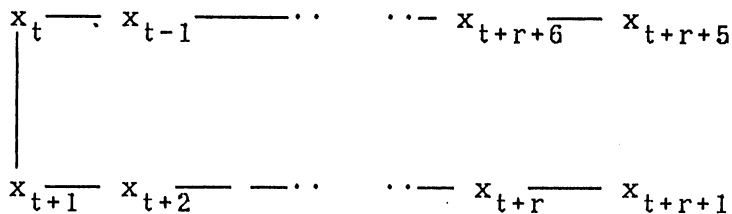
$$C: x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \dots \dots \sim x_{2r+3} \sim x_{2r+4} \sim x_{2r+5} = x_0$$

whose profile with respect to (x_0, x_1) is as follows:



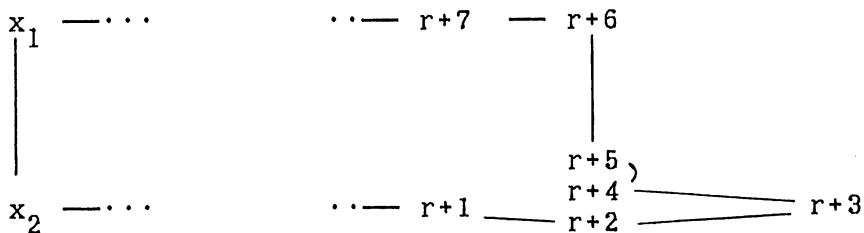
We note that this circuit contains no triangles by Lemma 8. Thus $D_1^1(x_t, x_{t+1}) \cap C = \emptyset$ and $\partial(x_t, x_{t+2}) = 2$ for any t .

This means we can do the same business of circuit chasing as in a distance regular graph with large girth. We can easily check the locations of x_i 's on the diagram with respect to (x_t, x_{t+1}) as follows:

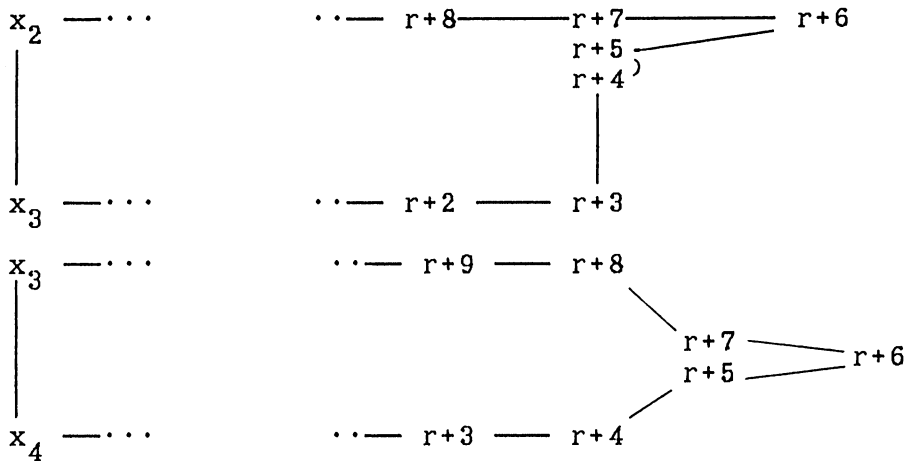


where indices are given by modulo $2r+5$. So we may consider only the profile of $(x_{t+r+2}, x_{t+r+3}, x_{t+r+4})$ which is called the *middle part* of C with respect to (x_t, x_{t+1}) .

We firstly determine the profile of C w.r.t (x_1, x_2) . We have already obtained the locations of x_i 's except for $(x_{r+3}, x_{r+4}, x_{r+5})$, in particular $x_{r+2} \in D_r^{r+1}$ and $x_{r+6} \in D_{r+1}^r$. Since the former diagram shows that $\partial(x_1, x_{r+3}) = r+2$ and $x_{r+2} \sim x_{r+3}$, we see x_{r+3} must be in D_{r+1}^{r+2} . Since $\partial(x_1, x_{r+4}) = r+1$ and $x_{r+3} \sim x_{r+4}$, x_{r+4} must be in D_r^{r+1} . Since $\partial(x_1, x_{r+5}) = r+1$, we have x_{r+5} in $D_r^{r+1} \cup D_{r+1}^{r+1}$. Suppose x_{r+5} is in D_{r+1}^{r+1} , Lemma 7 implies $x_{r+4} \sim x_{r+6}$. This contradicts our assumption. Hence x_{r+5} must be in D_r^{r+1} . So we have the profile of C with respect to (x_1, x_2) as follows:



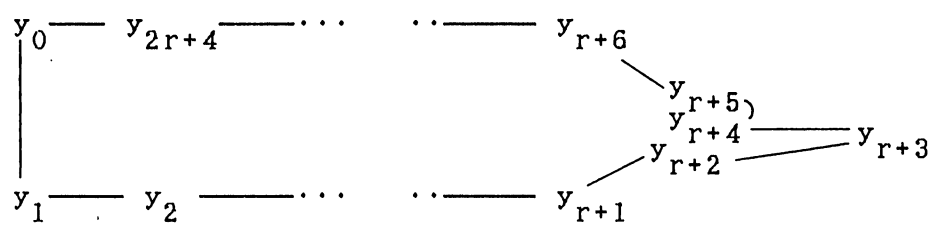
Using the same argument, we can obtain the profiles w.r.t (x_2, x_3) and (x_3, x_4) as follows.



Now this profile is the same as the one w.r.t (x_0, x_1) . We continue this procedure successively. Returning to the first edge, the profile of C with respect to (x_{2r+5}, x_1) must be the same as the one with respect to (x_0, x_1) . So the length of this circuit is divisible by 3. Hence we have $2r+5 \equiv 0 \pmod{3}$ or $r \equiv 2 \pmod{3}$.

Next we consider the second circuit of length $2r+6$

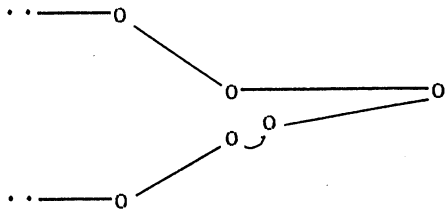
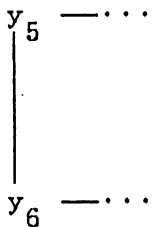
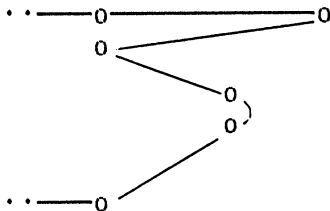
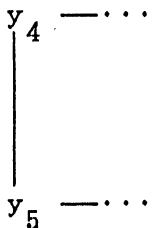
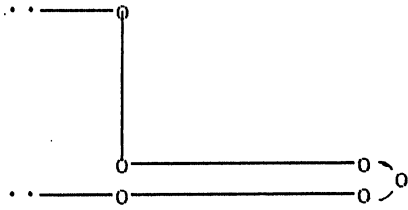
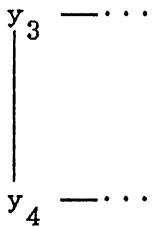
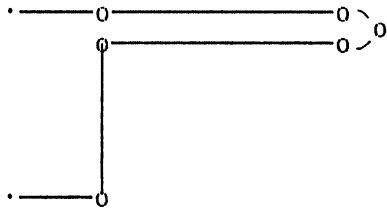
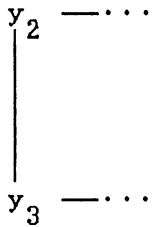
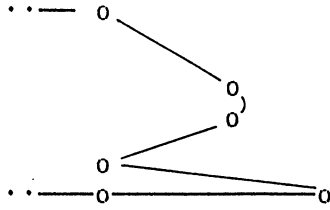
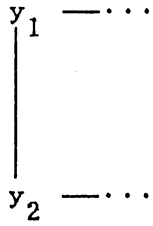
$C': y_0 \sim y_1 \sim y_2 \sim \dots \sim y_{2r+4} \sim y_{2r+5} \sim y_{2r+6} = y_0$
 whose profile of C' with respect to (y_0, y_1) is as follows:

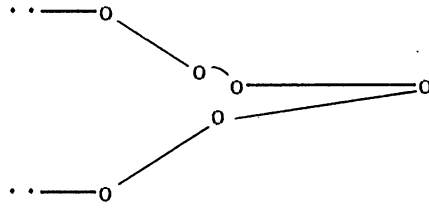
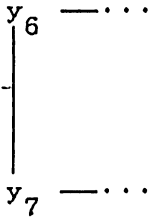


Now we have already seen $D_{r+1}^{r+1} \cup \Gamma_1(y_{r+4}) = M(y_{r+4}) \cup N_0(y_{r+4})$. Thus we can take C' such that $y_{r+5} \in M(y_{r+4})$. That means $y_{r+4} \in M(y_{r+5})$ and $y_{r+4} \neq y_{r+6}$.

Then we can easily check that C' has also no triangle.

Using this fact and Lemma 6 and 7, we can obtain the profile w.r.t (y_t, y_{t+1}) as follows.





Now we have that the profile of C w.r.t (y_6, y_7) is the same as the one w.r.t (y_0, y_1) . Hence the length of this circuit is divisible by 6. So we have $2r+6 \equiv 0 \pmod{6}$. This contradicts the result by the first circuit.

This completes the proof of Theorem 1. □

References

1. E.Bannai and T.Ito, "Algebraic Combinatorics I", Benjamin- Cummings, California, 1984.
2. N.L.Biggs, A.G.Boshier and J.Shawe-Taylor, Cubic distance- regular graph, *J. London Math. Soc. (2)* **33** (1986), 385-394.
3. A.Boshier and K.Nomura, A remark on the intersection arrays of distance-regular graphs. *J. Combin. Theory (B)* **44** (1988) 147-153.
4. A.E.Brouwer, A.M.Cohen and A.Neumaier, "Distance Regular Graphs" Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.

On distance-regular graphs with $k_i = k_j$, II

北海道工業大学 和嶋 雅幸

以下は 大阪教育大学の平木氏、鈴木寛氏との共同研究
で得られた結果です。D.R.G. (distance-regular graph) の
一般論については [1] または [2] に詳しく出ています。

取り早く、最新紙の様子、特に diagram method については
知りたければ、1990年の弘前での研究集会の報告集に
鈴木寛氏による面白い解説があります [3] のことを参考
にして下さい。ここでは [3] の知識を仮定して、話して
いきます。記号、用語などは全て [3] に準じます。

とだけ、記号、用語の復習をしておくことにします。

Γ は D.R.G. とします。 Γ の diameter は $d = d(\Gamma)$ 。
 Γ の valency は $k = k(\Gamma)$ 。 $\alpha, \beta \in \Gamma$ については $\partial(\alpha, \beta)$ で
距離を表わすことにします。 Γ が D.R.G. であるとは、

$\partial(\alpha, \beta) = t$ については $|\Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)| = p_{ij}^t$ が α, β の
選び方には依存しないので t のみに依存していることにします。

特に $p_{i, i-1}^i = c_i$, $p_{i, i}^i = a_i$, $p_{i, i+1}^i = b_i$ とおいて、

$$i(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccccc} * & 1 & c_2 & \dots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} & a_d \\ k & b_1 & b_2 & \dots & b_{d-1} & * \end{array} \right\}$$

Γ の intersection array と 1111 である。

$a_i = 0$ for $\forall i \leq d$ であり、 Γ は bipartite と呼ばれる。また $p_{11}^0 = k$ であり、 $p_{ii}^0 = k_i$ と書ける。

$r = r(\Gamma) = \max \{ i \mid (c_i, a_i, b_i) = (1, a_1, b_1) \}$ と

Ivanov index と呼ばれる。

± 2 $k_i = k_j$ である。D.R.G. に関する [1] p.168 は問題として出ている。限りに [4] のように解答している。

定理: Γ D.R.G. $d = d(\Gamma)$. Suppose $k_e = k_f$ with [4]
 $0 \leq e < f$, $e + f \leq d$ then

$$(1) \quad k_i = k_{d-i} \quad 0 \leq i \leq d, \quad e + f = d$$

or (2) $k_e = k_{e+1} = \dots = k_f$

(iii) (1) は $k_d = 1$ と同値である。

[3] にはこの定理の (2) が成り立つのかどうかという予想が述べられている。この予想を $A(e)$ としよう。

$$A(e) : \Gamma \text{ D.R.G. } d = d(\Gamma), \quad k = k(\Gamma) > 2$$

$$\text{If } k_e = k_f, \quad 0 \leq e < f, \quad e + f \leq d,$$

$$\text{then } k_d = 1$$

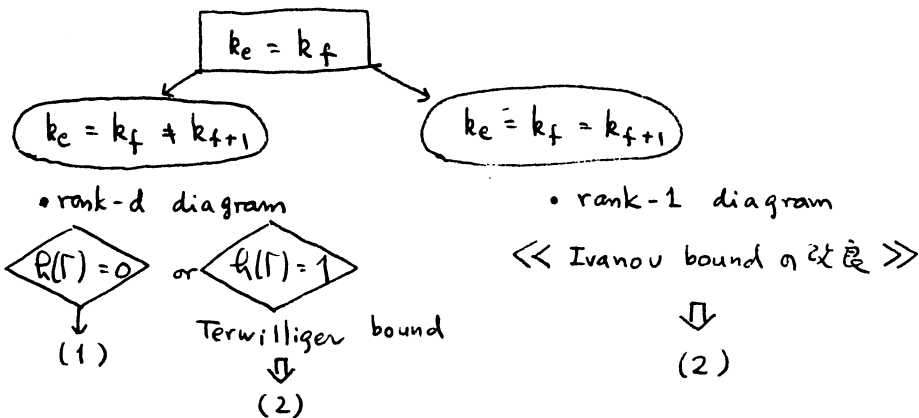
[1] Lemma 5.1.2 により $A(1)$ は真である。我々の主定理は $A(2)$ が成立することを、次のように述べられる。

主定理: Γ : D.R.G. $d=d(\Gamma)$, $k=k(\Gamma) > 2$
 [5]

If $k_e = k_f$, $0 \leq e < f$, $e+f \leq d$

then (1) $k_d = 1$ or (2) $d \leq 3e - 2$.

特に $3 \leq e$ と仮定可。証明の流れは次の様になり可。



以下、証明の骨子のみを意味、 $2 \leq e \leq f$ かつ $d=5$ とし、この概略を述べます。上の図で、(1)とは、

[3] に定義があります。rank-d diagram の高 $h = k$ と

$$R(\Gamma) = 0 \text{ ならば } D_d^0 - D_{d-1}^1 - \dots - D_1^{d-1} - D_0^d \text{ であり}$$

これは $k_d = 1$ ならば $k_i = k_{d-i}$ $0 \leq i \leq d$ と同値。

$$R(\Gamma) = 1 \text{ ならば } \begin{array}{ccccccc} & & D_d^1 & \text{---} & D_{d-1}^2 & \text{---} & \dots & \text{---} & D_1^d \\ & / & & \backslash & / & & \backslash & & / \\ D_d^0 & \text{---} & D_{d-1}^1 & \text{---} & \dots & \text{---} & D_1^{d-1} & \text{---} & D_0^d \end{array}$$

であり、 $k_d = d + 1$ と同値になります。

準備 ① $R(\Gamma) = 1$ ならば (1) 4.2.D. (2) III-4.)

Γ が $d(\Gamma) = 1$ ($a_d \neq 0$) という条件をみたす。

Γ の点に新しい距離 \bar{d} を $\bar{d}(x, y) = 1 \iff d(x, y) = d$ として定めると、 Γ は D.R.G. に成る。これを Δ で表わすことにする。 $d(\Delta) = d(\Gamma)$ として Γ と Δ の距離の

対応は右の如き

Γ	0	1	2	...	j	...	$d-j$...	$d-1$	d
Δ	0	2	4	...	$2j$...	$2j+1$...	3	1

 列する。

これを Δ の parameters を $\bar{c}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$ で表わす。

$$i(\Delta) = \left\{ \begin{array}{cccccc} * & 1 & \bar{c}_2 & \dots & \bar{c}_{d-1} & \bar{c}_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_d \\ \bar{k} & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_{d-1} & * \end{array} \right\}. \quad (\bar{k} = a_d + 1)$$

更に Δ から $\tilde{\Gamma}$ という bipartite graph $d(\tilde{\Gamma}) = 2d + 1$ を作ることにする。

$$i(\tilde{\Gamma}) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} * & 1 & \bar{c}_2 & \dots & \bar{c}_{d-1} & \bar{c}_d & \bar{a}_d & \bar{b}_{d-1} & \dots & \bar{b}_2 & \bar{b}_1 & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \bar{k} & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_{d-1} & \bar{a}_d & \bar{c}_d & \bar{c}_{d-1} & \dots & \bar{c}_2 & 1 & * \end{array} \right\}$$

③ ($\bar{c}_d \leq \bar{a}_d \leq \bar{b}_{d-1}$ が成り立つ。)

特に $\tilde{\Gamma}$ の parameters を $\tilde{c}_i, \tilde{a}_i, \tilde{b}_i$ ($0 \leq i \leq 2d+1$)

で表わすと Γ と $\tilde{\Gamma}$ の parameters の関係は

$$c_i = \frac{\tilde{c}_{2i-1} - \tilde{c}_{2i}}{\tilde{c}_2}, \quad b_i = \frac{\tilde{b}_{2i} - \tilde{b}_{2i+1}}{\tilde{c}_2} \quad (0 \leq i \leq d)$$

が成り立つ。

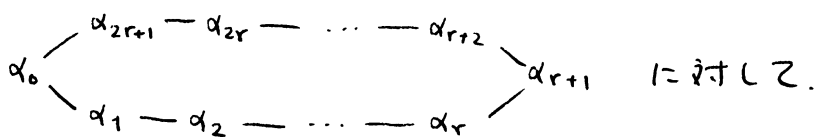
準備 ③ Terwilliger bound \Rightarrow 112. ([1] 5.25(3b))

$\Gamma \in$ bipartite D.R.G. とし, $d = d(\Gamma)$, $r = r(\Gamma)$ とおくと,
Terwilliger の結果は次の δ_j により表す.

$$c_j > c_{j-r} \quad \text{for } r \leq j \leq d.$$

この簡単な証明を与えよう。その記号を準備しよう。

長さ $2(r+1)$ の cycle を fix しよう。



$$(j_0, j_1, \dots, j_r, j_{r+1}) := \bigcap_{t=0}^{r+1} \Gamma_{j_t}(\alpha_t)$$

$$\begin{pmatrix} j_{2r+1} & j_{2r} & \dots & j_{r+2} \\ j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_r & j_{r+1} \end{pmatrix} := \bigcap_{t=0}^{2r+1} \Gamma_{j_t}(\alpha_t) \quad \text{としよう.}$$

証明 $j=r$ ならば $j=d$ のときは自明. $r < j < d$
とすると.

$$\Gamma_j(\alpha_1) \cap \Gamma_{j-r}(\alpha_{r+1}) \supseteq (j+1, j, \dots, j-r) \cup (j-1, j, \dots, j-r)$$

$$\text{と } \exists z: (j+1, j, \dots, j-r) = \Gamma_{j+1}(\alpha_0) \cap \Gamma_{j-r}(\alpha_{r+1}).$$

$$\exists T: (j-1, j, j-1, \dots, j-r) \supseteq \begin{pmatrix} j-2, j-3, \dots, j-r-1 \\ j-1 & j, j-1, \dots, j-r+1 & j-r \end{pmatrix}$$

$$\text{右辺は } \Gamma_j(\alpha_1) \cap \Gamma_{j-r-1}(\alpha_{r+2}) \text{ に等しい.}$$

$$\therefore \Gamma_j(\alpha_1) \cap \Gamma_{j-r}(\alpha_{r+1}) \supseteq \left(\Gamma_{j+1}(\alpha_0) \cap \Gamma_{j-r}(\alpha_{r+1}) \right) \cup \left(\Gamma_j(\alpha_1) \cap \Gamma_{j-r-1}(\alpha_{r+2}) \right)$$

$$= \text{しり). } p_{jj-r}^r \geq p_{j+1j-r}^{r+1} + p_{jj-r-1}^{r+1} .$$

と $n=3$ の [1] P134 の公式から.

$$p_{jj-r}^r = \frac{k_j c_j}{k_{r+1} c_{r+1}} \frac{c_{j-r+1} \cdots c_{j-1}}{c_r \cdots c_1} b_r$$

$$p_{j+1j-r}^{r+1} = \frac{k_j c_j}{k_{r+1} c_{r+1}} \frac{c_{j-r+1} \cdots c_{j-1}}{c_r \cdots c_1} b_j$$

$$p_{jj-r-1}^{r+1} = \frac{k_j c_j}{k_{r+1} c_{r+1}} \frac{c_{j-r+1} \cdots c_{j-1}}{c_r \cdots c_1} c_{j-r}$$

より). $b_r \geq b_j + c_{j-r}$ 従って $b_r = k-1$, $a_i = 0$ $\forall i$

を使うと $c_j \neq c_{j-r}$ が出てきます。

準備③ 二れから証明する = と. ($d=5$)

$$\Gamma : D.R.G., \quad d(\Gamma) = 5. \quad k_2 = k_3 \implies k=2 \text{ or } k_d=1$$

先程も述べましたが. ① $k_2 = k_3 \neq k_4$ ② $k_2 = k_3 = k_4$ の
 二つの場合に分かります. ①の場合には

$$k_3 = \frac{b_2}{c_3} k_2 \text{ より } b_2 = c_3 = m \text{ として } i(\Gamma) \text{ は}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} * & 1 & c_2 & m & c_4 & c_5 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ k & b_1 & m & b_3 & b_4 & * \end{array} \right\} \text{ とおけます.}$$

と $k_3 \neq k_4$ 時のように ① $m > b_3$ であるか ② $m = b_3, m < c_4$

のどちらかです. 次節では ② ならば $\ell(\Gamma) \leq 1$ を示します.

① ならば $\ell(\Gamma) = 0$ を似たようにして示せるので省略します.

① 0 场合.

Rank-d diagram. of Γ . (with $b_2 = b_3 = c_3 = m < c_4$)

$$\{x\} = D_5^0 \quad \forall x \in D_3^2 \quad 1 = 2 \cup 1 \cup 2.$$

$$m = c_3 = e(x, D_2^3) = |\Gamma(x) \cap D_2^3|$$

$$m = b_2 = e(x, D_2^3) + e(x, D_3^3) + e(x, D_4^3)$$

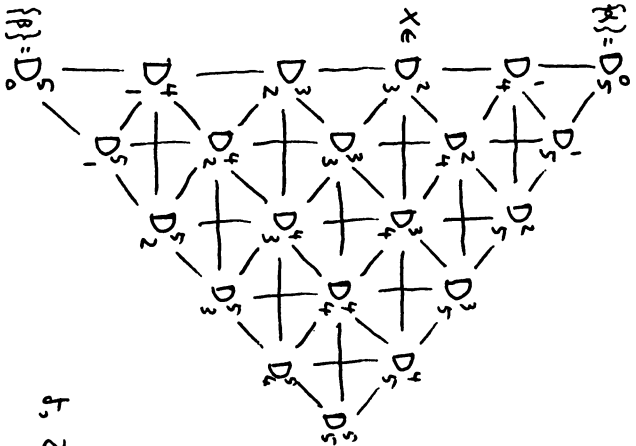
$$\therefore e(x, D_3^3) = e(x, D_4^3) = 0$$

$$\forall x, z. e(D_3^2, D_3^3) = e(D_2^2, D_4^3) = 0$$

$\forall y \in D_2^3 \quad 1 = 2 \cup 1 \cup 2$ 同様の議論で.

$$e(D_2^3, D_3^3) = e(D_2^3, D_3^4) = 0.$$

$t, z. \Rightarrow 2$ の diagram と Γ の δ .



$$\forall x \in D_3^3 \quad 1 = 2 \cup 1 \cup 2.$$

$$m = b_3 = e(x, D_4^2) + e(x, D_3^3) + e(x, D_4^3)$$

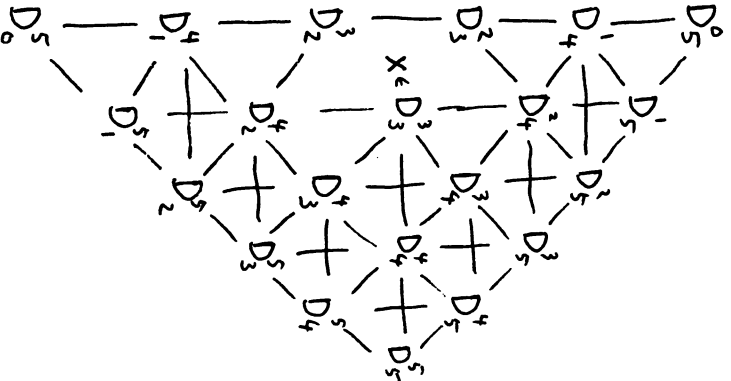
$$m = c_3 = e(x, D_4^2)$$

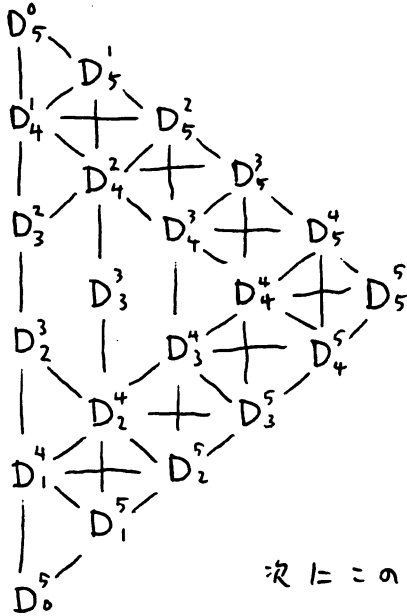
$$\therefore e(x, D_4^2) = e(x, D_4^3) = 0$$

$$\therefore e(D_3^3, D_4^3) = e(D_3^3, D_4^4) = 0$$

同 $\forall s \cup 1 = 2$

$$e(D_3^3, D_3^4) = 0$$





次に $D_4^3 = D_3^4 = \phi$ と仮定する。

$D_4^3 \neq \phi$ だとすると

$$x \in D_4^3 \text{ かつ } 112.$$

$$m = b_3 = e(x, D_3^4) + e(x, D_4^5) + e(x, D_5^6)$$

と3か

$$m < c_4 = e(x, D_3^4) \text{ となり矛盾.}$$

同様にして $D_3^4 = \phi$

次にこの diagram から D_4^3, D_3^4 を消した

状態で $D_4^3 = \phi$ があると仮定する。

$x \in D_4^3$ だとすると

$$m \geq b_4 = e(x, D_3^5) + e(x, D_4^6) + e(x, D_5^7)$$

と3か。 $m < c_4 = e(x, D_3^5)$

したがって $D_4^3 = \phi$ だと仮定して

矛盾が生じる。よって

左の diagram が正しい。

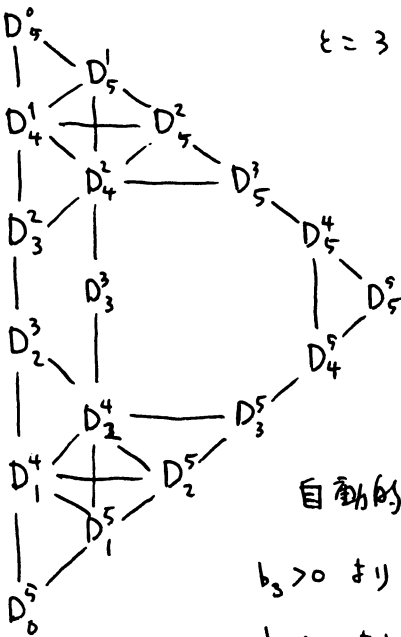
上と同様の議論で

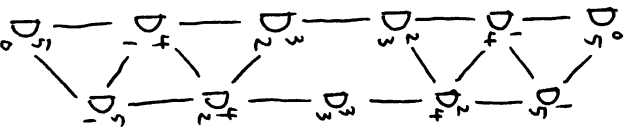
今度は $D_5^4 = D_4^5 = \phi$ が112。

自動的に $D_5^4 = \phi$ と仮定する。

$$b_3 > 0 \text{ あり } D_3^5 = D_5^6 = \phi.$$

$$b_2 > 0 \text{ あり } D_2^6 = D_5^7 = \phi \text{ と仮定する.}$$





以上を ε と δ と ζ を左の様にして $R(\Gamma) \leq 1$ となる

diagram が得られる。 $R(\Gamma) = 0$ となる

OK. 7.9.2. $R(\Gamma) = 1$ と仮定する。準備 ①

から $\Delta \varepsilon \rightarrow \zeta$ と。 $k_2(\Gamma) = k_3(\Gamma)$ から

$k_4(\Delta) = k_5(\Delta) = 7\zeta, 2113 = \zeta$ が成り立つ。

$$i(\Delta) = \begin{Bmatrix} * & 1 & c_2 & c_3 & c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ \zeta c & \zeta c - 1 & b_2 & b_3 & c & * & \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \bar{b}_4 = \bar{c}_5 = c \\ \varepsilon \text{ が成り立つ} \end{array} \right)$$

更に Γ を作る。

$$i(\Gamma) = \begin{Bmatrix} * & 1 & c_2 & c_3 & c & c & c & c & b_3 & b_2 & \zeta c - 1 & \zeta c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta c & \zeta c - 1 & b_2 & b_3 & c & c & c & c & c_3 & c_2 & 1 & * \end{Bmatrix}$$

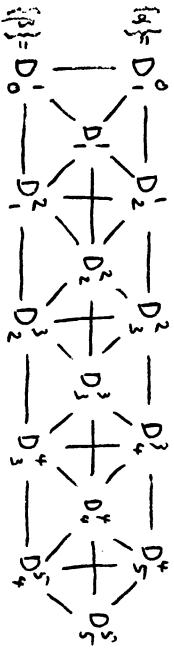
準備 ② a Terwilliger bound を使う。 $C = 1$ が成り立つ。

準備 ① a parameters の計算が成り立つ。 $b_0 = k = 2 \leq 7(1)$ である。

④ a 場合。 ($k_2 = k_3 = k_4$) rank-1 diagram を考える。

$$i(\Gamma) = \begin{Bmatrix} * & 1 & c_2 & m & m & c_5 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ k & b_1 & m & m & b_4 & * \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} (*) \quad k_4 = \frac{b_3}{c_4} k_3 = \frac{b_3 b_2}{c_4 c_3} k_2 \\ (**) \quad b_3 = c_4, \quad b_2 = c_3, \quad b_1 = c_4 \end{array} \right)$$

= 4.8.1) rank-1 diagram として



$$\varepsilon = 3 \zeta, \quad \forall x \in D_3^2 \quad 1 = 7112 \quad b_2 = e(x, D_4^3) + e(x, D_3^3) + e(x, D_2^3)$$

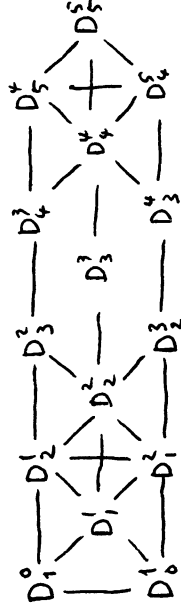
存在 $b_3 = e(x, D_4^3)$, $b_2 = b_3 = m$ であることから.

$$e(D_3^2, D_3^3) = e(D_3^2, D_2^3) = 0, \text{ 同様に } e(D_2^3, D_3^3) = 0.$$

$\forall y \in D_4^3 \text{ ならば } m = c_4 = e(y, D_3^2) + e(y, D_3^3) + e(y, D_3^4) = 0$

したがって $m = c_3 = e(y, D_3^2) = 0$; $e(D_4^3, D_3^3) = e(D_4^3, D_3^4) = 0$

同様に $c_2 = 0$, $e(D_3^4, D_3^3) = 0$, $c_1 = 0$ となる.

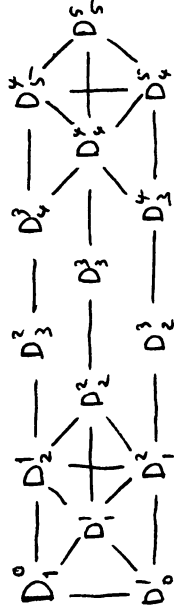


$$c_2 < m$$

と仮定してもよいことを示します。

$c_2 = m$ だとすると、上と同様の議論で $e(D_2^1, D_2^3) = 0$

$e(D_2^2, D_2^3) = 0$ であることを示す。



claim(1) $e(D_1^1, D_2^2) = 0$, $e(D_1^2, D_2^2) = 0$.

また、 $x \in D_1^1$, $y \in D_2^2$ として $a(x, y) = 1$ だとすると.

$\exists z \in \Gamma_1(y) \cap D_3^3$ であるから、 $(b_2 > 0)$ より存在し得る

$T = (D_2^3 \cup D_0^1) \cap \Gamma_1(x)$ とおきます。diagram E

が成り立ち $T \subseteq \Gamma_3(z)$ がわかります。

$T \subseteq \Gamma_1(x) \cap \Gamma_3(z)$ であるから、 $e(x, D_2^3) + e(x, D_0^1) \leq \rho_{1,3}^2$

であるから $b_2 + 1 \leq b_2$ である。同様に $e(D_2^1, D_2^2) = 0$.

claim (2). $e(D_2^1, D_1^2) = 0$

もし、 $x \in D_1^2, y \in D_2^1$ なら $\partial(x, y) = 1$ である。

$\exists z \in D_3^2 \cap \Gamma_1(y)$ ならば $T = (D_2^3 \cup D_0^1) \cap \Gamma_1(x)$ と

おくと、diagram から $T \subseteq \Gamma_3(z)$ 。claim (1) と

同様に $b_2 + 1 \leq b_2$ なる矛盾を得る。

よって、こうや、2 出来た diagram は $b_1 = b_2$ を

示していい。 $C_2 = C_3$ と合わせると $k_1 = k_2$ になり、2

[1] Lemma 5.1.2. (1) より、 $k_1 = 2$ ならば $k_5 = 1$ である。

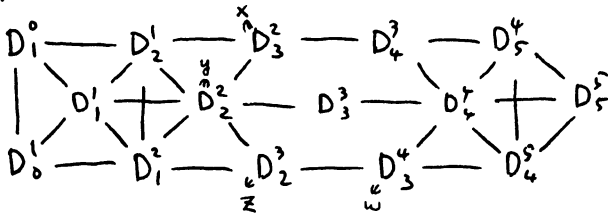
従って、 $C_2 < m$ と仮定して良いことになる。

(註) $\alpha, \beta \in \Gamma$ ならば $\partial(\alpha, \beta) = 1$

と fix (2). $D_j^i = \Gamma_i(\alpha) \cap \Gamma_j(\beta)$ により考えた記号だが、

これは α, β の選ぶ方向にはよらぬにできる。これは、

P_{ij}^k が α, β に依存せずに一定であることが理由です。



また $e(D_3^2, D_2^2) > 0$ であるので、 $\exists x \in D_3^2, \exists y \in D_2^2$ $\partial(x, y) = 1$ 。

$b_2 = e(y, D_3^2) + e(y, D_2^3) = e(y, D_2^2) + e(y, D_3^2)$ なるので、 $\exists z \in D_2^3$

$\partial(y, z) = 1$ 。更に $\exists w \in D_3^4 \cap \Gamma_1(z)$ がある。

claim (3) $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(w) \subseteq D_2^2$ 。

もし claim(3) が "正しければ", $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(w) \subseteq \Gamma_1(x) \cap D_2^3$
 ならば $C_3 = P_{1,2}^3 \subseteq e(x, D_2^3) = C_3 - C_2$ である。

claim(3) の証明. rank-1 diagram から.

$\Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(w) \subseteq D_2^2 \cup D_4^3$ であることがわかります。

そこで $u \in \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(w) \cap D_4^3$ とし、今度は
 u, x を基点にして rank-1 diagram を考えられます。
 つまり $D_j^i(u, x) = \Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(x)$ とする訳です。

とすると、 $z \in \Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(x) = D_2^3(u, x)$ として

$w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_3(x) = D_3^2(u, x)$ として、 $e(D_3^2, D_2^3) = 0$

なので、これは $d(z, w) = 1$ に及ぶ。 \square

このようにして $d=5$ の場合の証明は完了します。

さて、 $k_i = k_j$ の問題は、 $k=2$ か $k_d=1$ を示すだけで済む
 からそれ自体には意味のあるものを含んでいないように
 見えますが、証明を返すとなると、(定理の(2)の
 ように) diameter の bound がどうして必要になるか
 ます。 Ivanov bound は diameter を bound するもの
 だし、Terwilliger bound も実は diameter を bound する
 目的で考えられたものです。従って、A(e)-予想を解決
 するには、diameter についての十分良い結果が必要に
 なると思われる。

が11ぶん位の2者11たので読みづらかったと思11ますが、既に予定の枚数をだ11ぶん前にオーバ11して11るので、問題を少し者11て終わりにします。

$$\boxed{1} \quad d=7. \quad k_3 = k_f \quad 3 < f, \quad 3+f \leq 7 \quad \text{た} > 11 \text{ 2.}$$

$$k_3 = k_4 + k_5 \quad \text{ら} \text{ら} \quad h(11) \leq 1 \quad \text{で} \text{あり.}$$

$$k_3 = k_4 = k_5 + k_6 \quad \text{ら} \text{ら} \quad h(11) \leq 3 \quad \text{か} \text{わ} \text{か} \text{り} \text{ま} \text{す.}$$

しかし、 $h(11) = 1$ だ11と11211。Terwilliger bound から11は消11た11 array が11残11り11ます。 $h(11) \geq 2$ 11ら11と11言11わ11は1111のか、わ11かり11ま11せん。消11た11 array は11次の11列11り。

$$i(11) = \begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 12 & 9 & 9 & 4 & 4 & 1 & 1 & * \end{Bmatrix} \Rightarrow i(A) = \begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & * \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{2} \quad i(\tilde{11}) = \begin{Bmatrix} * & 1 & \dots & 1 & c & \dots & c & 2c-1 & \dots & 2c-1 & 2c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2c & 2c-1 & \dots & 2c-1 & c & \dots & c & 1 & \dots & 1 & * \end{Bmatrix} \quad ? \Rightarrow c=1$$

← 同11数 →

一般11に11の1111た11こ11と11が11言11わ11は11 $h(11) = 1$ の11場合11は11解決11に非常11に11近11く1111り11ます。

[参考文献]

- [1] Brouwer, Cohen, Neumaier "Distance-Regular Graphs".
- [2] Bannai, Ito "Algebraic Combinatorics I"
- [3] 代数的組合せ論 報告集 1990年. 34期大学
- [4] On distance-regular graphs with $k_i = k_j$, Suzuki, H.
- [5] On distance-regular graphs with $k_i = k_j$, II. Hiraki, Suzuki, Wajima.

Bounding the Diameter of a Distance Regular Graph by a Function of k_d

大阪教育大学 数理科学 鈴木 寛

主定理 (1990.12, 1991.7)

Let Γ be a distance regular graph of diameter d ,
valency $k > 2$. Suppose $a_d \neq 0$.

Then $|\Gamma|$ is bounded by a function of $k_d = |\Gamma_d(\alpha)|$.

In particular, for a given graph Δ (\neq coclique)
there exist at most finitely many distance regular graphs
 Γ with $k > 2$, with $\Gamma_d(\alpha) \cong \Delta$ for some vertex $\alpha \in \Gamma$.

今回は. 上記の定理の解説. 坂内-伊藤予想との関連.
さらに. 定理の証明に用いられた技法の解説をする. 上
記の定理において. $\partial(\alpha, \beta)$ を α と β の 距離 とすると.

$\Gamma_d(\alpha) = \{ \beta \in \Gamma \mid \partial(\alpha, \beta) = d \}$ a_d は $\Gamma_d(\alpha)$ 内
の valency $|\Gamma_1(\beta) \cap \Gamma_d(\alpha)|$ $\partial(\alpha, \beta) = d$ である.

これと似た型のものに次の有名な定理がある。

THEOREM (Brauer-Fowler, 1955)

Let G be a finite simple group.

Suppose G has an involution t .

Then $|G|$ is bounded by a function of $|C_G(t)|$.

In particular, for a given finite group H , there exist at most finitely many simple groups G with an involution t satisfying $C_G(t) \simeq H$.

これに引き続いておこる有限単純群の分類が、位数 2 の元の中心化群の構造に着目して進んでいったことを考えれば、この定理の重要性は否定しようがないであろう。

Distance Regular Graph に於ては今のところ何に着目すべきか結論は出ていない。主定理に関連し次の予想がある。

予想 (坂内-伊藤)

Let Γ be a distance regular graph of diameter d and valency $k > 2$.

Then d is bounded by a function of k .

Γ を $a_d \neq 0$ である DRG (= distance regular graph) とする. ($p_{ij}^i = |\Gamma_j(\alpha) \cap \Gamma_l(\beta)|$ $\partial(\alpha, \beta) = i$)

一点を固定し. 三辺が, $1, d, d$ の長さの三角形の数を数えることにより $k_1 p_{dd}^1 = k_d p_{dd}^d$. ここで $p_{dd}^d = a_d \neq 0$ だから.

$$k = k_1 \leq k_1 p_{dd}^1 = k_d a_d \leq k_d (k_d - 1). \quad (1)$$

(最後の不等号は. 位数 k_d の $\Gamma_d(\alpha)$ が a_d -正則つまり各点から a_d 本辺が出ていることによる).

従って. valency k は k_d の関数でおさえられる. すなわち. 坂内-伊藤の予想が肯定的に解決されれば. 主定理は. その系として得られることになる.

(1)式のもう一つの結論は. $|\Gamma|$ が. diameter d と valency k によておさえられる ($|\Gamma| \leq k^d$) ことから. 主定理の後半は. 主定理の前半からの単純な帰結であるということである.

さて. それでは主定理は. 坂内-伊藤予想の一部分としてとらえるのみであるのか.

Brauer-Fowler 型の定理として見ると. 坂内-伊藤予想は. $\Gamma_1(\alpha)$ の構造に注目する重要性を強調し. 主定理は. $\Gamma_d(\alpha)$ の構造に注目する重要性を強調している.

LOCAL CHARACTERIZATION

For a given $\Delta = \Gamma_1(\alpha)$, characterize Γ !!

ANTIPODAL CHARACTERIZATION

For a given $\Delta = \Gamma_d(\alpha)$, characterize Γ !!

さて. 一つ例を見てみる. $\Gamma = H(d, g)$ (ハミンググラフ)
とすると. $\Gamma_1(\alpha) \simeq d \cdot K_{g-1}$. (位数が $g-1$ の完全グラフの d 個の disjoint union) $\Gamma_d(\alpha) \simeq H(d, g-1)$.
この例では. 明らかに. $\Gamma_d(\alpha)$ の方が. Γ の構造をより強くあらわしているのがわかるであろう. 知られた DRG において. 約半数のクラスで $\Gamma_d(\alpha)$ は DRG になっており primitive な DRG においては. 数少ない有限個の例外を除いて $\Gamma_d(\alpha)$ は rich な構造を持っている.

次のような問題が考えられる。

Question.

Suppose Γ is a DRG with $\Gamma_d(\alpha) \simeq H(m, g)$.

Then $\Gamma \simeq H(d, g+1)$?

Antipodal Characterization の現状については又の機会に話させていただくことにするが、出発点ともなる上の質問にも完全な解答はまだ得られていない。

上の問題に限り、現在の困難を二つあげると、

(1). $m > 2$ の時、 $\Gamma_d(\alpha)$ 内の距離と Γ 内の距離が同じであることを言えるか、

(2) $d = m$ をどのようにして示すか、

($\Gamma_d(\alpha)$ 中の diameter と Γ の diameter がすれていたり、又、 $\Gamma_d(\alpha)$ 内の距離と、 Γ 内の距離がすれていいる例もたくさん存在することを注意しておく、又上の質問は rough に書いたもので実際には、Doob 7778 あらわれる (-部))

上の $H(m, q)$ の場合も含め、 $\Gamma_d(\alpha)$ が、知られた DRG Γ についての $\Gamma_d(\alpha)$ と同型となるとき Γ を characterize せよという Antipodal Characterization を、位数 2 の元の中心化群による単純群の特徴付け同様、たくさん優秀な人材に attack していただきたいと願っている。

以下. 主定理の証明の概略を記す.

$$l(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccccc} * & c_1 & \cdots & c_i & \cdots & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ \mathbb{R} & b_1 & \cdots & b_i & \cdots & b_{d-1} & * \end{array} \right\}$$

を intersection array といい $(c_i = p_{i-1}^i, a_i = p_{i,i}, b_i = p_{i+1}^i)$

$$l(c, a, b) = \#\{i \mid (c, a, b) = (c_i, a_i, b_i)\}$$

$$r(\Gamma) = l(c_1, a_1, b_1) \quad \text{とする.}$$

Prop 1. (A.A. Ivanov 1983)

If $r = r(\Gamma)$, then $d \leq 2^{2^{\mathbb{R}} - 4} (r+1)$.

式(1)により. Prop 1 を用いれば. 主定理の証明には. \mathbb{R}_d の関数で r を bound すればよいことがわかる.

Prop 2 (1990.12)

If $r(\Gamma) \geq 2(\mathbb{R}_d - 1)$, then every connected component of $\Gamma_d(\alpha)$ is a clique. Moreover $b_1 = c_{d-1}$.

DEF. A DRG of diameter d is called thin if every connected component of $\Gamma_d(\alpha)$ is a clique for $\forall \alpha \in \Gamma$,

and extra thin if $b_1 = c_{d-1}$.

Prop 2 により. 主定理を示すには. extra thin の場合
だけ考えればいいことがわかる. Prop 2 の証明は短く.
組合せ論的方法のみによる. DEF から extra thin
が thin であるか 明らかではないが. 次の命題は. そ
の事と共に. $a_d \neq 0$ なる extra thin は valency も
特殊な形をし. parameter に強い制限を与えることを示す.

Prop 3. (with A. Hiraki 1991. 1)

Let Γ be a distance regular graph with diameter d
and valency k . Suppose

$$b_1 = c_{d-1}, b_2 = c_{d-2}, \dots, b_i = c_{d-i}, \quad i \geq 1.$$

Then Γ is thin and the following hold.

(1) $b_{d-1} = c_1, b_{d-2} = c_2, \dots, b_{d-i} = c_i.$

(2) If $a = a_d \neq 0$, then $k = a(a+1).$

$$b_1 = \dots = b_i = a^2 \quad \text{and} \quad 1 = c_1 = \dots = c_i = c_{i+1}$$

問題 Classify all primitive extra thin DRGs
(with $a_d \neq 0$). [実は一つも知られていない]

ここで $h_1(\Gamma)$ を次のように決める。

$$h_1(\Gamma) = \begin{cases} d+1 & \text{if } p_{i,d}^d = 0 \quad \forall i \geq 2 \\ \min\{i \mid p_{i,d}^d \neq 0, i \geq 2\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Prop 4. Let Γ be a DRG of diameter d with $a_d \neq 0$.

If $r(\Gamma) \geq 2(k_d - 1)$ with $k \geq 2$, then Γ is extra thin and $h_1(\Gamma) \geq k + 1$.

Prop 4 は Prop 2 の精密化であるが、 $r(\Gamma)$ を bound するには $h_1(\Gamma)$ を bound すればよいことを主張している。次の定理はさらに、 $d - h_1(\Gamma)$ は k_d の関数であることがえられることを主張している。Thm 5 は valency 5 の DRG 分類を目ざしている平本がその中で用いたアイディアを一般化したものである。

Thm 5. Let Γ be a DRG of diameter d with $a_d \neq 0$. Then $d - h_1(\Gamma)$ is bounded by a function of k_d .

More precisely, if $h_1 = h_1(\Gamma)$

$$k_d > p_{h_1,d}^d \geq \begin{cases} \frac{k-2}{(k-1)^3} \left(\frac{k-1}{k-2} \right)^{d-h_1} & \text{if } d < \lceil 3h_1/2 \rceil \\ \frac{k-2}{(k-3)^3} \left(\frac{k-1}{k-2} \right)^{\lceil h_1/2 \rceil} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

次の定理は extra thin DRG の構造に踏み込んだものである。下記の bipartite graph を考えることは一般的手法であるが、筆者は個人的に、東京医科歯科大の野村氏に教えていただいた。ここに謝す。

Thm 6. Let Γ be an extra thin DRG of diameter d with $a_d \neq 0$. Let Δ be the set of maximal cliques.

We define a bipartite graph $\tilde{\Gamma}$ on $\Gamma \cup \Delta$ as follows.

$$\alpha \sim x \iff \alpha \in x, \quad \alpha \in \Gamma, x \in \Delta.$$

Then the diameter of $\tilde{\Gamma}$ is $\tilde{d} = 2d+1$ and valency $\tilde{k} = a_d + 1$.

Moreover, if $\tilde{\omega}(u, v) = i \leq h_1 = h_1(\Gamma)$, $u, v \in \tilde{\Gamma}$

$$\tilde{c}_i = |\tilde{\Gamma}_{i-1}(u) \cap \tilde{\Gamma}_1(v)|, \quad \tilde{b}_i = |\tilde{\Gamma}_{i+1}(u) \cap \tilde{\Gamma}_1(v)|$$

do not depend on the choice of $u, v \in \tilde{\Gamma}$ and

$$1 \leq \tilde{c}_1 \leq \dots \leq \tilde{c}_{h_1}, \quad \tilde{b}_0 > \tilde{b}_1 \geq \dots \geq \tilde{b}_{h_1}.$$

$$\text{If } 2j \leq h_1, \quad c_j = \tilde{c}_{2j-1} \tilde{c}_{2j}, \quad c_{d-j+1} = \tilde{b}_{2j-1} \tilde{b}_{2j}$$

$$\text{If } 2j+1 \leq h_1, \quad b_{d-j} = \tilde{c}_{2j} \tilde{c}_{2j+1}, \quad b_j = \tilde{b}_{2j} \tilde{b}_{2j+1}.$$

これからわかるように、例之は $c_j = c_{j+1}$ $2(j+1) \leq h_1$ の時は c_j は平方数となる。この事は、先の平木氏和嶋氏との共同研究を通して気付いた事だが、これより。

坂内-伊藤の eigenvalue technique を適用する鍵となる
次の系を得る。

Cor. 7. Let Γ be an extra thin distance regular graph
of diameter d with $a_d \neq 0$, $k_1 = k_1(\Gamma)$. For every j
with $2j+3 \leq k_1$ or $2(d-j+3) \leq k_1$ satisfying
 $l(c_i, a_i, b_i) \geq 2$, we have

$$(a_i - 2\sqrt{b_i}, a_i + 2\sqrt{b_i}) \subset (a_j - 2\sqrt{b_j}, a_j + 2\sqrt{b_j})$$

ここで (x, y) は 開区間をあらわす。特に.

$$S(\Gamma) = \#\{i \mid (a_i - 2\sqrt{b_i}, a_i + 2\sqrt{b_i}) \not\subset (a_j - 2\sqrt{b_j}, a_j + 2\sqrt{b_j})\}$$

$$\leq d - k_1 + 2k + 2.$$

Thm 8. Let Γ be a DRG of diameter d , valency k .
If $b_1 \geq (a_{1+1})^2$ then the diameter d is bounded by a
function f depending only on k and s , i.e.,

$$d < f(k, s), \quad \text{where } s = s(\Gamma).$$

Cor 7 まで $s(\Gamma)$ は k, d の関数であらわされていることが
わかるので、Thm 8 より主定理の結論を得る。

*Hadamard Matrices, PBIBDs,
and Amorphous Association Schemes
over an Extension Ring of $Z/4Z$*

Mieko Yamada
Department of Mathematics
Kyushu University
Fukuoka 812, Japan

1 Introduction.

Partially balanced incomplete block designs, PBIBDs, are designs for which the property of balance of BIBD is relaxed. They are based on an association scheme. We introduce the concept of generalized relative difference sets and obtain a PBIBD from these difference sets translating by cyclic automorphisms. On the other hand, amorphous association schemes were introduced by Golfand and Klin[5].

We choose extension rings of $Z/4Z$. Certain amorphous association schemes over these rings were classified[6]. There also exist Hadamard matrices, distance regular digraphs of girth 4 over these rings[9, 11, 13]. In this paper, we recall these results, then give a necessary and sufficient condition for the existence of generalized relative difference sets with amorphous association schemes, which give rise to PBIBDs.

2 Generalized Relative Difference Sets and PBIBDs.

We give the definition of generalized relative difference sets extending the concept of relative difference sets introduced by Butson[3].

Definition. Let G be an additive abelian group of order

v and D be a subset of G containing k elements. Let H_1, H_2, \dots, H_t be subsets of G such that

$$G = \{0\} \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_t, \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ for } i \neq j.$$

If for $d \neq 0, d \in G$, the number of pairs (r, s) such that $d = r - s, r, s \in D$ has fixed values

$$\begin{cases} \lambda_1 & \text{when } d \in H_1, \\ \lambda_2 & \text{when } d \in H_2, \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_t & \text{when } d \in H_t, \end{cases}$$

then $D = R[k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t; v]$ is called a *generalized relative difference set*.

Partially balance incomplete block designs were introduced by Bose and Nair[2] in 1939. They are designs for which property of balance of a BIBD is relaxed and based on an association scheme. For the definition of association schemes, see [1].

Definition. Let X be a v -set and B_1, \dots, B_b be subsets of X with k elements which are called blocks. Assume that there exists an association scheme of class t on X . If B_1, \dots, B_b satisfy

- (i) each element of X occurs in exactly r blocks,
- (ii) A pair (x, y) occurs in λ_i blocks if $(x, y) \in R_i$.

Then $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$ is called a *partially balanced incomplete block design* and is abbreviated to a PBIBD. Denote this by $PB[k, \lambda_1, \dots, \lambda_t; v]$.

There are relations between parameters of a PBIBD.

Lemma 1. (i) $vr = bk$,

$$(ii) \sum_{i=1}^t k_i \lambda_i = r(k-1),$$

where k_i is the number of element $y \in X$ such that

$(x, y) \in R_i$ for fixed $x \in X$. We call k_i the *valency* of R_i .

Theorem 2. Assume that there exists a $PB[k, \lambda_1, \dots, \lambda_t; \nu]$ over an additive abelian group and $\nu = b$. Moreover assume that every block B_l is a translate $B_1 = \{a_1, \dots, a_k\}$, that is

$$B_l = B_1 + c = \{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_k + c\}, \quad c \in X.$$

Then B_1 is a $R[k, \lambda_1, \dots, \lambda_t; \nu]$.

Theorem 3. Let $D = R[k, \lambda_1, \dots, \lambda_t; \nu]$ and $X = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq t})$ be an association scheme over an additive abelian group. Assume that a pair (a, b) belongs to a relation R_i when $d = a - b \in H_i$, $0 \leq i \leq t$. Then D and translate of D , $D_l = D + c$, $c \in X$, becomes $PB[k, \lambda_1, \dots, \lambda_t; \nu]$.

We call this *generalized relative difference set associated with an association scheme X* .

3 Amorphous Association Schemes.

Let $X = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ be a commutative association scheme.

Definition. A partition $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_e$ of the index set $\{0, 1, \dots, d\}$ of the association relations is said to be *admissible* if $\Lambda_0 = \{0\}$, $\Lambda_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq e$ and $\Lambda'_i = \Lambda_j$ for some j $1 \leq i, j \leq e$, where $\Lambda'_i = \{\alpha' \mid \alpha \in \Lambda_i\}$, $R_{\alpha'} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_\alpha\}$. Let $R_{\Lambda_i} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_i} R_\alpha$. If $(X, \{R_{\Lambda_i}\}_{0 \leq i \leq e})$ becomes an association scheme, it is called a *fusion scheme* of X . X is defined to be *amorphous* if every admissible partition gives rise to a fusion scheme.

Suppose that X is amorphous and symmetric. A.V. Ivanov proved that:

Theorem 4.[8] If the class d is greater than 2, either $\Gamma_i = (X, R_i)$ is a strongly regular graph of Latin square type for each i ($i \neq 0$) or Γ_i is of negative Latin square type for each i ($i \neq 0$).

Namely $|X| = n^2$ (a square) and $k_i = g_i(n - 1)$, $\lambda_i = (g_i - 1)(g_i - 2) + n - 2$, $\mu_i = g_i(g_i - 1)$, or $k_i = g_i(n + 1)$, $\lambda_i = (g_i + 1)(g_i + 2) - n - 2$, $\mu_i = g_i(g_i + 1)$, which k_i , λ_i , μ_i are the parameters of the strongly regular graph Γ_i .

Let $L_{g_1 \dots g_d}(n)$ be the collection of symmetric association schemes $x = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ for which each $\Gamma_i = (X, R_i)$ ($i \neq 0$) is a strongly regular graph of Latin square type (resp. negative Latin square type) with parameters $|X| = n^2$, $k_i = g_i(n - 1)$, $\lambda_i = (g_i - 1)(g_i - 2) + n - 2$, $\mu_i = g_i(g_i - 1)$ (resp. $k_i = g_i(n + 1)$, $\lambda_i = (g_i + 1)(g_i + 2) - n - 2$, $\mu_i = g_i(g_i + 1)$).

The converse of this theorem is also true.

Theorem 5.[6] Let x be an association scheme belonging to $L_{g_1 \dots g_d}(n)$ or $NL_{g_1 \dots g_d}(n)$. Then x is amorphous.

The following theorem is well known.

Theorem 6.[4] A symmetric Hadamard matrix of order $4s^2$, s integer, with constant diagonal exists if and only if there exists strongly regular graph of Latin square type belonging to $L_s(2s)$ or negative Latin square type belonging to $NL_s(2s)$.

This theorem can be restated: there exist symmetric Hadamard matrices of order $4s^2$ with constant diagonal if and only if there exists a symmetric amorphous

association schemes and (X, R_i) belongs to $L_S(2s)$ or $NL_S(2s)$.

Next we consider nonsymmetric amorphous association schemes. We rearrange the index set $\{1, 2, \dots, d\}$ such that

$$N = \{1, 2, \dots, r\} \cup \{d-r+1, \dots, d\}$$

with $i' = d-r+1$, $1 \leq i \leq r$, and the symmetric part is

$$S = \{r+1, \dots, r+s\}, \quad s = d - 2r$$

with $i' = i$ for $r+1 \leq i \leq r+s$. Assume that X is amorphous. Then the symmetrization $X^{\text{sym}} = (X, \{R_0\} \cup \{R_i \cup R_{i'}^t\}_{1 \leq i \leq r} \cup \{R_i\}_{r+1 \leq i \leq r+s})$ is also amorphous and it belongs to $L_{g_1 \dots g_{r+s}}(n)$ or $NL_{g_1 \dots g_{r+s}}(n)$, provided $r+s \geq 3$. Accordingly, we say that X belongs to

$$L_{g_1 \dots g_r; g_{r+1} \dots g_{r+s}}(n) \text{ or } NL_{g_1 \dots g_r; g_{r+1} \dots g_{r+s}}(n).$$

The following is a partial generalization of Theorem 6.

Theorem 7.[6] Let X be a nonsymmetric amorphous association scheme belonging to $L_{g_1 \dots g_r; g_{r+1} \dots g_{r+s}}(n)$ (resp. $NL_{g_1 \dots g_r; g_{r+1} \dots g_{r+s}}(n)$) with $r+s \geq 3$. Let A be a $(0, 1)$ adjacency matrix of X with row sum $n(n-1)/2$ (resp. $n(n+1)/2$). Then $2A - J$ is a Hadamard matrix of order n^2 , where J is the all one matrix.

There is another relation between Hadamard matrices and symmetric amorphous association scheme.

Theorem 8.[7] Amorphous association schemes belonging to $L_{1,1,2s-1,3s}(4s)$ can be obtained from Hadamard matrices of order $4s$.

4 Extension Rings over $Z/4Z$.

Let $F = GF(2)$ be a finite field with 2 elements and $\varphi(x) = x^s + \alpha_1 x^{s-1} + \dots + \alpha_s$ be a primitive polynomial of degree s over F . Let $\Phi(x) = x^s + \alpha_1 x^{s-1} + \dots + \alpha_s$ be a polynomial over $Z_4 = Z/4Z$ obtained from $\varphi(x)$ such that $\alpha_i \equiv \alpha_i \pmod{2}$, $1 \leq i \leq s$. There is a unique polynomial $\Phi(x)$ whose root ξ satisfies $\xi^{2^s-1} = 1$.

The ring $\mathcal{R} = Z_4[\xi]$ is an algebraic extension of Z_4 and has the radical $\mathcal{P} = 2\mathcal{R}$. The residue class field \mathcal{R}/\mathcal{P} is isomorphic with an extension $K = GF(2^s)$. We can take the Teichmüller system $\mathcal{J} = \{0, 1, \xi, \dots, \xi^{2^s-2}\}$ as a set of representatives of \mathcal{R}/\mathcal{P} .

Therefore an arbitrary element α of \mathcal{R} is uniquely represented as

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_1 \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{J}.$$

All the regular elements \mathcal{R}^* of \mathcal{R} forms a multiplicative group of order $2^s(2^s-1)$.

When we put $\alpha_0 = \tau(\alpha)$, then τ is a homomorphism of \mathcal{R}^* into the cyclic group M generated by ξ . The kernel of τ is the group \mathcal{E} of principal units, namely of elements of the form $1 + 2\beta$, $\beta \in \mathcal{J}$. For a principal unit $\varepsilon = 1 + 2\beta$ we can regard β as an element of K . For $1 + 2l$, $1 + 2m \in \mathcal{E}$, we have

$$(1 + 2l)(1 + 2m) = (1 + 2(l+m)), \quad l, m \in K.$$

Hence the group \mathcal{E} is an elementary abelian group of order 2^s and isomorphic with the additive group of K .

Thus \mathcal{R}^* is a direct product of M and \mathcal{E} . That is, an arbitrary element α of \mathcal{R}^* is uniquely represented as

$$\alpha = \xi^m \varepsilon = \xi^m(1 + 2a), \quad \varepsilon \in \mathcal{E}, \quad \varepsilon^{-1} \in \mathcal{P}, \quad a \in K.$$

5. Some Known Results.

Now we consider association schemes over \mathcal{R} . Let \mathcal{X}

$= (\mathcal{R}, \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{R}})$ be the association scheme for which $(\beta, \gamma) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ is in R_α if $\beta - \gamma = \alpha$. Let E_α be a coset by M in \mathcal{R} containing $1 + 2\alpha$, namely the direct product of M and a principal unit $\varepsilon = 1 + 2\alpha$:

$$E_\alpha = \{\xi^m \varepsilon = \xi^m(1 + 2\alpha), m=0, \dots, 2^s-2\}.$$

Let $M(1 + 2D) = \bigcup_{\alpha \in D} E_\alpha$ for a subset D of the additive abelian group K . In Particular, for a subgroup H of the additive group K , $M(1 + 2H) = \bigcup_{\alpha \in H} E_\alpha$ becomes a subgroup of \mathcal{R}^* . Denote the coset of $M(1 + 2H)$ by $C_\alpha = M(1 + 2(H+\alpha))$.

Let us introduce a nondegenerate symmetric bilinear form on K over F by

$$(a, b) = S_{K/F} ab$$

where $S_{K/F}$ is the relative trace from K to F . For a subgroup H of K , H^\perp denotes the orthogonal complement of H , i.e.

$$H^\perp = \{a \in K \mid S_{K/F}(a, b) = 0 \text{ for all } b \in H\}.$$

We notice that $\langle 1 \rangle^\perp$, the orthogonal complement of the subspace spanned by 1, is the set of isotropic elements in K , since $(l, l) = S_{K/F} l^2 = S_{K/F} l = (1, l)$.

The following results over \mathcal{R} were obtained.

Theorem 9.[6] For a subgroup H of K , let \mathcal{X}_H be the association scheme over \mathcal{R} with association relation given by

$$R_0 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{R}\}, R_2 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P} - \{0\}} R_\alpha,$$

$$R_\alpha = \bigcup_{\alpha \in C_\alpha} R_\alpha.$$

Then \mathcal{X}_H is symmetric and amorphous if and only if H^\perp is totally isotropic subspace of K .

Theorem 10.[6] For a subgroup H of K , \mathcal{X}_H is nonsymmetric and amorphous if and only if there exists a totally isotropic subspace U of K and a nonisotropic element

l_0 in U^\perp such that $H^\perp = U \oplus \langle l_0 \rangle$.

Theorem 11.[9,11] Let D be the subset of K containing $2^{(s-1)/2}$ elements. Then $M(1 + 2D)$ generates a distance regular digraph of girth 4 if and only if D is a maximal totally isotropic subspace.

For any element $\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_1 \in \mathcal{R}$, we define the element α^f as

$$\alpha^f = \alpha_0^2 + 2\alpha_1^2.$$

Hence f is a ring-automorphism of \mathcal{R} , and we call this the *Frobenius automorphism*. The set of elements of \mathcal{R} invariant under the Frobenius automorphism f is identical with Z_4 .

Definition. We define the *relative trace from \mathcal{R} to Z_4* :

$$S_{\mathcal{R}/Z_4} \alpha = \alpha + \alpha^f + \dots + \alpha^{f^{2^s-2}}.$$

Theorem 12.[13] Let D be a subset of K containing 2^{s-1} elements. Then $M(1 + 2D)$ becomes a $(2^{2s}, 2^{s-1}(2^s-1), 2^{s-1}(2^{s-1}-1))$ Hadamard difference set if and only if the equation

$$\sum_{a \in A+b} z_a = 2^{s-1} e_b, \quad e_b \in \{\pm 1, \pm i\}$$

is satisfied for all b in K , where

$$z_a = \sum_{m=0}^{2^s-2} i^m S_{\mathcal{R}/Z_4} (1+2a) \xi^m.$$

6. New Result.

Let D be a subset of K containing 2^{s-1} elements. We give a necessary and sufficient condition that the

subset $\mathcal{D} = M(1 + 2D)$ in \mathcal{R}^* becomes $R[2^{s-1}(2^s - 1); \lambda_1, \dots, \lambda_t; 2^{2s}]$ associated with an amorphous association scheme \mathcal{X}_H .

Theorem 13. Let D be a subset of K containing 2^{s-1} elements and H be a subgroup of K which satisfies the condition of Theorem 9. The subset $\mathcal{D} = M(1 + 2D)$ becomes a $R[2^{s-1}(2^s - 1); \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \dots; 2^{2s}]$, $\alpha, \beta \in K/H$, associated with \mathcal{X}_H if and only if for all k such that $k \in \langle 1 \rangle^\perp$ and $k \in H^\perp$,

$$\sum_{\substack{b \in D \\ b \in (D+k)}} (-1)^{S_{K/F} kb} = 0$$

is satisfied. Then the multiplicity is

$$\lambda_\alpha = 2^{s-1}(2^{s-1} - 1) - \sum_{k \in H^\perp} (-1)^{S_{K/F} ka} \sum_{\substack{b \in D \\ b \in (D+k)}} (-1)^{S_{K/F} kb}.$$

Corollary 14. The subset \mathcal{D} is a $(2^{2s}, 2^{s-1}(2^s - 1), 2^{s-1}(2^{s-1} - 1))$ difference set if and only if

$$v_k = \sum_{\substack{b \in D \\ b \in (D+k)}} (-1)^{S_{K/F} bk} = 0$$

for all $k \in \pi$.

References.

- [1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I : Association schemes, Benjamin/Cummings, 1984.
- [2] R.D. Bose and K.R. Nair, Partially balanced incomplete block designs, Sankhya 4 (1939), 337-372.
- [3] A.T. Butson, Relations among generalized Hadamard matrices, relative difference sets and maximal length sequences, Canad. J. Math 15 (1963), 42-48.
- [4] J.M. Goethals and J.J. Seidel, Strongly regular graphs derived from combinatorial designs, Canad. J. Math.

- 12 (1970), 597-614.
- [5] Ja.Ju. Golfand and M.H. Klin, Amorphous cellular rings I, Investigations in Algebraic Thoery of Combinatorial Objects, VNIISI, Moscow, Institute for system science (1985), 32-38 (in Russian).
- [6] T. Ito, A. Munemasa and M. Yamada, Amorphous association schemes over the Galois rings of characteristic 4, to appear in EuropeanJ.Combinatorics.
- [7] A.A. Ivanov and I.V. Chubaeva, Action of the group M_{12} on Hadamard matrices, Investigations in Algebraic Thoery of Combinatorial Objects, VNIISI, Moscow, Institute for system science (1985), 159-169 (in Russian).
- [8] A.V. Ivanov, Amorphous cellular rings II, Investigations in Algebraic Thoery of Combinatorial Objects, VNIISI, Moscow, Institute for system science (1985), 104-111 (in Russian).
- [9] R.A. Liebler and R.A. Mena, Certain distance-regular digraphs and related rings of characteristic 4, J. Combinatorial Theory (A) 47 (1988), 111-123.
- [10] B.R. McDonald, Finite rings with identity, Dekker, 1974.
- [11] M. Yamada, Distance-regular digraphs of girth 4 over an extension ring of $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, Graphs and Combinatorics 6 (1990), 381-394.
- [12] M. Yamada, Generalized relative difference sets and PBIBDs associated with amorphous association schemes over an extension ring of $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, to appear in Australasian Journal of Combinatorics.
- [13] K. Yamamoto and M. Yamada, Hadamard difference sets over an extension of $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, Utilitas Math. 34 (1988), 169-178.

Hadarnard行列の反対称(skew symmetric)性

と対称性について(特に28次の場合)

喜安 善市(半導体研)

1. はしがき

1991-08-23 筑波で 木村は、与えられた次数 n の反対称 Hadarnard 行列(以後 H 行列と略す)の内、特性数が 0 または 1 である H 行列のすべての同値類を求める手順を示した [K1]. これは Hall set を利用するものである. これに触発されて、ふちどり行列を含む広い意味での Goethals-Seidel (GSW型, 後出) 型 H 行列 [K2] が反対称となる条件を検討する. さきに [K2, 3] において, GS型 H 行列を論じて若干の成果を得たが, 反対称 H 行列の視点が十分でなかったので, まず, それを補足する. すなわち, (1) 反対称な(定義は 2) GS型および Williamson (以後 W と略す) 型 H 行列が反対称 H 行列であるための必要十分条件と, (2) その H 同値類の個数とを, $n = 12, 20, 28, 44$ について, もとめる.

同値類の立場から, GSW型の検討が不十分であったので, (3) それの対称および反対称 H 行列であるための必要十

分条件と、それから誘導される同値類の性質をのべる。

(4) $n \geq 20$ で、特性数が0または1であるH行列のすべての同値類を尽くすには、GSW型H行列では不十分で、別途の検討が必要であるが、 $n=8,12,16$ では十分である。これらの対称型の同値類の個数を整理する。(5) $n=28$ のGSW型H行列の対称型同値類の個数を求める。

1.2. 定義と記号

H行列： n 次の $\{1, -1\}$ 上の直交行列， $n=4k$ ， $k \geq 1$ 。

quad： $qu(p, q, r, s)$ ，H行列の行 p, q, r, s による部分行列。

$v = v(p, q, r, s)$ ： $qu(p, q, r, s)$ の2進形の列和ベクトル。

quad特性数： $V = V(p, q, r, s) = \min(w(v), n - w(v))/4$ ，

$w(v)$ は v の重さ。

Hの特性数： $V(H) = \min(V(qu) \mid qu \in H)$ 。

$n + V(p, q, r, s) = 0 \pmod{2}$ 。

対称H行列に同値なH行列全体の集合をS，反対称H行列に同値なH行列全体の集合をA，H行列全体の集合をHとし，H行列の同値類を次のように分類する。

$[AA] = \{H \mid H \in A, H \notin S\}$ ， $[AS] = \{H \mid H \in A, H \in S\}$ ，

$[SS] = \{H \mid H \in S, H \notin A\}$ ， $[N] = \{H \mid H \notin A, H \notin S, H \in H\}$

$[A] = [AA] \cup [AS]$ ， $[S] = [AS] \cup [SS]$ ，

[X]に関する同値類の個数を#[X]であらわす。

$\Gamma(x)$: ベクトル x の巡回行列, $E(n)$: 単位行列,

$J(n)$: 要素がすべて1の行列, $j(n)$: $J(n)$ の第1行,

$e(n) = (j(n))^T$, ここで n は次数, 省くこともある.

R : ベクトル $(1, 0, 0, \dots, 0)$ から作った逆巡回行列.

' は -1 を掛けること, \neg は否定をあらわす.

2. GS型H行列[K2,3]

$$GS(A, B, C, D) = \begin{bmatrix} A & BR & CR & DR \\ BR' & A & RD & RC' \\ CR' & DR' & A & RB \\ DR' & RC & RB' & A \end{bmatrix} .$$

$W(A, B, C, D)$: $GS(A, B, C, D)$ において $R = E$ としたもの.

$k = p$ (奇素数). A, B, C, D は k 次の $\{1, -1\}$ 上の巡回行列.

$AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = nE(k)$, $x^* = ex(X)$, $ex(X)$ は X の高

さ(行の要素の和, excess), $X \in \{A, B, C, D\}$.

$n = (a^*)^2 + (b^*)^2 + (c^*)^2 + (d^*)^2$, $a^*, b^*, c^*, d^* > 0$.

(A, B, C, D) において,

$[P_1]$: 対称型の成分が少なくとも1つある (A, B, C, D) の全体の集合.

$[P_2]$: あい等しい成分対が 少なくとも 1 対 ある (A, B, C, D) の全体の集合.

$[P_3]$: 反対称型の成分が 少なくとも 1 つ ある (A, B, C, D) の全体の集合.

$[P_4]$: 4 つの成分が すべて対称型である (A, B, C, D) の全体の集合.

定理 : (1) $GS(A, B, C, D) \in [S] \Leftrightarrow (A, B, C, D) \in [P_1 \cdot P_2]$.

(2) $GS(A, B, C, D) \in [A] \Leftrightarrow (A, B, C, D) \in [P_3]$.

(3) $GS(A, B, C, D) \in [AS] \Leftrightarrow (A, B, C, D) \in [P_1 \cdot P_2 \cdot P_3]$.

(4) $GS(A, B, C, D) \in [AA] \Leftrightarrow (A, B, C, D) \in [\neg(P_1 \cdot P_2) \cdot P_3]$.

(5) $k \neq 3, (A, B, C, D) \in [P_4] \Rightarrow W(A, B, C, D) \notin [A];$

$W(A, B, C, D) \neg \sim GS(A, B, C, D).$

(6) $k \neq 3, (A, B, C, D) \in [P_4 \cdot \neg P_2] \Rightarrow W(A, B, C, D),$

$GS(A, B, C, D) \in [N], \#(W) = \#(GS) = 2.$

証明 : $H \in [S] \Leftrightarrow H^T \sim H$ であることによる. 証明終.

3. $V(H) = 0, 1$ の H 行列

一般に H 行列 H の列 quad その他を行の場合と同様に定義し, $V^*(H) = V(H^T)$ のように, 肩記号 $*$ であらわす. $n \geq 8$ として, H 行列を 4 行 4 列でふちどられた "ふちどり" 行列

とみる。ふちどり部分において、ふちどり行quadをh、ふちどり列quadをh*, h∧h*をpi (pivotという) で、心行列をKであらわす。

予備定理：H行列Hにおいて、 $V(h(H))=V(H)$ 、 $V(h^*(H))(=U(H))\leq V^*(H)$ が成立し、しかもh(H)もh*(H)も4次のH行列があい連なった形であるようなふちどりに同値変換することができて、HはU(H)と特性数V(H)とで1意的に分類される。 証明略。

例：kが奇数の場合、Williamson型[K4]、後出のGSW型H行列ではU=V=1。kが偶数の場合、Sylvester型[K4]、対称GSW型はU=V=0、反対称GSW型はU=1,V=0。注1。

予備定理において $h \setminus pi$, $h^* \setminus pi$ がそれぞれ同じ4次のH行列Hr,Hcの連であるときは、 $H_p = pi(H)$ として

$$H = \begin{bmatrix} H_p & H_r x_j(k-1) \\ H_c x_e(k-1) & K \end{bmatrix}$$

とすることができる。ただし、xはKronecker積。このHをGSW型という。

予備定理の系：GSW型において、(1) k(≠1)が奇数であれば、 $V(H)=1$ 。(2) kが偶数であれば、 $V(H)=0$ 。(3) $H_p = H_r$ または $H_p = H_c$ である \Rightarrow kが偶数。 証明略。

3.1. GSW型の標準形. k が偶数の場合. A, B, C, D を複巡回行列とすれば, GSW型 H 行列の標準形は次のようになる.

対称型: $H = GS_s, H_p = F, H_r = M, H_c = M^T, K = F'(A, B, C, D),$

反対称型: $H = GS_a, H_p = M, H_r = N, H_c = N', K = GS(A, B, C, D).$

ただし, (M, N) は4次の amicable対 [W1], $F = J(4) - 2E(4),$

$$F(A, B, C, D) = \begin{bmatrix} A' & CR & DR & BR \\ DR & RB' & A & RC \\ BR & RD & RC' & A \\ CR & A & RB & RD' \end{bmatrix},$$

$$(a^*, b^*, c^*, d^*) = (1, 1, 1, 1), \quad (a)$$

$$AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = nE(k-1) - 4J(k-1). \quad (b)$$

定理: $k-1 = p$ (奇素数)とする. 簡単のため GS_s, GS_a を GS と書けば, $GS(A, B, C, D)$ の変換定理 [K2]は, 否定操作を除いて, そのまま成立する. 証明略.

3.2. W_s, GS_s, GS_a の誘導行列

補助定理: (1) $p = 3 \pmod{4}$ なら, GS_s を誘導する (A, B, C, D) に $A = B = C = D$ であるものが丁度1揃いある. $p = 3, 7$ では $A \in [AS]$, それ以外では $A \in [AA]$.

(2) $p = 1 \pmod{4}$ なら, GS_s を誘導する (A, B, C, D) に $A = B, C = D$ であるものが丁度1揃いあり, $p = 5$ では $A, C \in$

[AS], それ以外では $A, C \in [AA]$. (3) GSからWを定義したのと同様に, GS_s から W_s を定義する. このとき, W_s から W_s と同値でない対称H行列を, GS_s から GS_s と同値でないH行列を誘導することができる. [K3]. 証明略.

$n = 12, 20, 28, 44$ の場合のGS型(W型を含めて)H行列の同値類は上の所論と[K2,3]とから次のようになる.

n	#(GS)	#(W)	#(GS, W)	#(A)	#(S)
12	1AS.	1S.	1AS.	1	1
20	1AS.	1SS.	1AS, 1SS.	1	2
28(5111)	2AA, 1AS.	2N.	1AS, 2AA, 2N.	6	5
(3331)	3AS.	1SS.	3AS, 1SS.		
44	58AA, 1AS, 2N.		58AA, 1AS, 1SS, 54N.	59	2

$n = 8, 16$ の場合のGSW型H行列の同値類^は次のようになる.

n	#(GS)	#(W)	#(GS, W)	#(A)	#(S)	#(H)
8	1AS.	1AS.	1AS.	1	1	1
16	2AA, 3SS.	3SS.	2AA, 3SS.	2	3	5

4. 28次のGSW型H行列の同値類

補助定理 4.1: k が奇数ならば, (1) 反対称型のGSW型

H 行列は存在しない。(2) 対称型の GSW 型 H 行列の標準形

GS_s は, A, B, C, D を $(k-1)$ 次の複巡回行列として

$$Hp = F, Hr = M^T, Hc = M, K = GS(A, B, C, D)L,$$

$$L = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \times E(k-1),$$

$$(a^*, b^*, c^*, d^*) = (2, 0, 0, 0), \quad (c)$$

$$AA^T + BB^T + CC^T + DD^T = nE(k-1) - 4J(k-1) \quad (b)$$

である。

証明略。

この補助定理を 28 次に応用して, (A, B, C, D) をもとめるため, $J = J(3)$ と略記して, 次の記号を導入する。

$$\gamma_0 = \Gamma(1', 1, 1), \gamma_1 = \Gamma(1, 1', 1), \gamma_2 = \Gamma(1, 1, 1'),$$

$$ck(J) = \Gamma(J, \gamma_0'), \quad ck(x) = \Gamma(\gamma_x, \gamma_0'),$$

$$ck(xR) = \Gamma(\gamma_x R, \gamma_0); \quad ck(x) \text{ の主対角行列 } \text{diag}(\gamma_x,$$

$$\gamma_x) \text{ を } \text{diag}(\gamma_x, \gamma_0) \text{ で置き代えたものを } ck(x, y) \text{ であ}$$

$$\text{らわす。 } ck(xR, yR) \text{ 等も同様である。 } x, y \in \{0, 1, 2\}.$$

一般性を害することなく, A, B, C, D のうち, A は

$A = ck(J)$, 残りの B, C, D は次の (A), (B), (C) である。

$$(A): B = ck(0), C = D = ck(1); \quad B = ck(0), C = D = ck(2);$$

$$B = ck(0), C = ck(1), D = ck(2).$$

$$(B): B = ck(0R), C = ck(1R), D = ck(2R).$$

$$(C): B = ck(0R), C = D = ck(1R, 2R));$$

$$B = ck(0R), C = D = ck(2R, 1R).$$

GS_s に対応する W_s の K は $K = \begin{bmatrix} A' & B & C & D \\ B & A & C & D' \\ C^T & D^T & A & B \\ C^T & D^T & B' & A \end{bmatrix}$ と置くことができる。ただし K はブロック間直交行列とする。

定理：(1) $GS_s(A, B, C, C) \in [S] \Rightarrow GS_s(A, B', C, C) \in [S]$,
 $GS_s(A, B, C, C) \not\sim GS_s(A, B', C, C)$; $W_s(A, B, C, C) \in [S] \Rightarrow$
 $W_s(A, B', C, C) \in [S]$, $W_s(A, B, C, C) \not\sim W_s(A, B', C, C)$.

(2) (A)の最初の2組, (C)の2組は GS_s 型 H 行列としては同値で, (B)では $GS_s(A, B, C, D) \in [S]$ である。(A), (B), (C)併せて, 28次の GS_s 型で対称型同値類は8個である。

(3) W_s についても(2)が成立する。ただし(B), (C)の K の要素にあらわれる転置記号 T を Goethals-Seidel 変換記号 s に読みかえるものとする。(4) 28次の GSW型で対称型同値類は上記のものに限られ, 16個である。 証明略。

補助定理 4.2: $n=28, V=1$ の H 行列の同値類は, $U=V=1$ (GSW型) と $V=1, U=3$ とに2分類される。注2。 証明略。

5. 結びにかえて

ここでは H 行列同値類が (V, U) で分類されることを述べ、

$(V,U) = (0,0), (0,1), (1,1)$ の場合の標準形を作り, これから対称型と反対称型 (k が奇数の場合を除く) とを求めた. $n=28$ では $(1,1)$ 型で $\#[S]=16$ で, $(1,3)$ 型と反対称型 (木村 [K1] の $\#[A]=49$), さらに一般的に $V,U \geq 2$ の標準形を求めることが残された問題である.

文献, 注, 付記.

[K1] 木村 浩: Skew Hadamard matrices と Hall sets. 筑波組合せ論ワークショップ, 1991-08-23. [K2] 喜安, 沢出: GS型 Hadamard 行列, 代数的組合せ論報告集, 1986. [K3] 喜安: 4平方和型 Hadamard 行列, 筑波組合せ論ワークショップ, 1989-08-24. [K4] 喜安: アダマール行列とその応用. 1980, 電子通信学会. [K5] 木村, 喜安: Hadamard 行列の木村予想について, 代数的組合せ論報告集, 1990. [W1] W.D.Wallis, A.P.Street, J.S.Wallis: Combinatorics, 1972, Springer-Verlag.

注1. 筆者は1984年この問題にふれた(足工大研究集録).

注2. [K5]の所論から導かれる.

付記. 講演の際, $n=28, V=1$ の対称型同値類が32個あると述べたのは誤りで, 本文のように”未決定”である.

Strongly Regular Graphs derivable from even unimodular Lattices

弘前大理 小関 道夫 Michio Ozeki

Oct, 1991

1 格子群に関する諸定義

\mathbb{Z} を有理整数環、 \mathbb{Q} を有理数体とする。 \mathbb{Q}^n 内の有限生成 \mathbb{Z} -加群で、正定値な距離を持つもの L は、二次形式を持つ格子群と呼ばれる。本報告では、二次形式を持つ格子群のみを扱うので以後単に格子群ということにする。格子群 L は任意の L の元 x, y に対して $(x, y) \in \mathbb{Z}$ を満たす時、整格子群という。ここで $(,)$ は距離に付随した内積である。格子群 L の相対格子群 L^* は

$$L^* = \{y \in L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid (x, y) \in \mathbb{Z}, \forall x \in L\}.$$

により定義される。格子群 L は、すべての $x \in L$ に対して $(x, x) \equiv 0 \pmod{2}$ を満たすとき偶数的であるといい、 $L = L^*$ を満たすときユニモジュラーであるという。 L 内で \mathbb{Q} 上一次独立なベクトルの最大個数を L の階数という。偶数的で、ユニモジュラーな格子群の階数は 8 で割り切れることは良く知られている。

偶数的な格子群 L のベクトル x については (x, x) が偶数になるので $(x, x) = 2m$ となるとき x を $2m$ -ベクトルと呼ぶ。 $\Lambda_{2m}(L)$ を

$$\Lambda_{2m}(L) = \{x \in L \mid (x, x) = 2m\}.$$

により定義される集合とする。 Γ_{8k} ($k \geq 1$) により階数が $8k$ の全ての正定値で偶数的なユニモジュラー格子群の同値類を表すことにする。 Γ_{8k} 内の格子群 L は、その最小ベクトル v (すなわち L のベクトル v で $(v, v) = \min_{0 \neq x \in L} (x, x)$ をみたすもの) が条件

$$(v, v) = 2 \left(\left[\frac{k}{3} \right] + 1 \right),$$

を満たすとき極值的 (extremal) であるという。ここで、 $[]$ はガウスの記号である。

幾つかの知られた極値的格子群を挙げる。

(1) 階数 8 のゴセット格子 E_8 。

最小ベクトルは 2-ベクトルで次のことはよく知られている。

$$\|\Lambda_2(E_8)\| = 240, \|\Lambda_4(E_8)\| = 2160, \|\Lambda_6(E_8)\| = 6720.$$

(2) 階数 16 で D_{16} 型のルート格子群 L_{16} 。

最小ベクトルは 2-ベクトルで次のことが知られている。

$$\|\Lambda_2(L_{16})\| = 480, \|\Lambda_4(L_{16})\| = 61920, \|\Lambda_6(L_{16})\| = 1050240.$$

(3) 階数 24 のリーチ格子群 *Leech* 。

最小ベクトルは 4-ベクトルで次のことが知られている。

$$\|\Lambda_4(\text{Leech})\| = 196560, \|\Lambda_6(\text{Leech})\| = 16773120, \|\Lambda_8(\text{Leech})\| = 398034000,$$

$$\|\Lambda_{10}(\text{Leech})\| = 4629381120, \|\Lambda_{12}(\text{Leech})\| = 34417656000, \|\Lambda_{14}(\text{Leech})\| = 187489935360$$

(4) 階数 32 の格子群 L_{32} 。

最小ベクトルは 4-ベクトルで次のことが知られている。

$$\|\Lambda_4(L_{32})\| = 146880, \|\Lambda_6(L_{32})\| = 64757760, \|\Lambda_8(L_{32})\| = 4844836800,$$

$$\|\Lambda_{10}(L_{32})\| = 137695887360, \|\Lambda_{12}(L_{32})\| = 2121555283200, \|\Lambda_{14}(L_{32})\| = 21421110804480$$

(5) 階数 48 の格子群 L_{48} 。

最小ベクトルは 6-ベクトルで次のことが知られている。

$$\|\Lambda_6(L_{48})\| = 52416000, \|\Lambda_8(L_{48})\| = 39007332000, \|\Lambda_{10}(L_{48})\| = 6609020221440.$$

2 保型形式についての若干の予備知識

$\mathfrak{H}_1 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ を複素上半空間とする。 \mathfrak{H}_1 の上で定義された複素数値関数 $f(z)$ は以下の条件 (i),(ii) を満たすとき、モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ に属する重み $2k$ のモジュラー形式という。

$$(i) f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z), \text{ with } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

(ii) $f(z)$ はカスプ $i\infty$ で良い挙動をする。

条件 (ii) は、 $f(z)$ のフーリエ展開:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(f) \exp(2\pi inz),$$

を考えたとき、項 $\sum_{n < 0} a_n \exp(2\pi inz)$ が消えることを意味する。

$M(2k)$ によりモジュラー群に属する、重み $2k$ のモジュラー形式の全体のなすベクトル空間を示す。モジュラー形式 $f(z) \in M(2k)$ はそのフーリエ展開の定数項 $a_0(f)$ がゼロのとき尖点形式と呼ばれる。 $S(2k)$ によりそのような尖点形式全体のなす $M(2k)$ の部分ベクトル空間を表す。小さい $2k$ に対するこれらの空間の基底を表として与えて置く。

A table of modular forms

2k	basis of $M(2k)$	basis of $S(2k)$
4	$E_4(z)$	
6	$E_6(z)$	
8	$(E_4(z))^2$	
10	$E_4(z)E_6(z)$	
12	$(E_4(z))^3 + \text{a cusp form}$	$\Delta_{12}(z)$
14	$(E_4(z))^2 E_6(z)$	
16	$(E_4(z))^4 + \text{a cusp form}$	$\Delta_{12}(z)E_4(z)$
18	$(E_4(z))^3 E_6(z) + \text{a cusp f.}$	$\Delta_{12}(z)E_6(z)$
20	$(E_4(z))^5 + \text{a cusp form}$	$\Delta_{12}(z)(E_4(z))^2$
22	$E_4(z)E_6(z) + \text{a cusp f.}$	$\Delta_{12}(z)E_6(z)E_4(z)$
24	$(E_4(z))^6 + \text{two cusp f.}$	$(\Delta_{12}(z))^2, \Delta_{12}(z)(E_4(z))^3$
26	$(E_4(z))^5 E_6(z) + \text{a cusp f.}$	$\Delta_{12}(z)E_6(z)(E_4(z))^2$
28	$(E_4(z))^7 + \text{two cusp forms}$	$(\Delta_{12}(z))^2 E_4(z), \Delta_{12}(z)(E_4(z))^4$
30	$(E_4(z))^6 E_6(z) + \text{two cusp forms}$	$(\Delta_{12}(z))^2 E_6(z), \Delta_{12}(z)E_6(z)(E_4(z))^3$
32	$(E_4(z))^8 + \text{two cusp f.}$	$(\Delta_{12}(z))^2 (E_4(z))^2, \Delta_{12}(z)(E_4(z))^5$
34	$(E_4(z))^7 E_6(z) + \text{two cusp forms}$	$(\Delta_{12}(z))^2 E_4(z)E_6(z), \Delta_{12}(z)E_6(z)(E_4(z))^4$

上の表では 3 つの基本的なモジュラー形式が使われている。すなわち、重み 4 のアイゼンstein級数 $E_4(z)$ 、重み 6 のアイゼンstein級数 $E_6(z)$ 、それに重み 12 の尖点形式 $\Delta_{12}(z)$ とである。それらのフーリエ展開よく知られている。

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \exp(2\pi inz),$$

$$E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) \exp(2\pi inz),$$

$$\Delta_{12}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \exp(2\pi inz),$$

ここで $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ で $\tau(n)$ はラマヌジャンのタウ関数である。それらのいくつかの数値を表として与えて置く。

n	$240 \times \sigma_3(n)$	$504 \times \sigma_5(n)$	$\tau(n)$
1	240	504	1
2	2160	16632	-24
3	6720	122976	252
4	17520	532728	-1472
5	30240	1575504	4830
6	60480	4058208	-6048
7	82560	8471232	-16744
8	140400	17047800	84480
9	181680	29883672	-113643
10	272160	51991632	-115920

格子群に付随したテータ級数についてのいくつかの重要な事実を列挙するが、その前に多少の予備知識が要る。

L を階数が $8k$ の偶数的ユニモジュラー格子群とすると、その格子群のテータ級数 $\vartheta(x, L)$ が

$$(2.1) \quad \vartheta(z, L) = \sum_{x \in L} \exp(\pi i(x, x)z).$$

により定義され、この級数は

$$(2.2) \quad \vartheta(z, L) = \sum_{m=1}^{\infty} a(2m, L) \exp(2\pi i m z),$$

と書き直せる。ここで $a(2m, L) = \|\Lambda_{2m}(L)\|$.

次数 ν の球関数付きテータ級数 $P_\nu(x, \alpha)$ は

$$(2.3) \quad \vartheta(z, P_\nu, L) = \sum_{x \in L} P_\nu(x; \alpha) \exp(\pi i(x, x)z).$$

により定義され、この級数も

$$(2.4) \quad \vartheta(z, P_\nu, L) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{x \in \Lambda_{2m}(L)} P_\nu(x; \alpha) \exp(\pi i(x, x)z)$$

と書き直せる。球関数 $P_\nu(x; \alpha)$ は次数 ν のゲーゲンバウアー多項式 $H_\nu(u)$ から次のようにして求められる。

$$P_\nu(x; \alpha) = H_\nu \left(\frac{(x, \alpha)}{\sqrt{(x, x)(\alpha, \alpha)}} \right) ((x, x)(\alpha, \alpha))^{\frac{\nu}{2}}$$

ゲージンバウアー多項式 $H_\nu(u)$ は二階の常微分方程式:

$$(1-u^2) \frac{d^2 H_\nu}{du^2} - u(8k-1) \frac{dH_\nu}{du} + \nu(8k+\nu-2)H_\nu = 0.$$

の解である。始めのいくつかの $H_\nu(u)$ を与えて置く。

$$(2.5) \quad H_2(u) = u^2 - \frac{1}{8k}$$

$$(2.6) \quad H_4(u) = u^4 - \frac{6}{8k+4}u^2 + \frac{3}{(8k+4)(8k+2)}$$

$$(2.7) \quad H_6(u) = u^6 - \frac{15}{8k+8}u^4 + \frac{45}{(8k+8)(8k+6)}u^2 - \frac{15}{(8k+8)(8k+6)(8k+4)}$$

$$(2.8) \quad H_8(u) = u^8 - \frac{28}{8k+12}u^6 + \frac{210}{(8k+12)(8k+10)}u^4 - \frac{420}{(8k+12)(8k+10)(8k+8)}u^2 + \frac{105}{(8k+12)(8k+10)(8k+8)(8k+6)}$$

上の予備事項のもとに、後で必要な基本的事実を述べる。

(I) L が階数 $8k$ の偶数的ユニモジュラー格子群のとき

$$(2.9) \quad \vartheta(z, L) \in M(4k).$$

(II) L が階数 $8k$ の偶数的ユニモジュラー格子群のとき

$$(2.10) \quad \vartheta(z, P_\nu, L) \in S(4k+\nu) \text{ for } \nu > 0.$$

(III) $Leech$ を階数 24 のリーチ格子群とすると、

$$(2.11) \quad \vartheta(z, Leech) \in M(12)$$

$$(2.12), (2.13) \quad \vartheta(z, P_2, Leech) = 0, \vartheta(z, P_4, Leech) = 0$$

$$(2.14), (2.15) \quad \vartheta(z, P_6, Leech) = 0, \vartheta(z, P_8, Leech) = 0$$

$$(2.16), (2.17) \quad \vartheta(z, P_{10}, Leech) = 0, \vartheta(z, P_{12}, Leech) \neq 0$$

注意：等式 $\vartheta(z, P_\nu, Leech) = 0$ ($\nu = 2, 4, 6, 8, 10$) は $\|\Lambda_4(Leech)\| = 0$ とそれ関係した次元とから導かれる。

同様の論法により、以下の結論(IV),(V)を得る。

(IV) L_{32} を階数 32 の極值的格子群とするとき、

$$(2.18) \quad \vartheta(z, L_{32}) \in M(16)$$

$$(2.19), (2.20) \quad \vartheta(z, P_2, L_{32}) = 0, \vartheta(z, P_4, L_{32}) = 0$$

$$(2.21), (2.22) \quad \vartheta(z, P_6, L_{32}) = 0, \vartheta(z, P_8, L_{32}) \neq 0$$

$$(2.23) \quad 0 = \vartheta(z, P_{10}, L_{32}) \in S(26)$$

(V) L_{48} を階数 48 の極值的格子群とするとき、

$$(2.24) \quad \vartheta(z, L_{48}) \in M(24)$$

$$(2.25), (2.26) \quad \vartheta(z, P_2, L_{48}) = 0, \vartheta(z, P_4, L_{48}) = 0$$

$$(2.27), (2.28) \quad \vartheta(z, P_6, L_{48}) = 0, \vartheta(z, P_8, L_{48}) = 0$$

$$(2.29), (2.30) \quad \vartheta(z, P_{10}, L_{48}) = 0, \vartheta(z, P_{12}, L_{48}) \neq 0$$

$$(2.31) \quad \vartheta(z, P_{14}, L_{48}) = 0$$

3 強正則グラフについての若干の予備知識

グラフ $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ は二つの集合 \mathcal{V} と \mathcal{E} とよりなる。集合 \mathcal{V} は有限集合であって、その元はグラフ G の頂点と呼ばれる。

$$v = \|\mathcal{V}\|, \mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}.$$

と置く。集合 \mathcal{E} は \mathcal{V} の全ての 2-要素部分集合よりなる集合の部分集合である。二つの頂点 p_i と p_j とは $\{p_i, p_j\} \in \mathcal{E}$ が成り立つとき、隣接しているといい、この関係を形式的に

$$p_i \overset{\text{adj}}{\leftrightarrow} p_j.$$

と書く。そのような 2-要素部分集合 $\{p_i, p_j\}$ をグラフ G の辺という。

各グラフ $G = (V, E)$ に対して G の隣接行列と呼ばれる v 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ が次のようにして定義される。

係数 a_{ij} が

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{もし } p_i \text{ と } p_j \text{ とが隣接しているとき} \\ 0 & \text{もし } p_i = p_j \text{ かまたは } p_i \text{ と } p_j \text{ とが隣接していないとき} \end{cases}$$

G の補グラフ $\bar{G} = (V, \bar{E})$ とは、頂点の集合が G のそれと同じで、二つの頂点 p_i と p_j とはそれらが G で隣接していないとき且つそのときに限り \bar{G} で隣接していると定義されるグラフである。 $B = (b_{ij})$ を \bar{G} の隣接行列とするとき、

$$(3.1) \quad A + B + I_v = J,$$

が成り立つ。ここで $I_v = I$ は v 次の単位行列で、 J は係数が全て 1 の v 次の正方行列である。

グラフ G は次の三つの条件を満たすとき、強正則グラフ (strongly regular graph) と呼ばれる。

(i) V の任意の頂点 p_i に対して V の頂点 p_j で p_i と隣接するものの個数は定数 k である。

(ii) もし p_i と p_j とが隣接しているならば、 V の頂点 p_h で p_i にも p_j にも隣接しているものの個数は、定数 λ である。

(iii) もし p_i と p_j とが隣接していないとき、 V の頂点 p_h で p_i にも p_j にも隣接しているものの個数は、定数 μ である。

A を強正則グラフ G の隣接行列、 B をその補グラフ \bar{G} の隣接行列とするとき、次のことが成り立つ。

$$(3.2) \quad A = A^T, AJ = JA = kJ$$

$$(3.3) \quad B = B^T, BJ = JB = lJ, l = v - k - 1$$

$$(3.4) \quad A^2 = kI + \lambda A + \mu B$$

逆に上記の関係 (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) を満たす (0,1) 行列の組 A, B , があればそれから強正則グラフとその補グラフとが定義される。

4 主題

全体の考え方を説明するために一つの例を詳しく説明する。この例で導かれている結果は新しいものではないが、方法自体はグラフの専門家には目新

しい要素も含まれているものと思う。

この方法から得られる結果は今の所沢山ではないが、幾何学的な内容を代数的に導く仕方は魅力があり、適当な幾何学プロパーな考えを取り入れれば適用範囲が広がることもありうる。

Example *Leech* をリーチ格子群とする。 $\Lambda_4 = \Lambda_4(\text{Leech})$ とし、 $x_0 \in \Lambda_4$ を一つ固定する。さらに、

$$\Lambda_{4,2} = \{y \in \Lambda_4 \mid (y, x_0) = 2\}$$

と置く。つぎの lemma が成り立つ。

Lemma 4.1 $y_1, y_2 \in \Lambda_{4,2}$ とするとき、 (y_1, y_2) の値は $4, 2, 1, 0, -2$ しか取り得ない。

証明 *Leech* では $\forall y \in \text{Leech} - \{0\}$ に対して $(y, y) \geq 4$ となることと、 *Leech* 内の三つのベクトル $x_0 - (y_1 + y_2)$, $y_1 \pm y_2$ の内積 $(x_0 - (y_1 + y_2), x_0 - (y_1 + y_2)) = 4 + (y_1, y_2)$, $(y_1 \pm y_2, y_1 \pm y_2) = 8 \pm 2(y_1, y_2)$ の取れる値を調べれば良い。

$\Lambda_{4,2}$ の上で写像 σ を $y \rightarrow \sigma(y) = y - \frac{1}{2}x_0$, $y \in \Lambda_{4,2}$ により定義する。全ての像 $\sigma(y)$ は x_0 に直交する超平面の上に乗ることが分かる。

Lemma 4.2 $\sigma(y_1), \sigma(y_2) \in \sigma(\Lambda_{4,2})$ とするとき、 $(\sigma(y_1), \sigma(y_2))$ の値は $3, 1, 0, -1, -3$ しか取り得ない。

これはすぐ上の Lemma から容易に導かれる。

注意: $(\sigma(y_1), \sigma(y_2)) = 3 \iff \sigma(y_1) = \sigma(y_2)$,
 $(\sigma(y_1), \sigma(y_2)) = -3 \iff \sigma(y_1) = -\sigma(y_2)$.

また二つのベクトル $\sigma(y_1), \sigma(y_2)$ は後者の関係を満たすとき、 $\sigma(y_1) \sim \sigma(y_2)$ と書き、組み $\{\sigma(y_1), \sigma(y_2)\} = \widehat{\sigma(y_1)}$ を対極的組み (antipodal pair) という。 $\sigma(\Lambda_{4,2})$ を関係 \sim で割ったもの $G = \sigma(\Lambda_{4,2}) / \sim$ を考える。

$\widehat{\sigma(y)}, \widehat{\sigma(w)} \in G$ は $(\sigma(y), \sigma(w)) = \pm 1$ を満たすときかつそのときのみ隣接している、と定義することにより集合 G にグラフの構造を入れる。このグラフが強正則グラフになることを示す。条件 (2.11) と式 (2.4), (2.5) とより

$$(4.1) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, x)^2 = \frac{1}{24} \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, \alpha)(x, x) = 32760(\alpha, \alpha)$$

同様の仕方で、(2.6) ~ (2.17) および (4.1) 等を使って以下の関係式を得る。

$$(4.2) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, x)^4 = 15120(\alpha, \alpha)^2,$$

$$(4.3) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, x)^6 = 10800(\alpha, \alpha)^3,$$

$$(4.4) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, x)^8 = 10080(\alpha, \alpha)^4,$$

$$(4.5) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (\alpha, x)^{10} = 11340(\alpha, \alpha)^5.$$

[注]:球関数付きテータ級数から二次形式の内積に関する情報を得るアイデアは既に Hecke[3] にその端緒を見ることができ Venkov が一連の仕事でその強力さを示すまでは、いわば埋もれていた。

$\gamma \in \mathbb{R}^{24}$ で $(\gamma, x_0) = 0$ となる変数ベクトルを想定し、 ξ, η を実変数として、 $\alpha = \xi x_0 + \eta \gamma$ とする。このとき、

$$(\alpha, \alpha) = 4\xi^2 + \eta^2(\gamma, \gamma), \quad (\alpha, x) = \xi(x, x_0) + \eta(x, \gamma), x \in \Lambda_4$$

となり、これらを等式 (4.2) に代入して変数 ξ, η の多項式として見て係数を比較することにより、

$$(4.2.1) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^2 (x, \gamma)^2 = 20160(\gamma, \gamma),$$

$$(4.2.2) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, \gamma)^4 = 15120(\gamma, \gamma)^2,$$

を得る。同様にして (4.3) からは

$$(4.3.1) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^4 (x, \gamma)^2 = 34560(\gamma, \gamma),$$

$$(4.3.2) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^2 (x, \gamma)^4 = 8640(\gamma, \gamma)^2,$$

$$(4.3.3) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, \gamma)^6 = 10800(\gamma, \gamma)^3,$$

(4.4) からは

$$(4.4.1) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^6 (x, \gamma)^2 = 92160(\gamma, \gamma),$$

$$(4.4.2) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^4 (x, \gamma)^4 = 13824(\gamma, \gamma)^2,$$

$$(4.4.3) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, x_0)^2 (x, \gamma)^6 = 5760(\gamma, \gamma)^3,$$

$$(4.4.4) \quad \sum_{x \in \Lambda_4} (x, \gamma)^8 = 10080(\gamma, \gamma)^4,$$

(4.5) からも相当する式が得られるが略す。式 (4.2.1) に於いて

$$\Lambda_4 = \Lambda_{4,0} \cup \Lambda_{4,1} \cup \Lambda_{4,-1} \cup \Lambda_{4,2} \cup \Lambda_{4,-2} \cup \Lambda_{4,4} \cup \Lambda_{4,-4} \quad (\text{disjoint union})$$

を考えることにより、

$$(4.2.1.1) \quad 2 \sum_{x \in \Lambda_{4,1}} (x, \gamma)^2 + 8 \sum_{x \in \Lambda_{4,2}} (x, \gamma)^2 = 20160(\gamma, \gamma),$$

を得て、(4.3.1) から

$$(4.3.1.1) \quad 2 \sum_{x \in \Lambda_{4,1}} (x, \gamma)^2 + 32 \sum_{x \in \Lambda_{4,2}} (x, \gamma)^2 = 34560(\gamma, \gamma),$$

を得る。(4.2.1.1) と (4.3.1.1) より

$$(4.6.1) \quad \sum_{x \in \Lambda_{4,1}} (x, \gamma)^2 = 7680(\gamma, \gamma),$$

$$(4.6.2) \quad \sum_{x \in \Lambda_{4,2}} (x, \gamma)^2 = 600(\gamma, \gamma).$$

(4.3.2) と (4.4.2) からは

$$(4.6.3) \quad \sum_{x \in \Lambda_{4,1}} (x, \gamma)^4 = 3456(\gamma, \gamma)^2,$$

$$(4.6.4) \quad \sum_{x \in \Lambda_{4,2}} (x, \gamma)^4 = 216(\gamma, \gamma)^2.$$

が導かれる。条件 (4.6.2), (4.6.4) をグラフ G の条件に焼き直すと、それぞれ

$$(4.7.1) \quad \sum_{\widehat{\sigma(y)} \in G} (\widehat{\sigma(y)}, \gamma)^2 = 300(\gamma, \gamma),$$

$$(4.7.2) \quad \sum_{\widehat{\sigma(y)} \in G} (\widehat{\sigma(y)}, \gamma)^4 = 108(\gamma, \gamma)^2.$$

となる。 $\gamma = \gamma_1 \pm \gamma_2$ として (4.7.2) を展開して、(4.7.1) を援用して次の式を得る。

$$(4.8) \quad \sum_{\widehat{\sigma(y)} \in G} (\widehat{\sigma(y)}, \gamma_1)^2 (\widehat{\sigma(y)}, \gamma_2)^2 = 36(\gamma_1, \gamma_1) + 72(\gamma_1, \gamma_2)^2.$$

$T = (t_{ij})$, $t_{ij} = (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_j})^2$ と隣接行列 $A = (a_{ij})$ との関係を見てみる。

$$\begin{aligned} a_{ij} = 1 &\iff \widehat{\sigma(y)_i} \text{ と } \widehat{\sigma(y)_j} \text{ とが隣接している} \\ &\iff (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_j})^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} = 0, i \neq j &\iff \widehat{\sigma(y)_i} \text{ と } \widehat{\sigma(y)_j} \text{ とが隣接していない} \\ &\iff (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_j})^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{ii} = 0 &\iff \widehat{\sigma(y)_i} = \widehat{\sigma(y)_j} \\ &\iff (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_j})^2 = 9 \end{aligned}$$

より

$$(4.9) \quad T = A + 9I.$$

(4.7.1) において、 $\gamma = \widehat{\sigma(y)_j} \in G$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{300} t_{ij} &= \sum_i (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_j})^2 \\ &= 300 \times 3 = 900 \end{aligned}$$

故に

$$(4.10) \quad TJ = 900J.$$

$T^2 = (s_{ij})$ と置き、(4.8)をも考慮すると

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sum_{k=1}^{300} t_{ik} t_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{300} (\widehat{\sigma(y)_i}, \widehat{\sigma(y)_k})^2 (\widehat{\sigma(y)_k}, \widehat{\sigma(y)_j})^2 \\ &= \begin{cases} 36 * 9 + 72 & \widehat{\sigma(y)_i} \overset{adj}{\leftrightarrow} \widehat{\sigma(y)_j} \\ 36 * 9 & \widehat{\sigma(y)_i} \overset{non-adj}{\leftrightarrow} \widehat{\sigma(y)_j}, \\ 36 * 9 + 72 * 9 & \widehat{\sigma(y)_i} = \widehat{\sigma(y)_j} \end{cases} \end{aligned}$$

となることが分かる。故に

$$(4.11) \quad T^2 = 36 * 9J + 72T.$$

(4.10),(4.11) を (4.9) を通して書き直すと、

$$(4.12) \quad AJ = 891J,$$

$$(4.13) \quad A^2 = 54A + 324J + 567I.$$

$J = A + B + I$ を使うと (4.13) は

$$(4.14) \quad A^2 = 891I + 378A + 324B$$

故にグラフ G のパラメーターは

$$k = 891 \text{ (valency)}, \lambda = 378, \mu = 324$$

これは Conway-Smith graph である。また、途中で導いたものの使わなかった公式を利用すれば、いわゆる Conway-tower を導くことも可能である。Leech lattice に於いては、この他

6-vector (i.e. $(x_0, x_0) = 6$ となるベクトル), 8-vector と Λ_4 の部分集合とから強正則グラフが、既知のものになる。それぞれ頂点の個数が 276, 23 の完全グラフで、グラフ的には面白くないが、276 個のものはいわゆる equiangular lines をなすわけで幾何学的には興味深い対象である。([6] を参照のこと。)

本方法は Venkov[16] の方法を modify して lattice の階数によらず統一的に扱えるようにしたもので、32 変数の lattice で、特別な 8-vector を用いれば Venkov のグラフと同型のものが得られるし、48 変数の extremal lattice で 6-vector を用いれば、やはり Venkov[16] が別のアプローチで導いた SRG を与えることができる。さらに、48 変数の extremal lattice で 8-vector を用いれば新しいグラフを得る。しかし本方法を 40 変数, 64 変数の extremal lattice に適用しても新しい SRG が得られるという見込みは無い。むしろ odd unimodular lattice で minimal vectors で張られるようなものから新しい SRG や良い密着度の equiangular lines を得る見込みの方がはるかに高い。その場合には even weight でない保型形式を整備した上で問題を考えることになるだろう。

参考文献

- [1] P. J. Cameron and J. H. van Lint, Graphs, Codes and Designs, London Math. Soc. Lecture Notes 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980)
- [2] J.H.Conway and N.J.A.Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag 1988.
- [3] E.Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske Vid. Selskab. Math.-fys. Medd. 13 (No. 12, 1940).
- [4] J.Leech, Notes on sphere packings, Canad. J. Math. 19(1967) 251-267.

- [5] J. Leech and N.J.A. Sloane, Sphere packings and error-correcting codes, *Can. J. Math.*, 23(1971) 718-745.
- [6] P. W. H. Lemmens and J. J. Seidel, Equiangular Lines, *J. Algebra* 24, (1973) 494-512.
- [7] F.J. MacWilliams and N.J.A. Sloane, "The Theory of Error-Correcting Codes", North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [8] O.T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer-Verlag, 1963.
- [9] M. Ozeki, On the structure of even unimodular extremal lattices of rank 40, *Rocky Mountain J. Math.* 19 (1989) 847-862
- [10] M. Ozeki, Ternary code construction of even unimodular lattices, in the Proceedings of International Conference held at Quebec in 1987. ed. J.-M. De Koninck and C. Levesque, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1989) 773-784
- [11] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen, *Math. Ann.* 116 (1939), 511-523
- [12] B. Schoeneberg, Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, (1974)
- [13] N.J.A. Sloane, Binary Codes, lattices, and sphere-packings in "Combinatorial Surveys, Proc. 6th British Comb. Conf." ed. by P.J. Cameron, Academic Press (1977) 117-164.
- [14] N.J.A. Sloane, Self-dual codes and lattices, in "Relations between Combinatorics and Other Parts of Mathematics", Proc. Symp. in Pure Math., no. 34 (1979) 273-308.
- [15] B. B. Venkov, The classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms, Proceedings of Steklov Institute of Mathematics, 148 (1980) 63-74
- [16] B. B. Venkov, Unimodular lattices and strongly regular graphs, *Journal of Soviet Math.* 29 (1985), 1121-1127
- [17] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Camb. Univ. Press, 4th ed., 1963

On extended dual polar spaces

Satoshi Yoshiara

Department of Information Science

Faculty of Science

Hirosaki University

3 Bunkyo-Cho, Hirosaki

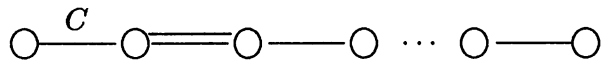
Aomori 036 JAPAN

Abstract

In this report, some recent progress of classification of flag-transitive extended dual polar spaces (FEDP) is described, as well as a construction of a new non-classical FEDP on 896 points with the full automorphism group $2^{1+12} : 3S_7$.

1 FEDPs.

An *extended dual polar space* (abbreviated to EDP) is a residually connected incidence geometry $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_r; *)$ on $I = \{0, \dots, r\}$, belonging to the following diagram (as for standard terminology of incidence geometries, see [12], [8]):



That is, an $I - \{i, j\}$ -residue ($i < j$) is a projective plane if $j = i + 1$ and $i \geq 3$, a generalized quadrangle (abbreviated to GQ) if $(i, j) = (1, 2)$, a circle geometry if $(i, j) = (0, 1)$ and a generalized 2-gon otherwise, where a J -residue means a residue at flags of type J ($J \subseteq I$). Elements of \mathcal{G}_i are called *points*, *lines* and *planes*, respectively for $i = 0, 1$ and 2 . We abbreviate an EDP admitting a flag-transitive automorphism group to an FEDP. An FEDP of rank 3 is called an

FEQ (flag-transitive extended generalized quadrangle) [2], if it satisfies the (LL) property, that is, there is at most one line incident with two distinct points.

An EDP $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_r; *)$ of rank $r + 1$ is called *classical* if its 0-residue $(\mathcal{G}_1(P), \dots, \mathcal{G}_{r-1}(P); *)$ at each point P is a dual polar spaces for classical geometries: That is, if there is a vector space V and a non-degenerate form f of Witt index r on V listed in the table below such that $\mathcal{G}_i(P)$ is the set of totally isotropic (or singular) subspaces of V of projective dimension $r - i$ ($i = 1, \dots, r$) and $*$ is given by inclusion.

Symbol	Space V	Form f
$C_r(q)$	\mathbf{F}_q^{2r}	Symplectic
$B_r(q)$	\mathbf{F}_q^{2r+1}	Quadratic
$D_r(q)$	\mathbf{F}_q^{2r}	Quadratic (+ type)
${}^2D_{r+1}(q)$	$\mathbf{F}_q^{2(r+1)}$	Quadratic (- type)
${}^2A_{2r-1}(q^2)$	\mathbf{F}_q^{2r}	Hermitian
${}^2A_{2r}(q^2)$	\mathbf{F}_q^{2r+1}	Hermitian

In particular, classical GQs (EDP of rank $r = 2$) consist of the following five families: the GQ $W(q) = C_2(q)$ of order (q, q) and its dual $Q(4, q) = B_2(q)$ admitting the simple group $S_4(q) \cong O_5(q)$, the GQ $Q^-(5, q) = {}^2D_2(q)$ of order (q, q^2) and its dual $H(3, q^2) = {}^2A_3(q^2)$ admitting the simple group $O_6^-(q) \cong U_4(q^2)$, and the GQ $H(4, q^2) = {}^2A_4(q^2)$ of order (q^2, q^3) admitting the simple group $U_5(q^2)$ (see [7] 3.1.1 p.36). (Note that the GQ $D_2(q)$ is of order $(q, 1)$, which is not thick. Thus we usually remove this GQ from our list of classical GQs.)

By joining works by Tits, Brouwer and Aschbacher (see [1]), flag-transitive polar spaces of rank ≥ 3 are classified. They are isomorphic either to a classical polar space or to an incidence geometry of rank 3 with 7 points, 35 lines and 15 planes and the full automorphism group A_7 (called the *sporadic A_7 -geometry*). Thus one of the following occurs for an FEDP \mathcal{G} :

- (1) \mathcal{G} is of rank 3 and classical.
- (2) \mathcal{G} is of rank 3 and non-classical.
- (3) \mathcal{G} is of rank 4 with point-residues isomorphic to the sporadic A_7 -geometry.
- (4) \mathcal{G} is of rank ≥ 4 and classical.

2 Classification.

2.1 Cases (1) and (3).

The classical FEDP of rank 3 are completely classified and all of them turn out to be FEQs (see [9],[11], [8],[6] for the precise results and terminology). There are 13 isomorphism classes of such geometries, including one with full automorphism group $HS.2$ found by the author [10].

In the table below, we summarize the fundamental information of these 13 isomorphism classes of FEQs. In the table, G is the full automorphism group of \mathcal{G} , v and c are the number of points and planes, respectively, and (s, t) is the order of the GQ \mathcal{G}_P for a point P . We use the notation in §1 to denote the classical GQs. We set $k := s + 2$, the number of points on a circle. We also set $X_P := G_P/K_P$ and $X_C := G_C/K_C$ for a point P and a circle C , where G_x and K_x ($x = P, C$) denote the stabilizer in G of x and the kernel of the action of G_x on the residue \mathcal{G}_x at x , respectively. The symbol d means the diameter of the point-line graph of \mathcal{G} .

\mathcal{G}	G	v	c	X_P	\mathcal{G}_P	(s, t)	X_C	k	d
\mathcal{A}_∞	$2^5 : S_6$	32	120	S_6	$W(2)$	(2, 2)	S_4	4	3
\mathcal{A}	$2^4 : S_6$	16	60	S_6	$W(2)$	(2, 2)	S_4	4	1
\mathcal{A}_+	S_8	28	105	S_6	$W(2)$	(2, 2)	S_4	4	2
\mathcal{A}_-	$U_4(2).2$	36	135	S_6	$W(2)$	(2, 2)	S_4	4	2
\mathcal{K}^+	$2^6.U_4(2).2$	64	720	$U_4(2).2$	$Q_5^-(2)$	(2, 4)	S_4	4	2
\mathcal{K}^-	$S_6(2) \times 2$	56	630	$U_4(2).2$	$Q_5^-(2)$	(2, 4)	S_4	4	3
\mathcal{K}	$S_6(2)$	28	315	$U_4(2).2$	$Q_5^-(2)$	(2, 4)	S_4	4	1
\mathcal{M}	$McL.2$	275	15400	$U_4(3).2$	$Q_5^-(3)$	(3, 9)	S_5	5	2
\mathcal{O}	$3.O_6^-(3).2^2$	378	1701	$U_4(2).2$	$H_3(4)$	(4, 2)	S_6	6	4
$\bar{\mathcal{O}}$	$O_6^-(3).2^2$	126	567	$U_4(2).2$	$H_3(4)$	(4, 2)	S_6	6	2
\mathcal{U}	$U_5(2).2$	176	1408	$S_4(3).2$	$W(3)$	(3, 3)	S_5	5	2
\mathcal{S}	$Suz.2$	22880	232960	$U_4(3).2$	$H_3(9)$	(9, 3)	M_{11}	11	4
\mathcal{Y}	$HS.2$	1100	11200	$L_3(4).2^2$	$H_3(9)$	(9, 3)	M_{11}	11	2

As for the case (3) in the last section, the following result was proved by the author [15].

Theorem 2.1 *There is a unique isomorphism class of FEDPs of rank 4 with 0-residues isomorphic to the sporadic A_7 -geometry. It is the one point extension of the sporadic A_7 -geometry with the full automorphism group $2^4 : A_7$.*

2.2 Case (4).

As for the case (4), we first consider FEDPs of rank 4. Note that the isomorphism type of $\{0, 3\}$ -residues is restricted to $W(2)$, $Q_5^-(2)$, $Q^4(3)$, $W(3)$, $H_3(2^2)$ or $H_3(3^2)$, since the point-residue is isomorphic to one of the 13 classes of EGQs above.

FEDPs with $\{0, 3\}$ -residues $Q_5^-(2)$ are classified by the author [13]. T. Meixner [5] also characterized the geometry below for $Co.2 \times 2$ as an FEDP satisfying an additional assumption.

Theorem 2.2 *Let \mathcal{G} be a simply connected FEDP of rank 4 with $\{0, 3\}$ -residues the GQ $Q_5^-(2)$. Then*

- (1) \mathcal{G} is a geometry on 6300 points with the full automorphism group $Co.2 \times 2$,
or
- (2) There is a normal subgroup N of $Aut(\mathcal{G})$ with $Aut(\mathcal{G})/N \cong U_6(2).2$.

As for FEDPs with $\{0, 3\}$ -residues $W(2)$, the author proved the following result [13], [14].

Theorem 2.3 *Let \mathcal{G} be a simply connected classical FEDP of rank 4 with $\{0, 3\}$ -residues the GQ $W(2)$, admitting a flag-transitive group G . Then the kernel K_P of the action of the stabilizer G_P of a point P on the residue \mathcal{G}_P at P is either trivial or the natural module for $S_6(2)$ or $O_7(2)$. Furthermore,*

- (1) If $K_P = 1$, then \mathcal{G} is either a geometry on 2^{16} points with $Aut(\mathcal{G}) \cong 2(2^6 \times 2_+^{1+8})S_6(2)$, or a geometry on 32640 points with $Aut(\mathcal{G}) \cong S_8(2)$.
- (2) If $K_P \cong 2^6$, then we get two possible sets of relations presenting G , one of which contains a normal subgroup N with $G/N \cong F_{22}$ or $F_{22}.2$.

Two new FEDPs of rank 4 admitting F_{24} and F_{22} are constructed by the author [14]. The $\{0, 3\}$ -residues of the former are isomorphic to $H_3(2^2)$, while those of the latter are $W(2)$.

It is easy to show that there is no FEDP with $\{0, 3\}$ -residues $Q_4(3)$ or with point residues the EGQ for $HS.2$.

However, as for the case when the $\{0, 3\}$ -residues are isomorphic to $H_3(2^2)$, $W(3)$ or $H_3(3^2)$, there is no classification so far. There are known examples of FEDPs admitting F_{24} , F_{24} and M for those with the $\{0, 3\}$ -residues $H_3(2^2)$, $W(3)$ and $H_3(3^2)$, respectively (as for the latter two, see also [12]). The classification in these cases should be most interesting, but may require some new methods. Because the target geometries have too many points and ranks, not only to handle by hand but also for computers with a normal strage ability at the present time.

As for classical FEDPs of rank greater than 4, nothing is known. However, T. Meixner and the author conjecture that they can be constructed as subgeometries of some (possibly infinite) buildings.

2.3 Case (2).

How about the remaining case (2) ? Unfortunately, flag-transitive GQs have not yet been classified. Among thick GQs, there are four known flag-transitive GQs except the classical GQs and the duals of $H(4, q^2)$ for prime powers q (see [4] p. 98, Summary). They are $T_2^*(O_q)$ for some oval O_q in the projective plane $PG(2, q)$ for $q = 4$ and 16 and their duals. (see [7] 3.1.3 p.38 for $T_2^*(O)$).

By the argument used in Lemma 12 in [11], it is easy to verify that there is no FEQ with 0-residues the dual of $H(4, q^2)$ for any q . However, there is a new FEQ with point-residues the dual of $T_2^*(O_4)$, which is characterized as follows in [15]. (We may show that the full automorphism group of $T_2^*(O_4)$ is isomorphic to $2^6 3S_6$.)

Theorem 2.4 *Up to isomorphism, there is a unique simply connected FEQ with point residues isomorphic to the dual of $T_2^*(O_4)$, admitting an automorphism group inducing $2^6 3A_6$ or $2^6 3S_6$.*

This new FEQ \mathcal{G} is defined on 896 points, having 8192 planes and the full automorphism group $2_+^{1+12} : 3S_7$. An explicit construction of \mathcal{G} will be given in §4 in terms of isotropic 1, 2, 4-spaces of a 8-dimensional unitary space over F_4 . Taking a quotient by the unique central involution of $Aut(\mathcal{G})$, we have an FEQ on 448 points.

3 A construction of a non-classical FEQ.

The non-classical FEQ \mathcal{G} in the previous theorem can be constructed as follows. Let V be a 8-dimensional vector space over \mathbf{F}_4 with a unitary form h , and H a hyperplane perpendicular to an isotropic point, say P_0 . We take for the set \mathcal{G}_3 of “planes” the set of isotropic points outside from H . The stabilizer of P_0 in $SU_8(2)$ (isomorphic to $2_+^{1+12} : SU_6(2)$) has a normal group $K \cong 2^{1+12}$ acting regularly on \mathcal{G}_3 .

The stabilizer U of P_0 and a “plane” P in $SU_8(2)$ is isomorphic to $SU_6(2)$. By explicit construction, we may verify that there are seven 4-isotropic subspaces X_i ($i = 1, \dots, 7$) containing P and a subgroup $A \cong 3A_7$ satisfying the following properties:

- (1) The group A acts transitively on $\{X_i | i = 1, \dots, 7\}$.
- (2) $\dim(X_i \cap H) = 3$ and $\dim(X_i \cap X_j \cap H) = 1$ for any distinct $1 \leq i, j \leq 7$.
- (3) For any fixed X_i , the six 1-dimensional subspaces $(X_i \cap X_j \cap H)$ ($1 \leq j \neq i \leq 7$) form an oval in the projective space $H \cap X_i$.

For example, if we take a unitary form $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^8 x_i y_{9-i}$ on $V = \mathbf{F}_4^8$, $P_0 = [\mathbf{e}_1] = [(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)]$ and $P = [\mathbf{e}_8] = [(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)]$, we may take $X_1 = \langle \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8 \rangle$ and A is generated by the following matrices, where ω is a generator of \mathbf{F}_4^* , $\bar{\omega} = \omega^2$ and we identify A with a subgroup of $SU_6(2)$:

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\omega} & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_4 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega} & 0 & \bar{\omega} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

$$t_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ \bar{\omega} & \bar{\omega} & 1 & 0 & \bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \omega & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

The above elements satisfy the relations, which give a presentation of $3A_7$ (non-split central extension).

$$\mathcal{A} \quad [d, t_i] = 1 \quad (i = 1, \dots, 4), \quad t_j^2 = t_4^3 = (t_j \cdot t_{j+1})^3 \quad (j = 1, 2, 3), \\ (t_i \cdot t_j)^2 = 1 \text{ for any } 1 \leq i < j \leq 4 \text{ with } j - i \geq 2 \text{ except for } (i, j) = (1, 4); \\ (t_1 \cdot t_4)^2 = d^{-1}.$$

In the above, d means the diagonal matrix ωI_6 .

Now we define \mathcal{G}_0 and \mathcal{G}_1 to be the set of seven 4-spaces X_i and $\binom{7}{2} = 21$ 2-spaces $X_i \cap X_j$ ($1 \leq i \neq j \leq 7$) together with their conjugates by $K \cong 2^{1+12}$, respectively. Incidence is determined by inclusion.

By the above property, we can verify that \mathcal{G} is an FEQ, admitting a flag-transitive group $KA \cong 2_+^{1+12} : 3A_7$: For a “plane” P , the residue at P consists of 7 “points” X_i and 21 “lines” $X_i \cap X_j$, so it is a circle geometry with 7 vertices. For a “point” X_1 , the “planes” incident with X_1 are isotropic points of the projective space X_1 outside from the projective plane $X_1 \cap H$. Each “line” incident with X_1 corresponds to an isotropic line joining an isotropic point outside from $H \cap X_1$ and a point $X_1 \cap X_j \cap H$ for some $j = 2, \dots, 7$, which belongs an oval $\{X_1 \cap X_j \cap H | j = 2, \dots, 7\}$ on the projective plane $H \cap X_1$. Thus the residue at X_1 is the dual of $T_2^*(O_4)$.

References

- [1] M. Aschbacher, Flag structures on Tits geometries, *Geom. Dedicata* **14** (1983), 21–32.
- [2] P. Cameron, D. Hughes and A. Pasini, Extended generalized quadrangles, *Geom. Dedicata* **35** (1990), 193–228.
- [3] J. W. P. Hirschfeld, “Projective Geometries over Finite Fields”, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1979.

- [4] W. Kantor, Generalized polygons, SCABs and GABs, pp.79-158 in *Buildings and the Geometry of Diagrams*, Springer Lecture Notes 1181, Springer, 1986.
- [5] T. Meixner, A geometric characterization of the simple group Co_2 , to appear in *J. Algebra*.
- [6] T. Meixner, A computer-free proof of a theorem of Weiss and Yoshiara, submitted for publication.
- [7] S. E. Payne and J. A. Thas, "Finite Generalized Quadrangles", Research Notes in Math. 110, Pitman, 1984.
- [8] A. Pasini and S. Yoshiara, Flag-transitive Buekenhout geometries, to appear in *Reports of Gaeta Conference (1990)* (Gaeta, May 1990).
- [9] R. Weiss and S. Yoshiara, A geometric characterization of the groups Suz and HS , *J. Algebra* **133** (1990), 182–196.
- [10] S. Yoshiara, A locally polar geometry associated with the group HS , *Europ. J. Combinatorics* **11** (1990), 81–93.
- [11] S. Yoshiara, A classification of flag-transitive classical $c.C_2$ -geometries by means of generators and relations, *Europ. J. Combinatorics* **12** (1991), 159–181.
- [12] S. Yoshiara, Some recent works on flag-transitive geometries of type $c^k X_m$, pp. 168–178 in *Reports on Symposium in Algebraic Combinatorics* (Hirosaki Univ., July 1990), Ed. H. Kimura, 1990.
- [13] S. Yoshiara, On some extended dual polar spaces I, submitted for publication.
- [14] S. Yoshiara, On some extended dual polar spaces II, in preparation.
- [15] S. Yoshiara, On some non-classical extended dual polar spaces, in preparation.

0 - design から 2 - design

鳥根大学 教育学部 辻 卓見

1. はじめに

P を要素の数が v の finite set, B を P の k -subsets の family で $|B| = b$ として, design $D = (P, B)$ を考え, 0-design 又は (b, v, k) design と呼ぶことにする. また P の要素を点, B の要素をブロックと呼ぶことにする.

D を記述するための基本的な記号として以下のものを用いる.

l_p : 点 p を含むブロックの数, 即ち $p \in P$ とするとき $l_p = \#\{ \alpha \in B \mid p \in \alpha \}$.

l_{pq} : 点 p, q を含むブロックの数, 即ち $p, q \in P$ とするとき $l_{pq} = \#\{ \alpha \in B \mid p, q \in \alpha \}$.

$m_{\alpha\beta}$: ブロック α, β に共通に含まれる点の数, 即ち $\alpha, \beta \in B$ とするとき

$$m_{\alpha\beta} = \#\{ p \in P \mid p \in \alpha \cap \beta \}.$$

以後 p, q は点を, α, β はブロックを指すことにする.

D が 1-design であるとは, l_p が p によらず一定の値 r となる時を言い $1-(b, v, k)$ design と書くことにする. このとき $r = bk/v$ となる.

D が 2-design であるとは, l_{pq} が $p \neq q$ のとき一定の値 λ である時を言い $2-(b, v, k)$ design と書くことにする. このとき $\lambda = bk(k-1)/(v(v-1))$ で 1-design となる.

D が quasi-symmetric design であるとは, $m_{\alpha\beta}$ が $\alpha \neq \beta$ のとき x または y の高々 2 種類の値しかとらないときを言い $QS(b, v, k)x, y$ design と書くことにする.

ここではある条件を満たす quasi-symmetric design は 2-design になること, および design のある種の不存在条件が得られたので報告する.

まず主要な結果を以下にまとめておく.

Lemma 1. D を (b, v, k) design とする.

(i) 以下の等式が成立する.

$$\sum_{\{p,q\} \subset P} (l_p + l_q - 2\frac{bk}{v})^2 = 2(v-2) \sum_{\{\alpha,\beta\} \subset B} \left(m_{\alpha\beta} - \frac{k}{b-1} \left(\frac{bk}{v} - 1 \right) \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\{p,q\} \subset P} \left(l_{pq} - \frac{k-1}{v-2} (l_p + l_q) + \frac{bk(k-1)}{(v-1)(v-2)} \right)^2 \\ &= \sum_{\{\alpha,\beta\} \subset B} \left(m_{\alpha\beta}^2 - \left(1 + 2\frac{(k-1)^2}{v-2} \right) m_{\alpha\beta} + \frac{k(k-1)}{b-1} \left(1 - \frac{2(k-1)}{v-2} + \frac{bk(k-1)}{(v-1)(v-2)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで summation はそれぞれ P, B の全ての 2-subsets にわたる.

(ii) (1) の値を A_1 , (2) の値を A_2 とすると, $A_1, A_2 \geq 0$ で,

$A_1 = 0 \Leftrightarrow D$ は 1-design, $A_1 = A_2 = 0 \Leftrightarrow D$ は 2-design.

Theorem 2. D が $QS(b, v, k)x, y$ design で以下の (3), (4) をみたすなら 2-design である.

$$(b-1)xy - k \left(\frac{bk}{v} - 1 \right) (x+y-1) + k(k-1) \left(b \frac{k(k-1)}{v(v-1)} - 1 \right) = 0 \quad (3)$$

$$x+y < 2\frac{(k-1)^2}{v-2} + 1 \quad (4)$$

ここで (3) は D が QS 2-design であるための必要条件である.

2. Theorem 2 の例

$QS(b, v, k)0, 1$ design: (4) は明らかに成立する. (3) は $b \frac{k(k-1)}{v(v-1)} = 1$ と同値. よって (3), (4) が成立するときは $\lambda=1$ の $2-(b, v, k)$ design となる. 逆に $\lambda=1$ の $2-(b, v, k)$ design は明らかに $QS(b, v, k)0, 1$ design となる.

$QS\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}, k\right)1, 2$ design: $k \geq 4$ のとき, 計算により (3), (4) が成り立ち $\lambda=2$ となることがわかる. 逆に, 上記のパラメータを持つ $2-(b, v, k)$ design は quasi-symmetric である (Hall [5, Lemma 16.1.2]).

$k=3$ のとき, $b=10, v=6$ で (3) は成り立つが (4) は等式となり成立しない.

このとき $QS 2-(10, 6, 3)$ design は存在し, かつ 2-design でない $QS(10, 6, 3)1, 2$

design も存在する。後者は 5 点からなる点集合 P' と、 P' の全ての 2-subsets からなるブロックの family B' を考え、それに新たな点 p を加え、 $P = P' \cup \{p\}$, $B = \{\alpha \cup \{p\} \mid \alpha \in B'\}$ として design $D = (P, B)$ を作ればよい。

QS(253,23,7)1,3 design : (3), (4) が成り立ち 2-design となる。この 2-design に Calderbank [2, Th.2] 又は Hobart [6, Th.1] の結果を適用すると Witt 4-design になる。

その他 Neumaier [7, Table 1] より (3),(4) を満たし、かつ存在するものをリストアップする。

b	v	k	x	y	$2(k-1)^2 / (v-2) + 1$
56	21	6	0	2	3.63...
120	21	7	1	3	4.79...
77	22	6	0	2	3.5
176	22	7	1	3	4.6
253	23	7	1	3	5.67...
63	28	12	4	6	10.31...
63	36	16	6	8	14.24...

3. Quasi-symmetric design について

$D = (P, B)$ を $QS(b, v, k)_{x, y}$ design とするとき、ブロックを頂点に対応させ、 $m_{\alpha\beta} = x$ のとき α と β は結ばれていると定義することにより無向グラフができる。このグラフを $G(D)$ と書くことにする。

QS design D において $d_x(\alpha) = \#\{\beta \mid m_{\alpha\beta} = x\}$, $d_y(\alpha) = \#\{\beta \mid m_{\alpha\beta} = y\}$ とすると、

$$d_x(\alpha) + d_y(\alpha) = b - 1 \quad (5)$$

であり、 $d_x(\alpha)$ は $G(D)$ の頂点 α の次数に対応する。

D が QS 1-design のとき各 $\alpha \in B$ に対し $\#\{(p, \beta) \mid p \in \alpha \cap \beta, \beta \neq \alpha\}$ を数えることにより、

$$x d_x(\alpha) + y d_y(\alpha) = k(r - 1) \quad (6)$$

を得る。

(5),(6) より $d_x(\alpha)$, $d_y(\alpha)$ は α に拠らずに定まり, $G(D)$ は regular graph となる.

D が QS 2-design のとき各 $\alpha \in B$ に対し $\#\{(\{p,q\},\beta) \mid \alpha \cap \beta \supset \{p,q\}, \beta \neq \alpha\}$ を数えることにより,

$$\binom{x}{2} d_x(\alpha) + \binom{y}{2} d_y(\alpha) = \binom{k}{2} (\lambda - 1) \quad (7)$$

を得る.

(5),(6),(7) より (3) を得る, 即ち Theorem 2 において (3) は QS 2-design であるための必要条件である. このとき $G(D)$ は strongly regular graph となる (Cameron [3, Theorem 3.2]).

quasi-symmetric design についての文献としては Calderbank [2], Hobart [6], Neumaier [7] などがあるがいずれも regular 性を前提にして理論を進めている.

4. 証明

$D=(P,B)$ を QS(b,v,k) x,y design とするとき, 以下の基本的な等式が成り立つ.

D において $\#\{(p,\alpha) \mid p \in \alpha\}$ を数えることにより,

$$\sum_{p \in P} l_p = bk \quad . \quad (8)$$

D において $\#\{(p,(\alpha,\beta)) \mid p \in \alpha \cap \beta, (\alpha,\beta) \in B \times B\}$ を数えることにより,

$$\sum_{p \in P} l_p^2 = \sum_{(\alpha,\beta) \in B \times B} m_{\alpha\beta} \quad , \quad (9)$$

ここで右辺の summation は B の全ての ordered pairs にわたる.

D において $\#\{(\{p,q\},\alpha) \mid \alpha \supset \{p,q\}\}$ を数えることにより,

$$\sum_{\{p,q\} \subset P} l_{pq} = b \binom{k}{2} \quad . \quad (10)$$

D において $\#\{(\{p,q\},(\alpha,\beta)) \mid \alpha \cap \beta \supset \{p,q\}, (\alpha,\beta) \in B \times B\}$ を数えることにより,

$$\sum_{\{p,q\} \subset P} l_{pq}^2 = \sum_{(\alpha,\beta) \in B \times B} \binom{m_{\alpha\beta}}{2} \quad . \quad (11)$$

各 $p \in P$ に対して, $\#\{(q,\alpha) \mid \alpha \supset \{p,q\}, q \neq p\}$ を数えることにより,

$$\sum_{q \in P - \{p\}} l_{pq} = (k-1)l_p \quad . \quad (12)$$

(12) より,

$$\sum_{\{p,q\} \subset P} (l_p + l_q) l_{pq} = \frac{1}{2} \left(\sum_{p \in P} \left(l_p \sum_{q \in P - \{p\}} l_{pq} \right) + \sum_{q \in P} \left(l_q \sum_{p \in P - \{q\}} l_{pq} \right) \right) \quad (13)$$

$$= (k-1) \sum_{p \in P} l_p^2 .$$

(8) ~ (11) および (13) をもとにして, $\sum_{(\alpha, \beta) \in B \times B} = 2 \sum_{\{\alpha, \beta\} \subset B} + \sum_{\alpha \in B}, m_{\alpha} \alpha = k$

に注意して計算をすると (1),(2) を得る.

Lemma 1 (ii) は明らか.

Note(i) (1),(2) の左辺は以下の手順で求める.

P の 2-subset を index とする 3 つの $\binom{v}{2}$ 次のベクトル V_0, V_1, V_2 を考える. ここで V_0 は全ての要素が 1 のベクトル, V_1 は $\{p,q\}$ 要素を $l_p + l_q$, V_2 は $\{p,q\}$ 要素を l_{pq} とするベクトルとする. これを順に直交化することにより V_0, W_1, W_2 を得る. ここで W_1 の $\{p,q\}$ 要素は $l_p + l_q - 2\frac{bk}{v}$, W_2 の $\{p,q\}$ 要素は $l_{pq} - \frac{k-1}{v-2}(l_p + l_q) + \frac{bk(k-1)}{(v-1)(v-2)}$ となる. W_1, W_2 それぞれのノルムの 2 乗に対応するのが (1),(2) である.

Note(ii) A_1, A_2 はそれぞれ Johnson scheme $J(v,k)$ における B の dual distribution $b = (b_0, b_1, \dots, b_k)$ の b_1, b_2 と v, k から定まる正の数の積に一致する.

Lemma 1 (ii) より次の Lemma を得る.

Lemma 3. D を (b, v, k) design とする. (1) の値を A_1 , (2) の値を A_2 として, $A(c)$ を以下のように定めるとき, $A(c) \geq 0$ for $\forall c \geq 0$ であり, ある $c > 0$ に対して $A(c) = 0$ ならば D は 2-design である.

$$A(c) = A_2 + \frac{c}{2(v-2)} A_1 \quad (14)$$

$$= \sum_{\{\alpha, \beta\} \subset B} \left(m_{\alpha\beta}^2 - c_1 m_{\alpha\beta} + c_2 \right) ,$$

ここで,

$$c_1 = 1 + 2 \frac{(k-1)^2}{v-2} - c ,$$

$$c_2 = \frac{k(k-1)}{b-1} \left(1 - \frac{2(k-1)}{v-2} + \frac{bk(k-1)}{(v-1)(v-2)} \right) - c \frac{k}{b-1} \left(\frac{bk}{v} - 1 \right) .$$

(14) の summation のなかに注目して, $x_d(c), y_d(c)$ を 2 次方程式 $z^2 - c_1 z + c_2 = 0$ の根とするとき次の Lemma を得る.

Lemma 4. x, y が Theorem 2 の (3) を満たすとき, $c = 1 + 2 \frac{(k-1)^2}{v-2} - (x+y)$ とすると $\{x, y\} = \{x_d(c), y_d(c)\}$ である.

Proof. 2 次方程式における根と係数の関係を調べればよい. c の定義より,

$$x + y = 1 + 2 \frac{(k-1)^2}{v-2} - c = c_1 .$$

(3) を書き直して,

$$x y = \frac{k(k-1)}{b-1} \left(1 - \frac{2(k-1)}{v-2} + \frac{bk(k-1)}{(v-1)(v-2)} \right) - \left(1 + 2 \frac{(k-1)^2}{v-2} - x - y \right) \frac{k}{b-1} \left(\frac{bk}{v} - 1 \right) = c_2 .$$

Lemma 3, Lemma 4 より Theorem 2 が直ちに得られる.

5. その他の結果

Lemma 3 と Lemma 4 より直ちに次の Theorem を得る.

Theorem 5. (3),(4) をみたすある $x < y$ に対し, $x \leq m_{\alpha\beta} \leq y$ for $\forall \alpha \neq \beta \in B$ かつ $x < {}^3m_{\alpha\beta} < y$, となる (b, v, k) design は存在しない.

D を 1-design とするとき, Lemma 3 で定義した $A(c)$ について Lemma 1 (ii) より次の Lemma を得る.

Lemma 6. D を 1-design とするとき, $A(c)$ は 0 以上の定数であり, この定数が 0 なら D は 2-design である.

Lemma 6 と Lemma 4 より直ちに次の Theorem を得る.

Theorem 7. (3) をみたすある $x < y$ に対し, $x \leq m_{\alpha\beta} \leq y$ for $\forall \alpha \neq \beta \in B$ かつ $x < {}^3m_{\alpha\beta} < y$, となる $1-(b, v, k)$ design は存在しない.

Corollary 8. $\frac{k(k-1)}{v-1} \leq m_{\alpha\beta}$ for $\forall \alpha \neq \beta \in B$ かつ $\frac{k(k-1)}{v-1} < \exists m_{\alpha\beta} < k$, となる $1-(b, v, k)$ design は存在しない.

Proof. $x = k(k-1)/(v-1)$, $y = k$ とすれば, (3) をみたら.

これより次の Theorem (Frankl and Füredi [4, Lemma 5.5], Calderbank [1]) の別証明を得る.

Theorem 9. D は $1-(b, v, k)$ design で, $m_{\alpha\beta} \geq m > 0$ for $\forall \alpha \neq \beta \in B$ ならば, $m \leq \frac{k(k-1)}{v-1}$ で, 等号が成立することと D が symmetric 2-design であることは同値.

Proof. 不等式と $m_{\alpha\beta} = \frac{k(k-1)}{v-1}$ は Corollary 8 より直ちに得られ, Lemma 6 より D は 2-design となる.

References

1. A.R.Calderbank, Symmetric Designs as the Solution of an Extremal Problem in Combinatorial Set Theory, *Europ. J. Combinatorics* 8 (1987) 171-173.
2. A.R.Calderbank, Inequalities for Quasi-Symmetric Designs, *J. Combinatorial Th. A* 48 (1988) 53-64.
3. P.J.Cameron and J.H.van Lint, *Graphs, Codes and Designs*, London Math. Soc. Lecture Note Series 43 Cambridge Univ. Press (1980).
4. P.Frankl and Z.Füredi, Finite Projective Spaces and Intersecting Hypergraphs, *Combinatorica* 6 (1986) 335-354.
5. M.Hall Jr., 組合せ理論, 吉岡書店 岩堀 信子 訳 (1974).
6. S.A.Hobart, A Characterization of t -Designs in Terms of the Inner Distribution, *Europ. J. Combinatorics* 10 (1989) 445-448.
7. A.Neumaier, Regular Sets and Quasi-Symmetric 2-Designs, *Lectur Notes in Math.* No. 969 Springer (1982) 258-275.

A family of translation planes of order q^{2m+1} with two orbits of length 2 and $q^{2m+1} - 1$ on ℓ_∞

尼崎南高校 末竹千博

§1. Introduction

筆者は [7] で次の結果を証明した; π を奇数位数 n の有限アフィン平面で π のアフィン points 上可移作用する collineation group G をもつものとする。このとき, もし G が ℓ_∞ 上長さ 2 と長さ $n-1$ の 2 つの orbit をもつならば π は translation plane である。(最近筆者は偶数位数の場合も解決した。)

generalized André plane でない) このような planes は筆者 [6], 平峰 [3] によって発見された。これらの planes の kernel 上の次元は 3 である。ここでは, 平峰 [3] によって構成された planes を大山 [9] の方法を用いて kernel 上の次元が $2m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) である位数 q^{2m+1} (q は任意の奇素数中) の planes に一般化する。kernel 上の次元が限りなく

大きくなる translation planes のクラスの例は非常に少なく, この面でもこの構成は意味があると思う。

§2. Planes の構成

$F = GF(q^n) \supseteq K = GF(q)$ とする。ここで q は奇素数中で n は 3 以上の奇数とする。任意の $x \in F$ に対して $x^{(i)} = x^{q^i}$ ($i \in \mathbb{Z}$), $N(x) = x x^{(1)} \cdots x^{(n-1)}$ とおく。 $[a] = (a, a^{(1)}, \dots, a^{(n-1)})$ ($a \in F$) とおくと, $V = \{[a] \mid a \in F\}$ は自然に加法, スカラー積を定義して K 上 n 次元ベクトル空間になる。 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in F$ に対して

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = \begin{pmatrix} a_0 & (a_{n-1})^{(1)} & \cdots & (a_1)^{(n-1)} \\ a_1 & (a_0)^{(1)} & \cdots & (a_2)^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & (a_{n-2})^{(1)} & \cdots & (a_0)^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

とおく。更に $M(n, q)^* = \{[a_0, \dots, a_{n-1}] \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in F\}$, $GL(n, q)^* = \{M \in M(n, q)^* \mid \det M \neq 0\}$ とおく。このとき, $\text{End}_K(V) = \{V \ni [x] \longrightarrow [x]M \in V \mid M \in M(n, q)^*\}$, $GL(V, K) = \{V \ni [x] \longrightarrow [x]M \in V \mid M \in GL(n, q)^*\}$ 。

$\Sigma \subseteq GL(n, q)^* \cup \{0\}$ とする。このとき、
 Σ : spread set $\stackrel{\text{def}}{\iff} \cdot \Sigma \ni 0, |\Sigma| = q^n$
 $\cdot \det(M-N) \neq 0$ for $M, N \in \Sigma$ (\neq)

spread set Σ に対応する位数 q^n の translation plane π は次のようにして定義される。

π の点は $V \times V$ の元

π の直線は $L(M) + (v, w)$

ここで、 $M \in \Sigma \cup \{\infty\}$, $(v, w) \in V \times V$

$L(M) = \{([x], [x]M) \mid x \in F\}$ ($M \in \Sigma$)

$L(\infty) = \{([0], [x]) \mid x \in F\}$

結合関係は包含関係で定義する。

$I(x) = [x, 0, \dots, 0] \in M(n, q)^*$, $J = [0, 1, 0, \dots, 0] \in GL(n, q)^*$ とおく。

以下、次を仮定する。 u : K の非平方元、
 $1 \leq i \leq (n-1)/2$, $(i, n) = 1$ とする。更に $a, b \in F^*$ で $N(a) + N(b) \neq 0$ とする。

$(-i-i, n) = (-2i, n) = 1$ 故 $\det(J^i I(a) + J^{-i} I(b)) = N(a) + N(b) \neq 0$ 。任意の $x \in F$ に対して $P(x) = I(x)(J^i I(a) + J^{-i} I(b))I(x)$, $Q(x) = I(x) \cdot u \cdot P(x)^{-1} \cdot I(x)$ とおく。 $\neq \Sigma_{i, a, b} = \{P(x) \mid x \in F\} \cup$

$\{Q(x) \mid x \in F\}$ とおく。これが spread set になることを示す。このことを示すのに次の(1)から(3)の事実を必要とする。(3)の証明は多少の工夫を必要とする。

$$(1) \quad k, l \in \mathbb{N}, \quad l \text{ は奇数} \quad \square \quad (f^{k+1}, f^{l-1}) = 2$$

$$(2) \quad \bullet \quad P(x) = u \cdot Q(x^{-1})^{-1}, \quad Q(x) = u \cdot P(x^{-1})^{-1} \quad \text{for } x \neq 0$$

$$\bullet \quad x, y \in F^* \text{ とする。}$$

$$P(x) = P(y) \Leftrightarrow xy^{-1} \in \{\pm 1\}$$

$$Q(x) = Q(y) \Leftrightarrow xy^{-1} \in \{\pm 1\}$$

$$(3) \quad c, d \in F^*, \quad A = J^{-1}I(c) + J^{-1}I(d) = (a_{rs})_{0 \leq r, s \leq n-1}$$

とする。このとき、 A の奇数次 (≠ n) の小行列

式は 0 である。

定理 1 $\sum_{i, a, b}$ は spread set である。

証明) (2) より次を示せばよい。(a) $f(x) =$

$\det(P(x) - P(1)) \neq 0$ for $x \in F - \{\pm 1\}$, (b) $g(x) =$

$\det(P(x) - Q(1)) \neq 0$ for $x \in F$ 。

(1) より $f(x) = (N(a) + N(b))N(x^{2^k+1} - 1) \neq 0$ for

$x \in F - \{\pm 1\}$ 。次に $g(0) \neq 0$ 故 $x \neq 0$ としてよい。

$g(x) = 0$ と仮定する。明らかに $g(x) = \det P(1)^{-1}((P(1) \cdot$

$I(x))^2 - uI)$ 。 $\therefore \det(uI - (P(1)I(x))^2) = 0$

$r(x, \lambda) \in P(1)I(x)$ の特性多項式とする。 $P(1)I(x)$ は

$GL(n, \mathbb{F})$ のある行列と共役 (大山 [5] を見よ) であるので,
 $\gamma(x, \lambda)$ は次数 n の K 上の多項式。 $z_0, \dots, z_{n-1} \in \overline{F}$
 を $P(1)I(x)$ の固有値とする。ここで \overline{F} は F の代数的閉包。
 このとき, ある λ に対して $u^2 = z_j$ 。 $\therefore \gamma(x, \lambda)$
 $= (\lambda^{n-2} + r_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots + r_1\lambda + r_0)(\lambda^2 - u)$ ($r_{n-3},$
 $\dots, r_0 \in K$) $\therefore \gamma(x, \lambda) = \lambda^n + r_{n-3}\lambda^{n-1} + \dots$
 $+ (r_{n-4} - u)\lambda^{n-2} + (r_{n-5} - u r_{n-3})\lambda^{n-3} + \dots$
 $+ (r_0 - u r_2)\lambda^2 - u r_1\lambda - u r_0$ 一方 (3) によつて
 $\gamma(x, \lambda) = \lambda^n + c_{n-2}\lambda^{n-2} + c_{n-4}\lambda^{n-4} + \dots + c_1\lambda$
 $- N(x)(N(a) + N(b))$ ($c_{n-2}, c_{n-4}, \dots, c_1 \in K$)
 $\therefore r_{n-3} = r_{n-5} - u r_{n-3} = r_{n-7} - u r_{n-5} = \dots$
 $r_0 - u r_2 = 0$ これより $r_{n-3} = r_{n-5} = r_{n-7} = \dots$
 $= r_0 = 0$ しかしながら $N(x)(N(a) + N(b)) \neq 0$ 故
 $r_0 \neq 0$ これは矛盾。 \square

spread $\Sigma_{i, a, b}$ に対応する位数 q^m の translation
 plane を $\pi_{i, a, b}$ で表わすことにする。

§ 3. Generalized twisted field planes

$\pi_{i, a, b}$ は spread set $\Sigma_s = \Sigma_{s, i, a, b} = \{P(x)$
 $| x \in F\} \cup \{u P(x) | x \in F\}$ によつて定義される

generalized twisted field plane $\pi_s = \pi_{s,i,a,b}$ を変形してできたものである。次の § で $\pi_{s,i,a,b}$ の linear translation complement を求めるが、そのためには $\pi_{s,i,a,b}$ の linear translation complement $LC(\pi_s)$ を計算しておく必要がある。まず π_s の kern homologies の群は $K_0 = \left\{ \begin{pmatrix} I(x) & 0 \\ 0 & I(x) \end{pmatrix} \mid x \in K^* \right\}$ であることが言える。次が Huppert の定理 [4] を用いて証明される。

定理 2 (i) $LC(\pi_s)_{L(\infty)} = LC(\pi_s)$ で " $LC(\pi_s)$ は $\mathbb{F}_s - \{L(\infty)\}$ 上可解 2 重可換群。ここで、 $\mathbb{F}_s = \{L(M) \mid M \in \Sigma_s \cup \{\infty\}\}$ 。

(ii) $LC(\pi_s)_{L(0), L(p(u))} / K_0$ は位数 n の cyclic group である。

§ 4. $\pi_{s,i,a,b}$ の linear translation complement

$\pi_{s,i,a,b}$ の linear translation complement G を求めるためには多くの計算が必要とする。次が定理 2 と 2 重可換群に関する分類定理 ([1], [2], [3]) を用いて証明される。

定理 3 (i) $q^n \neq 3^3$ ならば " $\{L(\infty), L(0)\}$ と

$\{P(x) \mid x \in F^*\} \cup \{Q(x) \mid x \in F^*\}$ は G -orbit である。

(i) $q^n \neq 3^3$ ならば $|G| = n(q^n - 1)(q - 1)$

(ii) $q^n = 3^3$ ならば $\pi_{i,a,b}$ は位数 27 の Herwig plane である。

なお、 $\pi_{i,a,b}$ の kern homologies の群が大であることもわかった。筆者にはすべての $\pi_{i,a,b}$ が generalized André plane ではないように思えるが、次のことしか証明できていない。

定理 4 もし次の条件のどれか一つが成りたてば π は generalized André plane ではない。

(i) $(ne, (q^n - 1)(q - 1)^{-1}) = 1$

ここで、 $q = p^e$, p は素数

(ii) n は素数

(iii) q は素数で $a, b \in K^*$

§5. 数え上げ

我々が定義した plane $\pi_{i,a,b}$ の個数を調べる。

$\Pi = \{ \pi_{i,a,b} \mid 1 \leq i \leq (n-1)/2, (i,n) = 1, a, b \in F^*, N(a) + N(b) \neq 0 \}$ とおく。

定理 5 (i) $\pi_{i,a,b} \in \Pi \implies \pi_{i,a,b} \cong \pi_{i,1,b'}$

であるような $\pi_{\alpha, \pm, b} \in \Pi$ が存在する。

$$(i) \pi_{\alpha, \pm, a} \cong \pi_{\beta, \pm, b} \implies \alpha = \beta$$

$$(ii) \pi_{\alpha, \pm, a} \cong \pi_{\alpha, \pm, b} \iff (N(a))^{\sigma} = N(b) \text{ である } \sigma \in \text{Aut } F \text{ が存在する。}$$

$$(iv) q: \text{素数} \implies |\Pi / \cong| = \varphi(n) (q-2)/2$$

ここで φ はオイラー関数である。

今後の研究の方向としては plane $\pi_{\alpha, \pm, a, b}$ をより広いクラスの一群としてとらえなおすこと (例えば "semifield plane" の関連からとらえなおす), 更にはその特徴づけを与えることが必要であろう。

文献

- [1] H. Bender, Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen deren Involutionsen keine Fixpunkte haben, Math. Z. 104 (1968), 175-204.
- [2] C. Herzig, Zweifach transitive Permutationsgruppen, in denen 2 die

maximale Anzahl von Fixpunkten von Involutionen ist, Math. Z. 104 (1968), 150-174.

- [3] Y. Hiramine, On translation planes of order q^3 with an orbit of length q^3-1 on ℓ_∞ , Osaka J. Math. 23 (1986), 563-575.
- [4] B. Huppert, Zweifach transitivie, auflösbare Permutationsgruppen, Math. Z. 68 (1957), 126-150.
- [5] T. Oyama, On quasifields, Osaka J. Math. 22 (1985), 35-54.
- [6] C. Suetake, A new class of translation planes of order q^3 , Osaka J. Math. 22 (1985), 773-786.
- [7] C. Suetake, On finite point transitivie affine planes with two orbits on ℓ_∞ , Osaka J. Math. 27 (1990), 271-276.

有限正則アフィン平面

1991/11/10

1 序

これまでに R. Bare, J. Andre, T. G. Ostrom, A. Wagner, M. J. Kallaher, N. L. Johnson, R. A. Liebler, Y. Hiramine などによりなされてきた有限アフィン平面の研究の主要部分の一つに、点集合上又は直線集合上可移に働く自己同形群を有する有限アフィン平面に関する研究がある。有限アフィン平面のなかで、特にその構造の見易いものとして移行平面

(Translation planes) がある。(その定義は § 2 で述べる) 有限アフィン平面 Λ の或る自己同形群が Λ の点集合上二重可移に働くならば、 Λ は移行平面 (1959, Ostrom, Wagner)。 Λ の或る自己同形群が Λ の直線集合上可移に働くならば、 Λ は移行平面 (1965, Wagner)。 Λ の或る自己同形群が Λ の点集合上原始的に働くならば、 Λ は移行平面 (1990, Hiramine) などが既知の主な結果であるが、他にも種々の条件を付加した上で可移平面が移行平面であることを示した幾つかの定理が知られている。([3], [4] § 9 ~ § 15 参照) 移行平面の分類問題も残された大きな問題であるが、移行平面に導くこと、或は移行平面以外のアフィン平面を見出すことを当面の目標に据えるならば、非原始的可移平面の研究が残された部分(可移平面の研究中)となる。ここでは非原始的可移平面の特別な場合である正則平面(点集合上正則に働く自己同形群を有する有限アフィン平面)について、今まで知られていることを述べてみたいと思う。

2. 移行平面

Ω を点集合、 \mathfrak{B} をブロック集合とする結合構造 $\mathcal{A}(\Omega, \mathfrak{B}, I)$ で、次の公理を満たすものをアフィン平面という。ここに $\Lambda \in \Omega$, $\ell \in \mathfrak{B}$, $\Lambda I \ell$ のとき、点 Λ はブロック ℓ 上にある、ブロック ℓ は点 Λ を通るといふ。2つのブロック ℓ, m に対し、 ℓ と m の両方の上にある点(共有点)が存在しないか、 $\ell = m$ となるとき、 ℓ と m は平行であるといふ。このとき $\ell \parallel m$ とかく。

- (1) $\forall \Lambda, \forall B \in \Omega (\Lambda \neq B)$ に対して、 Λ, B を通るブロック ℓ が唯一つ存在する。
- (2) $\forall \Lambda \in \Omega, \forall \ell \in \mathfrak{B}$ に対して、 Λ を通り、 ℓ に平行なブロック m が唯一つ存在する。
- (3) 同一ブロックに含まれない三点 Λ, B, C が存在する。

以下ブロックを直線と呼び、 ℓ と $(\Lambda \in \Omega \mid \Lambda \text{ は } \ell \text{ 上にある})$ を同一視する。また

"||" は \mathfrak{S} の元の間と同値関係を与える。以下 Ω , \mathfrak{S} が有限集合のときを考える。

このとき、ある自然数 n ($n \geq 2$) が存在して、各直線 ℓ に含まれる点の個数は n 、各点 Λ を通る直線の個数は $n+1$ 、 $|\Omega| = n^2$ 、 $|\mathfrak{S}| = n^2 + n$ となり、直線の平行類の個数は $n+1$ 、各平行類に含まれる直線の個数は n となる。このような n をアフィン平面 $\Lambda(\Omega, \mathfrak{S}, I)$ の位数という。

$(\Lambda_1(\infty), \Lambda_2(\infty), \dots, \Lambda_{n+1}(\infty))$ を異なる全ての平行類とし、 $\Omega^* = \Omega \cup (\Lambda_1(\infty), \Lambda_2(\infty), \dots, \Lambda_{n+1}(\infty))$ 、 $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S} \cup \{\ell(\infty)\}$ と置き、 $\Lambda \in \Omega$, $\ell \in \mathfrak{S}$ に対し、 $\Lambda I \ell \Leftrightarrow \Lambda I \ell$, $\Lambda_i(\infty) I \ell \Leftrightarrow \ell \in \Lambda_i(\infty)$, $\Lambda_i(\infty) I \ell(\infty)$ (for all $i=1, 2, \dots, n+1$) と置くと $(\Omega^*, \mathfrak{S}^*, I^*)$ は $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -対称デザイン (位数 n の射影平面) となる。 ($\Lambda(\Omega, \mathfrak{S}, I)$ の射影閉包)。

(定義) σ がアフィン平面 $\Lambda(\Omega, \mathfrak{S}, I)$ の自己同形 \Leftrightarrow

$$\sigma \text{ が } \Omega \text{ 上の置換で、 } \ell \in \mathfrak{S} \text{ に対して } (\Lambda \sigma \mid \Lambda \in \ell) \in \mathfrak{S}$$

(σ は \mathfrak{S} 上の置換とも考えられる)

$\Lambda = \Lambda(\Omega, \mathfrak{S}, I)$ と置く。 Λ の自己同形全体は写像の合成に関して群をなす。

これを Λ の全自己同形群と呼んで、 $\text{Aut}(\Lambda)$ で表す。

$\text{Aut}(\Lambda)$ の元 σ が、 $\ell \in \mathfrak{S}$ に対して $\ell \parallel \ell \sigma$ 且つ一つの平行類 $\Lambda(\infty)$ に対して「 $\ell \in \Lambda(\infty) \Rightarrow \ell \sigma = \ell$ 」となるとき、 σ を方向 $\Lambda(\infty)$ の、 Λ の translation と言う。 Λ の translations 全体がなす群を Λ の移行群 (Λ の translation group) と呼び

$T(\Lambda)$ で表す。又方向 $\Lambda(\infty)$ の Λ の translations 全体がなす群を

$T(\Lambda(\infty), \ell(\infty))$ で表す。 $\text{Aut}(\Lambda)$ の部分群 G が $(\Lambda(\infty), \ell(\infty))$ 可移であるとは、「 $\Lambda(\infty) \ni \ell$ に対し、 $G \cap T(\Lambda(\infty), \ell(\infty))$ が (ℓ) 上に可移である」が成り立つときをいう。ここで (ℓ) は ℓ 上にある全ての点の集合を表す。

$\text{Aut}(\Lambda)$ の部分群 G が Ω 上可移に働き、「 $\Lambda \sigma = \Lambda$ ($\Lambda \in \Omega$, $\sigma \in G$) $\Rightarrow \sigma = I$ 」が成り立つとき、 G は Λ の点集合 Ω 上正則に働くと言う。このとき $|G| = |\Omega|$ 。

特に $T(\Lambda)$ が Ω 上可移に働くとき、 Λ を移行平面と呼ぶ。このとき各方向 $\Lambda(\infty)$ に対し $T(\Lambda)$ は $(\Lambda(\infty), \ell(\infty))$ 可移となる。 $\text{Aut}(\Lambda)$ の部分群 G が異なる二つの方向 $\Lambda(\infty)$, $B(\infty)$ に対し $(\Lambda(\infty), \ell(\infty))$ 可移且つ $(B(\infty), \ell(\infty))$ 可移ならば、 Λ は移行平面となり、 $G \supseteq T(\Lambda)$ となることが知られている。

移行平面は次に述べるようにベクトル空間の中で捕らえることができる。

有限体 $G F(q)$ を F と置く。 V を F 上 $2d$ 次元ベクトル空間とし、 V の d 次元部分空間

からなる或る集合 Σ が次の条件 (1), (2), (3) を満たすものとする.

$$(1) \quad W, U \in \Sigma, W \neq U \Rightarrow V = W + U$$

$$(2) \quad V = U + W \quad (W \in \Sigma)$$

$$(3) \quad |\Sigma| \geq 3$$

このとき点集合 Ω として V , 直線集合 \mathfrak{L} として $\{W + x \mid W \in \Sigma, x \in V\}$ をとり, 結合関係として包含関係を考えると $\Lambda(\Omega, \mathfrak{L}, \in) = \Lambda(V, \Sigma)$ は移行平面となる.

$x \in V, a \in V$ に対し, $x \tau(a) = x + a$ と定めると $\tau(a)$ は $\Lambda(V, \Sigma)$ の自己同形となり, $T(\Lambda(V, \Sigma)) = \{\tau(a) \mid a \in V\}$ となる. また $T(\Lambda(V, \Sigma))$ は基本可換 p -群となる. ($q = p^*$ ($\exists a \in \mathbb{N}$))

どの移行平面も適当な F, V, Σ に対し, $\Lambda(V, \Sigma)$ と平面として同形になる.

故に移行平面の位数は素数中となる.

$K(\Lambda(V, \Sigma)) = \{f \mid f \text{ は } V \text{ の自己準同形, } f(W) \subseteq W \quad (W \in \Sigma)\}$ と定義すると, $K(\Lambda(V, \Sigma))$ は F を含む有限体となる. $K(\Lambda(V, \Sigma)) = K$ を $\Lambda(V, \Sigma)$ の核と呼ぶ. $[W:K]$ (W の K 上の次元) を $\Lambda(V, \Sigma)$ の Ostrom 次元と言う. Ostrom 次元が 1 のときの $\Lambda(V, \Sigma)$ がデザルグ平面である.

移行平面 $\Lambda(V, \Sigma)$ の全自己同形群は $\Gamma(V, K) \cdot T$ の部分群となる.

(ここで $T = T(\Lambda(V, \Sigma))$ で, T は $\text{Aut}(\Lambda(V, \Sigma))$ の正規部分群)

いろんな人により数多くの移行平面が構成されている. 移行平面に関する当面の問題の中から次のものを挙げておく. ([4], [5] 参照)

(問題 1) flags 上に可移に働く自己同形群を有する移行平面はどのようなものになるか.
(デザルグ平面以外に三つの平面系列と五つの平面の例が知られている.)

(問題 2) 非可解な自己同形群を持つ Ostrom 次元が 2 の移行平面を決めよ.

3 正則平面

位数 n の有限アフィン平面 $\Lambda(\Omega, \mathfrak{L}, 1)$ の自己同形群 R が点集合 Ω 上に正則に働くとする. ($\Lambda(\Omega, \mathfrak{L}, 1)$ を Λ とおく.)

(仮定 1) 或る方向 $P(\infty)$ に対し, R は $(P(\infty), \mathfrak{L}(\infty))$ 可移となる.

以下この(仮定 1)の下で考える. R が可換群ならば(仮定 1)は成り立つ. ([1] 参照) また(仮定 1)を満たさない例は見つかっていない.(仮定 1)の命題は成り立つものと予想されている. ([予想 1])

さて $T(P(\infty), \ell(\infty)) = H$ とおくと H の位数は n で、 H は R の正規部分群となる。 H は $\ell(\infty)$ 上の全ての点を固定する。

(今までに知られている全ての例において、 H は基本可換 p 群となっている。)

R/H が $(\ell(\infty)) \setminus (P(\infty))$ 上自明に働けば、 Λ は移行平面となる。

(仮定 2) R/H は $(\ell(\infty)) \setminus (P(\infty))$ 上可移に働く。

以下暫く (仮定 2) の下で考える。 R が可換群で R が移行群でないならば、(仮定 2) は成り立つ。([1] 参照)

[Case I] R が H 上分裂して $R = H \times G$ となる R の部分群 G が存在するとき。

Λ の点 $Q (\in \Omega)$ を一つ固定する。 Q を通り、 $P(\infty)$ (直線の平行類に属さない直線の一つ) を ℓ とし、 $(x \in R \mid Qx \in \ell) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ とする。このとき (y_1, y_2, \dots, y_n) は R の H による剰余類の完全代表系である。 G の任意の元 g に対し、ただ一つの i とただ一つの H の元 h が存在して、 $g = y_i h$ と書ける。このとき $f(g) = h^{-1}$ と定義すると f は G から H への平面関数となる。即ち

[Case I] は平面関数の研究に帰着される。平面関数については今夏の草津シンポジウムで話したことなのでここでは割愛するが、その後得られた定理を一つ挙げておく。

([7] 参照)

[定理 1] n が素数 p^a で $n \geq 2$ 且つ G が巡回群ならば、[Case I] は起こらない。

(n が偶数ならば、[Case I] が起こらないこともよく知られている。)

[Case II] R が H 上分裂して、 R の或る部分群 G に対して $R = H \cdot G$ (半直積) となるとき。この場合に宛はまる例は知られていない。

[問題 3] [Case II] に宛はまるアフィン平面とその正則自己同形群 R を構成せよ。

[Case III] R が H 上分裂しない場合。

(例 1) $q = p^e$ (p : 奇素数) f を $GF(q)$ から $GF(q)$ への加法を保つ 1 対 1 写像とする。 $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & f(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in GF(q) \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in GF(q) \right\}$

とすると、 R は $AG(2, q)$ の点集合上正則に働き、 R/H は (仮定 2) を満たし、 R は H 上分裂しない。(但し、 $f(x) = ax$ ($\forall x \in GF(q)$) でないとする。 $a \in GF(q)^*$)

[subcase (i)] n が奇数のとき。

R が可換群のとき、このような場合の例は知られていない。少なくとも、n が素数中のときは起こらないと確信している。

[問題 4] 奇素数 p に対し、R が可換 p-群ならば、R が H 上裂することを示せ。
(R の位数が p^k ならば $o. k$)

[subcase (2)] n が偶数のとき。

R が可換群のとき、M. J. Ganley による次の定理が重要である ([2] 参照)

[定理 2] R が移行群でないとする。

このとき、R は $Z_4 \times Z_4 \times \cdots \times Z_4$ (m 個) と同形になり、
H は $Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$ (m 個) と同形になる。また $n = 2^m$ となる。

(例 2) $\Lambda = \Lambda G(2, 2^-)$ の場合、 $F = GF(2^-) = Z$, (0) と置く。

$$\Omega = \{(a, b, c) \mid a \neq 0, a, b, c \in F\}$$

$$\mathfrak{S} = \{(a, b, c)^{-1} \mid a, b, c \in F, (a, b, c) \neq (0, 0, 0), (a, b, c) \neq (1, 0, 0)\}$$

と置く。ここで $(a, b, c)^{-1}$ は行列 (a, b, c) の転置を表し、行列 (a, b, c) , $(a, b, c)^{-1}$ においてはスカラー倍の違いは無視する。

$$(a, b, c) \mid (d, e, f)^{-1} :: ad+be+cf=0$$

このとき、結合構造 $(\Omega, \mathfrak{S}, I)$ はアフィン平面をなす。

$$R = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1, a, b \\ 0, 1, a \\ 0, 0, 1 \end{array} \right] \mid a, b \in F \right\} \text{ は行列の積に関して, } (\Omega, \mathfrak{S}, I)$$

の自己同形群となり、 Ω 上に正則に働く。 $H = \{\sigma^2 \mid \sigma \in R\}$.

R は $Z \times Z \times \cdots \times Z$ (m 個) と同形な群である。

(定義) 二つの演算 (+, 積) が導入された集合 S が semifield をなす ⇔

(i) S は (+) に関し、可換群をなす。(その単位元を (0) とする)

(ii) $S \setminus \{0\}$ は (積) に関し、loop をなす。

(iii) $a(b+c) = ab+ac, (a+b)c = ac+bc$ ($a, b, c \in S$)

$ab=ba$ ($\forall a, b \in S$) が成り立つとき、S は可換 semifield であるという。

Semifield S から、次のようにしてアフィン平面 $\Lambda(S)$ が構成される。これを semifield-plane と呼ぶ。

$$\Omega = \{ (x, y) \mid x, y \in S \}$$

$$\mathfrak{B} = \{ [a, b], [c] \mid a, b, c \in S \}$$

$$(x, y) \in [a, b] \Leftrightarrow b = ax + y, \quad (x, y) \in [c] \Leftrightarrow x = c$$

このとき、結合構造 $(\Omega, \mathfrak{B}, I) (= \Lambda(S))$ はアフィン平面をなす。

(例 3) 奇数 m に対し、 $q = 2^d$, $F = GF(q^m)$, $K = GF(q)$ と置き、 F から K への K -線形写像 f を一つ与える。有限体 F の和と積、及び f を使い、 F に新しい二つの積 $*$ と \cdot を次のように定義する。

$$x * y = xy + (f(x)y + f(y)x)^2$$

$$(x * 1) \cdot (1 * y) = x * y$$

(ここで $F = \{x * 1 \mid x \in F\} = \{1 * x \mid x \in F\}$ が成立)

このとき、 $F(+, \cdot)$ ($\cong K(d, m, f)$) は 1 を単位元とする可換な semifield をなし、 f が全射 且つ $d, m > 3$ ならば $F(+, \cdot)$ は体ではない。
($|F| = 2^{md}$)

(例 4) $S(+, \text{積})$ を可換な有限 semifield で $|S| = 2^n$ とせよ。

$R = \{ (x, y) \mid x, y \in S \}$ と置き、 R の積を $(x, y)(a, b) = (x + na, y + b + nax)$ と定義すると、 R は $(0, 0)$ を単位元とする可換群となる。 R の、アフィン平面 $\Lambda(S)$ 上の作用を次のように定義する。

$$(a, b)^{(x, y)} = (a + x, b + xa + y), \quad [a, b]^{(x, y)} =$$

$$[a + x, b + (a + x)x + y], \quad [c]^{(x, y)} = [c + x]$$

このとき、 R は $\Lambda(S)$ の自己同形群となり、 $\Lambda(S)$ の点集合上に正則に働くしかも、 R は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ (m 個) と同形な群で、
 $\Pi = \{ \sigma \mid \sigma \in R \}$ である。

(問題 5) 偶数位数のアフィン平面 Λ が、点集合上正則に働く可換な自己同形群 R をもち、 R が Λ の移行群でないとする。このとき Λ はデザルグ平面 $\Lambda G(2, 2^n)$ 又は Semifield-plane $\Lambda(S)$ のいずれかであるか。

(仮定 2) を除いた設定で、Y. Hiramine による次の定理も興味深い。([9] 参照)

[定理 3] n が偶数、 R が可換、 Π の 2-シロー群が巡回群ならば、 Λ は位数 2 のデザル

グ平面で、 $R = \mathbb{Z}_4$ または $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ となる。

p が n を割る奇素数、 S が R の p -シロー群とする。 R/H の p -シロー群が巡回群ならば、 S は $S \cap H$ 上分解する。特に n が奇数で平方因子を持たないならば、 $R = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ となる。

最後に (仮定 2) の条件を満たさない例を二つ挙げる。

(例 5) (dual Walker planes)

有限体 $GF(q)$ ($q = p^r$) において、 $q \equiv -1 \pmod{6}$ とし、 $W(q)'$ を $GF(q)$ 上 $\{(t, u)\}$ を基底とするベクトル空間とする。 $W(q)'$ に積を次のように定義する。

$$(ta + b) \cdot (tc + d) = t(ad + (b - a^2)c) + (-1/3 a^3 c + bd)$$

$$\Omega = \{(\Lambda, B) \mid \Lambda, B \in W(q)'\}$$

$$\mathfrak{B} = \{[M, K], [\infty, N] \mid M, K, N \in W(q)'\} \quad \text{とおき、}$$

結合関係 I を次のように定める。

$$(\Lambda, B) I [M, K] \iff B = \Lambda \cdot M + K, \quad (\Lambda, B) I [\infty, N] \iff \Lambda = N$$

このとき $\Lambda = (\Omega, \mathfrak{B}, I)$ は位数 q の移行平面でないアフィン平面となる。

$u, v \in GF(q)$ に対し $\sigma(u, v), \tau(tu + v)$ の Ω 上の作用を

$$\sigma(u, v) : (ta + b, tc + d) \rightarrow (t(a+u) + (au + b)(1/3u^2 + v), tc + (cu + d))$$

$$\tau(tu + v) : (ta + b, tc + d) \rightarrow (ta + b, (tc + d) + (tu + v))$$

と定義すると $\sigma(u, v), \tau(tu + v)$ は Λ の自己同形となる。

$$H = \{\tau(tu + v) \mid u, v \in GF(q)\}$$

$S = \{\sigma(u, v) \mid u, v \in GF(q)\}$, 直線 $[\infty, N]$ を含む平行類を

(∞) とおくと、 H は $(\infty), \ell(\infty)$ 可移で、 S は H を正規化する。 H と S は

位数 q の基本可換 p -群で、 HS の中心は $\{\tau(t0 + v)\sigma(0, w) \mid u, v$

$\in GF(q)\}$ である。 HS は Ω 上正則に働く。 S は $(\ell(\infty)) \setminus \{(\infty)\}$

上 q 個の可移域を持つ。

(例 6) (derived dual Walker planes)

(例 4) において、 $D = \{[a, K] \mid a \in GF(q) \cup \{\infty\}, K \in W(q)'\}$

$\mathfrak{B} \setminus \{\infty\} = \mathfrak{B}^*$ と置く。また $\Lambda, B, C \in W(q)'$ とし、

$$\Lambda \cdot (\Lambda, B, C) = \{(\Lambda a + B, \Lambda b + C) \mid a, b \in GF(q)\} \quad \text{とすると}$$

$\Lambda \cdot (\Lambda, B, C)$ は Λ の恒大部分平面となる。

$B = (\Lambda_0, (1, ta, tb) \mid a, b \in GF(q)) \cup (\bigcup_{c \in GF(q)} (\Lambda_0, (t+c, a, b) \mid a, b \in GF(q)))$ と置き, $\mathfrak{S}^{**} = \mathfrak{S}^* \cup B$ とする. 結合関係 I^* として, B に属するブロックと点 (Λ, B) ($\in \Omega$) は包含関係をと, \mathfrak{S}^* に属するブロックと点 (Λ, B) は (例4) そのままの結合関係 I をと. このとき $\Lambda = (\Omega, \mathfrak{S}^{**}, I^*)$ は移行平面でもなく, (例4) のものとも異なるアフィン平面となる.
 やはり HS は Ω 上正則に働くが, 今度は HS の中心 $Z(HS) = \{(\tau(t_0 + v) \sigma(0, w) \mid u, v \in GF(q))\}$ が $([\infty], \overline{\lambda}(\infty))$ 可移となる. $HS/Z(HS)$ は $(\overline{\lambda}(\infty)) \setminus \{[\infty]\}$ 上 q 個の可移域を持つ.
 但し $[\infty]$ は直線 $\Lambda_0(1, 0, 0)$ を含む直線の平行類である.

$q = 2^{2^k+1}$ のときも, (例5), (例6) のように, (仮定2) の条件を満たさない, 移行平面でない例が存在する. (dual Lunenburg planes, derived dual Lunenburg planes)

文献

- (1) P. Dembowski, Gruppentheoretische Kennzeichnungen der endlichen desarguesschen Ebenen. Abh. Math. Sem. Hamburg 29 (1965), 92-106.
- (2) M. J. Ganley, On a Paper of Dembowski and Ostrom. Archiv der Math. 27 (1976) 93-98
- (3) Y. Hiramine, Affine planes with primitive collineation groups. J. Algebra 128 (1990) 366-383
- (4) M. J. Kallaher, Affine planes with transitive collineation groups. North holland, New York, 1982
- (5) W. M. Kantor, 2-Transitive and flag-transitive designs. Marshall Hall Conference, 1990, preprint.
- (6) H. Lunenburg, Translation Planes. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- (7) N. Nakagawa, Left cyclic planar functions of degree p^n for $n \geq 2$. preprint
- (8) 第3回 楽しい有限群の集い報告集 草津セミナーハウス 1991.
- [9] Y. Hiramine, Factor sets associated with regular collineation groups. J. Algebra, 143(1991)

中川 暢 夫

近畿大学理工学部 数学物理学科

On collineation groups with block orbits

大阪大学教養部 平峰 豊

結合構造 $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ ($|\mathcal{P}| < \infty$) が有限アフィン平面であるとは次の三条件がみたされることを言う。

(i) 任意の異なる 2 点 $P, Q \in \mathcal{P}$ を通る直線 $l (=PQ) \in \mathcal{L}$ が唯一つ存在する。

(ii) 任意の直線 $l \in \mathcal{L}$ と l 上にない任意の点 $P \in \mathcal{P}$ に対し P を通り l と交わらない直線 $g \in \mathcal{L}$ (平行線) が唯一つ存在する。

(iii) 同一直線上にない 3 点が存在する。

この時 $|\mathcal{P}| = n^2$, $|\mathcal{L}| = n^2 + n$, $|l| = n \quad \forall l \in \mathcal{L}$
(l と l 上の点集合とを同一視する) が成り立ち、さらに \mathcal{L} は $n+1$ 個の平行線の類に類別される: $\mathcal{L} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{n+1}$.

有限アフィン平面から自然な方法で有限射影平面が得られる。([7] 第 3 章) 有限アフィン平面 (又は有限射影平面) に関する最も基本的問題は次のものである。

(問題 1) 位数 n について何が言えるか?

Bruck - Chowla - Ryser の定理 ([7] 第 3 章) は n が奇

たすべき必要条件を与えているが、C. W. H. Lam 等により十分条件ではないことが示されて、定理の精密化が望まれている。知られている例では n は素数中となっている。また知られている多くの射影平面では、部分構造としてアフィン平面を適当にとれば得られたアフィン平面は自己同型群がアフィン点全体の上に可移に作用していることが知られている。先の問題1の特別な場合として次の問題を当面の目標とする。([8]第16章)

(問題2) 可移平面(点上可移な自己同型群をもつアフィン平面)の位数 n について何が言えるか?

以下では可移群 G を認容する可移平面について考えていく。

この問題については、様々な付加的条件のもとで研究が行われてきた([8])がそのうちのいくつかをここに記すと、

- (1) 可移群 G が \mathbb{Z} 上可移ならば n は素数中 (Wagner [8]11章)
- (2) 可移群 G が \mathbb{Q} 上原始的ならば n は素数中 (Keiser [8]15章, Hiramine [2])
- (3) 可移群 G のある元 ($\neq 1$) が各々の parallel class を固定し、かつアフィン点を少なくとも1点固定していれば n は素数中 (André [8]10章)

上の(1)~(3)では n が素数中であることを示すのに共通

な論法が用いられているが、それについて次にのべる。
 $\pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ のある自己同型 σ が移行であるとは $\sigma = 1$ 又はそれが各々の平行類を固定しかつ固定点をもたないことを言う。 G に含まれる移行全体 $T (=T(G))$ は G の正規部分群をなし、各 $\sigma \in T$ ($\sigma \neq 1$) に対して σ が固定する直線の全体はただ一つの平行類をなすことが知られている。
 ([7]). この平行類を σ の中心と呼び、中心 \mathcal{C} をもつ移行全体が作る部分群を $T_{\mathcal{C}} (\leq T)$ と書く。 $T_{\mathcal{C}}$ は \mathcal{C} に含まれる各直線上正則に作用し固定点をもつのは単位元だけなので、 $|T_{\mathcal{C}}| \mid n$ が成り立つ。

定理 $T_{\mathcal{C}} \neq 1$ となる平行類 \mathcal{C} が 2 つ以上あれば、

T は基本可換 p 群 ($p \mid n$) となる。 ([7] 定理 4.14)
 (p は素数)

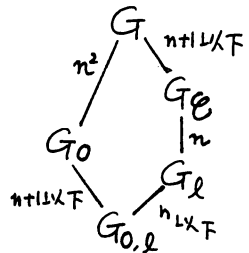
先にのべた (1) ~ (3) に共通した方法とは $|T_{\mathcal{C}}| = n$ となる平行類 \mathcal{C} が 2 つ以上あることを示すことである。この時は $|T| = n^2$ となり上の定理より T が p 群なので n が素数中となる。もちろんこのような平行類が 2 つ以上存在しているとは限らないし、そうでない例が実際にある。 ([8] 6.7, 8 章)。しかし Kallagher による次の問題 (予想) がある。 ([8] 9 章)
 (問題 3) $|T_{\mathcal{C}}| = n$ となる平行類 \mathcal{C} は常に存在する (か?)。

次の問題も興味あるものの一つであるが、問題3が肯定的ならば先の定理を用いて直ちに成り立つが、そのことは独立に正しい可能性が高い。

(問題4) 可移群 G が平行類をすべて動かしていけば、 n は素数中である(か?)。

次に可移群 G の部分群のいくつかについて考える。 \mathcal{C} を $\pi(P, \mathcal{L})$ の平行類の任意の一つ、 $O \in \mathcal{L} \in \mathcal{C}$ とする $O \in \mathcal{O}$, $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$ をとる。 $O, \mathcal{L}, \mathcal{C}$ のそれぞれの変換部分群の間には右図のような指数の関係がある。

($|G_{\mathcal{C}} : G_{\mathcal{L}}| = n$ となるのは Ostrom-Wagner の定理による。 [8] 定理4.3.)



$G_O = 1$ となるときは取り扱いか特殊となり相対差集合や数論の問題、因子団の問題となる(たとえば [1] [4] [3] など)ので別の機会にのべることとして以下では $G_O \neq 1$ を仮定する。

$G_O = H$ とし、 $\mathcal{O}^* (= P - \{O\})$ 上の H -軌道全体を \mathcal{M} とおく。また各 $P \in \mathcal{M}$ に対して $\tilde{\Gamma} = \{\mathcal{L} \in \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \ni O, \Gamma_n \mathcal{L} \neq \emptyset\}$, $\deg(P) = |\tilde{\Gamma}|$ とおくとき次が成り立つ。

- (1) $\forall P \in \mathcal{M}, \exists c \in \mathbb{N} : |\Gamma_n \mathcal{L}| = c \quad \forall \mathcal{L} \in \tilde{\Gamma}$.
- (2) $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{M}, \tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Gamma}' \neq \emptyset \Leftrightarrow \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}'$

上の (1)(2) により $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}'$ とする $\Gamma' \in \mathcal{M}$ の全体を \mathcal{M}_Γ と書けば、 $\bigcup_{\Gamma' \in \mathcal{M}_\Gamma} \Gamma' \cup \{0\} = \bigcup_{\ell \in \tilde{\Gamma}} \ell$ が成り立つことは明らかである。 $|\mathcal{M}_\Gamma| = 1$ のとき Γ を H のブロック軌道という。すなわち $\Gamma \cup \{0\}$ が 0 を通るいくつかの直線の和集合になっているとき Γ をブロック軌道である。ブロック軌道をもつ多くの可移平面が知られている。([8] 12, 13 章)

Kallagher は次の予想をした。 Γ がブロック軌道の時

$$(i) \deg(\Gamma) \geq 2 \Rightarrow |T(G)| = n^2.$$

$$(ii) \deg(\Gamma) = 1 \Rightarrow |T(G)| = n^2 \text{ または } \pi \text{ のある dual なアフィン平面に属して } |T(G)| = n^2.$$

$$(iii) \text{ ブロック軌道を 2 つ以上もてば } |T(G)| = n^2.$$

従ってこの予想が正しければ、ブロック軌道をもつアフィン平面の位数は素数中となることを意味する。

しかし (ii) と (iii) には反例があることが分かった。

([6]).

例. $K = GF(q)$, $q = 2^m$, $m = e \cdot d$, $2 \leq e$

$$\mathcal{O} = \{ (1, x, y) \mid x, y \in K \}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} K^* \mid a, b, c \in K, (b, c) \neq (0, 0) \right\}, K^* = K - \{0\}$$

$$\therefore \mathcal{L} \cap \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} K^* = \left\{ (1, x, y) \in \mathcal{O} \mid (1, x, y) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ (同-視)}$$

$$M \in GL(3, K) \text{ の直線への作用を } \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} K^* \right\} M = \left(M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) K^* \text{ と}$$

定義する。 $\sigma \in \text{Aut } K$ として $x \mapsto x^{2^d}$ をとり

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ & 1 & x_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}, D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ & z^{1+\sigma} \end{pmatrix} \mid z \in K^* \right\}$$

$G = TD$ ($\triangleright T$) とおく。 $O = (1, 0, 0)$,

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} K^*, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} K^* \text{ としておけば}$$

T は O 上正則可移かつ $G_0 = D$ であり、 G_0 は $g - \{0\}$, $h - \{0\}$ をブロック軌道としてもち、その degree はともに 1 (σ の条件はブロック軌道であることを示す時に必要となる。) であるが、 G の移行全体がなす群は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid y \in K \right\}$ で位数は q^2 より小さい。

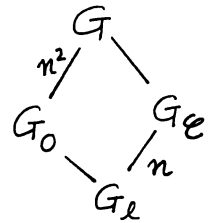
上の例はブロック軌道をもつアフィン平面においては n が素数中であるかどうかを考える時に $|T| = n^2$ を示すという方法では無理であることを言っている。しかし次のことが言える。

補題 Γ をブロック軌道とし $\ell \in \widetilde{\Gamma}$ をとるとき次のいずれかが成り立つ。

(i) G_ℓ は ℓ 上 2 重可移である。

(ii) G はただ一つの平行類 \mathcal{C}_0 を固定し \mathcal{C}_0 に含まれる直線全体の上に 2 重可移である。

(証明) (i) を否定すると $G_l \leq G_0$ である。また右図より $|G : G_e| \geq n$ でなければならぬが、 $|G : G_e| = |G^G| \leq n+1$ より $|G : G_e| = n$ 又は $n+1$ 。後者だと右図によりただちに矛盾を得るので $|G : G_e| = n$ 。ゆえに G が固定する平行類が唯一存在する。これを \mathcal{C}_0 とおく。先にのべた Ostrom-Wagner の定理により $G_{\mathcal{C}_0} (= G)$ は \mathcal{C}_0 上に可移である。またブロック軌道の定義から G_l は $l - \{0\}$ 上可移であるか。0 を通る \mathcal{C}_0 のただ一つの直線 (= l_0 とおく) を除けば他の \mathcal{C}_0 の直線はそれぞれ $l - \{0\}$ 上の異なる点で交わる。このことは G_0 が $\mathcal{C}_0 - \{l_0\}$ 上可移であることを意味するので、 G は \mathcal{C}_0 上 2 重可移である。



上の補題により π 又は π の dual を考へることにより問題は次のより一般的な場合に帰着されたことになる。

(*) 位数 n の射影平面とその自己同型群 X があって X がある flag (P, l) を固定し、 $l - \{P\}$ 上 2 重可移であるとき n について調べよ。

(*)に關して次が示された。

定理 ([5]) (*)のもとで、 $X^{\ell-\{P\}}$ は正規な正則部分群をもつ。 $Y = X_Q$ ($Q \in \ell - \{P\}$) とおくとき次のいずれかが起る。

- (1) $Y^{\ell-\{P\}} \leq \Gamma L(1, p^m)$, $n = p^m$ (p は素数)
- (2) $SL(2, p^m) \leq Y^{\ell-\{P\}} \leq \Gamma L(2, p^m)$, $n = p^{2m}$
- (3) $n \in \{24, 3^2, 3^4, 3^6, 5^2, 7^2, 11^2, 19^2, 23^2, 29^2, 59^2\}$

上の定理より系として フロック軌道をもつ可移アフィン平面の位数 n は常に素数中であることが示されたことになる。素数中であることが分かれば、上で述べた Kallaber の予想のうち (i) については正しいことが比較的容易に示される。([6]) 従て (i) については $|T(G)| = n^2$ が保証されたことになる。

先の反例もあるので、Kallaber の予想 (ii) (iii) の場合の n が素数中であることを示すのは上の定理を用いるしかないが、(i) については初等的証明が可能かもしれない。

(問題 5) フロック軌道に関する Kallaber の予想 (i) の初等的証明はないか？

最後に、もう一度有限アフィン平面の位数について
 ぶり返してみると、もう少し部分構造に目をむけ
 た方がよいような気がする。たとえば、部分構造と
 しての net や linear space などの詳しい研究が
 もっと必要だと思う。一つの例をあげると、位数 n
 $= m^2$ で次数 $m^2 - m$ の net $\mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{m^2 - m}$ (各 \mathcal{C}_i は
 平行類) があって、これが次のように二通りの方法で

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{m^2 - m} \cup \mathcal{C}'_{m^2 - m + 1} \cup \dots \cup \mathcal{C}'_{m^2 + 1} && \text{あ. はび} \\ & \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_{m^2 - m} \cup \mathcal{C}''_{m^2 - m + 1} \cup \dots \cup \mathcal{C}''_{m^2 + 1} \end{aligned}$$

とアフィン平面に拡大できる時は $n (= m^2)$ は素数中
 に存在することが知られている。([9])。問題 1 については
 もろくであるが、問題 2 についても群の作用とともに
 部分構造の精密な研究が必要になってくると思う。

参考文献

- [1] J. E. H. Elliot and A. T. Buxton, Relative difference sets, Illinois J. Math. 10 (1966), 517-531
- [2] Y. Hiramane, Affine planes with primitive collineation groups, J. Algebra 128 (1990) 366-383.
- [3] _____, Factor sets associated with regular

- collineation groups, *J. Algebra* 142 (1991) 414-423
- [4] —————, Planar functions and related group algebras, to appear in *J. Algebra*.
- [5] —————, On finite affine planes with a 2-transitive orbit, submitted.
- [6] —————, On collineation groups with block orbits, submitted.
- [7] D. R. Hughes and F. C. Piper, "Projective Planes", Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin, 1970.
- [8] M. J. Kallaher, "Affine Planes with Transitive Collineation Groups", North Holland, New York / Amsterdam / Oxford, 1982.
- [9] O. Pröhaska, Endliche ableibare affine Ebenen, *Geom. Ded.* 1 (1972), 6-17.